

**Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)**  
**Προτασιακός Λογισμός – Ασκήσεις**

1. Θεωρήστε τις ακόλουθες προτάσεις:

$$p \rightarrow q, \quad \neg p \rightarrow \neg q, \quad q \rightarrow p, \quad \neg q \rightarrow \neg p, \quad q \wedge \neg p, \quad \neg p \vee q, \quad \neg q \vee p, \quad p \wedge \neg q.$$

Ποιές από αυτές είναι λογικά ισοδύναμες με την  $p \rightarrow q$ ;

2. Έστω ότι η πρόταση  $p \rightarrow q$  είναι ψευδής. Να δώσετε τιμή αληθείας για τις ακόλουθες προτάσεις:

$$(\alpha) p \wedge q \quad (\beta) p \vee q \quad (\gamma) q \rightarrow p.$$

3. Να κατασκευάσετε πίνακες αληθείας για τις ακόλουθες προτάσεις:

$$(\alpha) \neg(p \wedge q) \quad (\beta) \neg(p \vee q) \quad (\gamma) \neg p \wedge \neg q \quad (\delta) \neg p \vee \neg q.$$

Μπορείτε με βάση αυτούς τους πίνακες να διαπιστώσετε κάποιες λογικές ισοδυναμίες μεταξύ των (α), (β), (γ) και (δ); Ποιές είναι αυτές;

4. Να δώσετε πίνακες αληθείας για τις προτάσεις:

$$(\alpha) ((p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (\neg p \wedge q) \quad (\beta) \neg((p \vee q) \rightarrow r).$$

5. Η αποκλειστική διάζευξη  $\underline{\vee}$  (το γνωστό XOR) ορίζεται ως σύνδεσμος με τον ακόλουθο πίνακα αληθείας:

$p$	$q$	$p \underline{\vee} q$
A	A	Ψ
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

(i) Να κατασκευάσετε πίνακες αληθείας για τις προτάσεις:

$$(\alpha) p \underline{\vee} q \quad (\beta) (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \quad (\gamma) (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} p.$$

(ii) Να αποδείξετε ότι οι προτάσεις  $p \underline{\vee} q$  και  $\neg(p \leftrightarrow q)$  είναι λογικά ισοδύναμες.

6. Να εξετάσετε ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$(\alpha) (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

$$(\beta) (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \leftrightarrow p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r).$$

$$(\gamma) ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)).$$

$$(\delta) ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)).$$

7. Να αποδείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ταυτολογίες:

$$(\alpha) ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r).$$

$$(\beta) (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)).$$

8. Έστω  $p$  η πρόταση «ο Κώστας διαβάζει την εφημερίδα  $N$ »,  $q$  η πρόταση «ο Κώστας διαβάζει την εφημερίδα  $K$ » και  $r$  η πρόταση «ο Κώστας διαβάζει την εφημερίδα  $B$ ». Να γράψετε καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις στη (συμβολική) γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού:

(α) «Ο Κώστας διαβάζει την εφημερίδα  $N$  ή την εφημερίδα  $K$ , αλλά όχι την εφημερίδα  $B$ ».

(β) «Ο Κώστας διαβάζει τις εφημερίδες  $N$  και  $K$  ή τις εφημερίδες  $N$  και  $B$ ».

(γ) «Δεν είναι αλήθεια ότι ο Κώστας διαβάζει την εφημερίδα  $N$  και δεν διαβάζει την εφημερίδα  $B$ ».

(δ) «Δεν είναι αλήθεια ότι ο Κώστας διαβάζει τις εφημερίδες  $K$  ή  $B$  αλλά όχι την εφημερίδα  $N$ ».

9. Έστω  $p$  η πρόταση «ο Ανδρέας μιλάει Γαλλικά» και  $q$  η πρόταση «ο Ανδρέας μιλάει Γερμανικά». Να δώσετε μια απλή λεκτική διατύπωση που να περιγράφει καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις:

$$p \vee q, \quad p \wedge q, \quad p \wedge \neg q, \quad \neg p \vee \neg q, \quad \neg(\neg p), \quad \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Μπορείτε να διακρίνετε λογικά ισοδύναμες διατυπώσεις μεταξύ αυτών των προτάσεων;

10. Με σύνολο αναφοράς το σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών να αποτιμήσετε (δηλαδή, να δώσετε τιμές αληθείας) στις ακόλουθες προτάσεις:

(α)  $3 + 3 = 6$  και  $1 + 2 = 5$ .

(β) Δεν είναι αλήθεια ότι  $3 + 3 = 6$  ή  $1 + 2 = 3$ .

(γ)  $2 + 2 \neq 4$  και  $1 + 2 = 3$ .

(δ) Δεν είναι αλήθεια ότι  $3 + 3 \neq 6$  ή  $1 + 2 \neq 5$ .

11. Να εκφράσετε καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις χρησιμοποιώντας μόνο τη διάζευξη ( $\vee$ ) και την άρνηση ( $\neg$ ):

(α)  $(p \vee q) \rightarrow p$ , (β)  $q \rightarrow (p \vee q)$ , (γ)  $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ , (δ)  $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$ ,

(ε)  $(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$ .

12. Ορίζουμε το δυαδικό σύνδεσμο ( $\text{imp2}$ ) από τον πίνακα:

$p$	$q$	$p (\text{imp2}) q$
A	A	A
A	$\Psi$	$\Psi$
$\Psi$	A	A
$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$

Να εξετάσετε αν οι προτάσεις  $(p (\text{imp2}) q) \wedge (q (\text{imp2}) p)$  και  $p \leftrightarrow q$  είναι λογικά ισοδύναμες. Ακολουθώντας να γράψετε τον ( $\text{imp2}$ ) σε κανονική διαζευκτική μορφή.

13. Σε άμεση σχέση με την πρόταση « $p \rightarrow q$ » είναι οι ακόλουθες προτάσεις: (α) η αντίστροφη (converse) πρόταση « $q \rightarrow p$ », (β) η αντίθετη (inverse) πρόταση « $\neg p \rightarrow \neg q$ » και (γ) η αντιθετοαντίστροφη (contrapositive) πρόταση « $\neg q \rightarrow \neg p$ ». Με αυτή την ορολογία να αποδείξετε τα ακόλουθα:

- Η αντίστροφη μιας αληθούς συνεπαγωγής δεν είναι πάντα αληθής.
- Η αντίθετη μιας αληθούς συνεπαγωγής δεν είναι πάντα αληθής.
- Η αντιθετοαντίστροφη μιας αληθούς συνεπαγωγής είναι πάντα αληθής.

14. Για καθεμιά από τις ακόλουθες συνεπαγωγές να γράψετε την αντίστροφη, την αντίθετη και αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή:

$$p \rightarrow q, \quad \neg p \rightarrow \neg q, \quad \neg q \rightarrow \neg p, \quad p \rightarrow \neg q, \quad \neg p \rightarrow q.$$

15. Συμφωνούμε η λεκτική έκφραση «αν ... τότε» να αποδίδεται συμβολικά με τη συνεπαγωγή « $\rightarrow$ ». Να γράψετε την πρόταση «αν  $1 < 4$  τότε  $5 > 8$ » σε συμβολική μορφή « $p \rightarrow q$ » για κατάλληλα  $p$  και  $q$ . Ακολουθώντας, να γράψετε την αντίστροφη, την αντίθετη και την αντιθετοαντίστροφη τόσο λεκτικά όσο και συμβολικά. Σε κάθε περίπτωση, να αποτιμήσετε τις προτάσεις που προκύπτουν ως αληθείς ή ψευδείς.

16. Για πραγματικούς αριθμούς  $a, b, c$  θεωρούμε τις προτάσεις ( $p : a < b$ ), ( $q : b < c$ ) και ( $r : a < c$ ). Να γράψετε στη συμβολική γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού τις:

- (α)  $(a < b)$  ή  $(b < c$  και  $a \geq c)$ .
- (β) Αν  $(a \geq c$  ή  $b < c)$  τότε  $(b \geq c)$ .

Στη συνέχεια, όταν  $a = 1$ ,  $b = 2$  και  $c = 3$ , να αποτιμήσετε τις (α) και (β) ως αληθείς ή ψευδείς.

17. Για τις προτάσεις  $p$  και  $q$  ορίζουμε την  $p | q$  να σημαίνει  $\neg p \vee \neg q$ .

(α) Να δείξετε τη λογική ισοδυναμία των  $p | p$  και  $\neg p$  καθώς και των  $(p | p) | (q | q)$  και  $p \vee q$ .

(β) Να εκφράσετε τους συνδέσμους  $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  μέσω του συνδέσμου  $|$ .