Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα – Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο.

2. Δείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

3. Αν $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ με

$$f(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$$

είναι 1-1 και επί, και συμπεράνατε ότι $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 =_c \mathbb{N}_0$

4. Είναι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αριθμήσιμο;

5. Μια ακολουθία $(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$ φυσικών αριθμών λέγεται *αριθμητική πρόοδος* αν υπάρχει $d \in \mathbb{N}$ ώστε $t_{n+1} = t_n + d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το σύνολο όλων των αριθμητικών προόδων είναι αριθμήσιμο.

6. Ορίστε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία να απεικονίζει τους ρητούς σε ρητούς και τους άρρητους σε άρρητους.

7. (α) Έστω A ένα σύνολο από κυκλικούς δίσκους στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Δείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω A ένα σύνολο από κύκλους στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το A αναγκαστικά αριθμήσιμο;

(γ) Έστω A ένα σύνολο από οχτάρια στο επίπεδο, τα οποία ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι το A αναγκαστικά αριθμήσιμο;

8. Έστω A ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο B του A, το άθροισμα των στοιχείων του B είναι μικρότερο από M. Δείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

9. Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται *αλγεβρικός* αν υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και ακέραιοι $a_0, a_1, \ldots, a_m$ (με $a_m \neq 0$) ώστε

$$(*) \qquad a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Δείξτε ότι το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο. [*Υπόδειξη*: Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το πλήθος των εξισώσεων της μορφής $(*)$ με $m + |a_0| + \cdots + |a_m| = N$ είναι πεπερασμένο.]

10. Έστω A, B, C τρία μη κενά σύνολα. Αν X είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : B \to C$, Y είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $g : A \to X$ και Z είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $h : A \times B \to C$, δείξτε ότι $Z =_c Y$.

11. Έστω A άπειρο σύνολο και έστω B αριθμήσιμο σύνολο. Δείξτε ότι $A =_c A \cup B$.

12. Δείξτε ότι το $\mathbb{N}$ έχει άπειρα το πλήθος ξένα ανά δύο άπειρα υποσύνολα.

13. (α) Δείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με την εξής ιδιότητα: αν $x \neq y$ τότε το $A_x \cap A_y$ είναι πεπερασμένο.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: αν $x \neq y$ τότε το $A_x \cap A_y$ είναι πεπερασμένο.

14. Έστω $\{I_a \mid a \in A\}$ οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

15. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο των $x \in [a,b]$ στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι αριθμήσιμο.