Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Σύνολα – Υποδείξεις

1. (α) $1 \in \{1,2\}$, αληθής.
(β) $3 \in \{1,5,2,3\}$, αληθής.
(γ) $3 \in \{1,5,2\}$, ψευδής.
(δ) $\{1,3\} \in \{1,3,5,2\}$, ψευδής.
(ε) $\{5\} \in \{1,3,5,2\}$, ψευδής.
(στ) $2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\}$, αληθής.
(ζ) $\{1,4,2,3\} = \{2,3,1,4,3,2\}$, αληθής.
(η) $\{a,d,b,d\} = \{a,b,d\}$, αληθής.
(ϑ) $\{a,b,d,d\} = \{a,b,a,d\}$, αληθής.
(ι) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-2x=0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-2x=0\}$, αληθής.

2. (α) $1 \subseteq \{1,2\}$, ψευδής.
(β) $\{3,1\} \subseteq \{1,5,2,3\}$, αληθής.
(γ) $\{3\} \subseteq \{1,5,2\}$, ψευδής.
(δ) $\{1,3\} \in \{1,3,5,2\}$, ψευδής.
(ε) $\{5\} \in \{1,3,5,2\}$, ψευδής.
(στ) $2 \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\}$, ψευδής.
(ζ) $\{1,4,2,3\} \subseteq \{2,3,1,4,3,2\}$, αληθής.
(η) $\{a,d,b,d\} \subseteq \{a,b,a,d\}$, αληθής.
(ϑ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b>2\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a>2\}$, αληθής.
(ι) $\{b \in \mathbb{N} \mid b>2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a>2\}$, αληθής.
(ια) $\{2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$, ψευδής.
(ιβ) $\{2\} \in \{1,\{2\}\}$, αληθής.
(ιγ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b \geq 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a>2\}$, ψευδής.
(ιδ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-2=0\} = \emptyset$, αληθής.

3. (α) $1 \subseteq \{1,3,5,2\}$, ψευδής.
(β) $\{1,2\} \subseteq \{1,3,5,2\}$, αληθής.
(γ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\} \subseteq \{1,3,5\}$, ψευδής.
(δ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\} \in \mathbb{N}$, ψευδής.
(ε) $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-2=0\}$, ψευδής.
(στ) $-3 \in \{a \in \mathbb{N} \mid a>2\}$, ψευδής.
(ζ) $\{1\} \in \{1,2,3\}$, ψευδής.
(η) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$, αληθής.
(ϑ) $1 \subseteq \{1,2,3\}$, ψευδής.
(ι) $\{1,2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$, ψευδής.
(ια) $\{\{2\}\} \in \{1,\{2\}\}$, ψευδής.
(ιβ) $\{\{2\}\} \subseteq \{1,\{2\}\}$, αληθής.
(ιγ) $\emptyset \subseteq \emptyset$, αληθής.
(ιδ) $\emptyset \in \emptyset$, ψευδής.
(ιε) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, αληθής.
(ιστ) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, αληθής.

4. (α) $\{1,2,4\} \cup \{2,3,6\} = \{1,2,3,4,6\}$.
(β) $\{1,2,4\} \cap \{2,3,6\} = \{2\}$.
(γ) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 3\}$.
(δ) $C \cap D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$.

5. (α) $\{1,2,\{4\}\} \cup \{2,3,6\} = \{1,2,3,6,\{4\}\}$.
(β) $\{1,\{2\},4\} \cap \{2,3,6\} = \emptyset$.
(γ) $A \cup B = A$.
(δ) $C \cap D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -3\} \cup \{3\}$.
(ε) $A \cup \{A\} = \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$.
(στ) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
(ζ) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

6. $A = B$, $C = D$.

9. $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{2,3\}$, $B \setminus A = \{5,6,7\}$ και $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2,3,5,6,7\}$.

10. $V \setminus W = \{a, X\}$ και $W \setminus V = \{1, \emptyset, \{\alpha\}\}$.

11. $A \setminus \{a\} = \{b, \{a,c\}, \emptyset\}$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \setminus \{a,c\} = \{b, \{a,c\}, \emptyset\}$, $A \setminus \{\{a,c\}\} = \{a, b, \emptyset\}$, $A \triangle \{a,c\} = \{b, \{a,c\}, c, \emptyset\}$, $\{a\} \setminus A = \emptyset$.

12. (α) $(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F) = (D \cap F^c) \cup (D \cap F) = D \cap (F^c \cup F) = D$.
(β) $((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c = (X^c \cup Y)^c \cup (X^c \cup Y^c)^c = (X \cap Y^c) \cup (X \cap Y) = X \cap (Y^c \cup Y) = X$.

13. (α) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C^c = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A \setminus (B \cup C)$.
(β) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \cup (B \setminus C)) = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$. Η τελευταία ισότητα από το (α) ενώ χρησιμοποιήσαμε και την $C \cup (B \setminus C) = B \cup C$.

14. (α) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$.
(β) $A \triangle B = B \triangle A$: άμεσο, $A \triangle A = \emptyset$ και $A \triangle \emptyset = A$.

15. Δείξτε ότι και τα δύο μέλη είναι ίσα με

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C).$$

16. (α) $(A \triangle B) \triangle A = (B \triangle A) \triangle A = B \triangle (A \triangle A) = B \triangle \emptyset = B$.
(β) $(A \cap C) \triangle (B \cap C) = [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \setminus [(A \cap C) \cap (B \cap C)] = [(A \cup B) \cap C] \setminus [(A \cap B) \cap C] = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cap C = (A \triangle B) \cap C$.

17. (α) Αν τα σύνολα A, B και C ικανοποιούν την $A \triangle B = A \triangle C$, τότε $(A \triangle B) \triangle A = (A \triangle C) \triangle A$, δηλαδή (από την προηγούμενη άσκηση), $B = C$.

(β) Αν A και B είναι δύο σύνολα, $A \triangle (A \triangle B) = (A \triangle B) \triangle A = B$, δηλαδή υπάρχει σύνολο X, το $X = A \triangle B$, ώστε $A \triangle X = B$. Για τη μοναδικότητα, αν $A \triangle X = B$ τότε $X = (A \triangle X) \triangle A = B \triangle A$, δηλαδή $X = B \triangle A = A \triangle B$.

18. Αν $X = \{\alpha, \gamma, \omega\}$ τότε $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \{\omega\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \omega\}, \{\gamma, \omega\}, X\}$.

Αν $A = \{a, \{a, b\}\}$ τότε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a, b\}\}, A\}$.

19. $\bigcup S = \mathbb{Z}$ και $\bigcap S = \{0\}$.

20. Αν $a \in \bigcup X$ τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $a \in X$. Αφού $X = X_1 \cup X_2$, έχουμε είτε $x \in X_1$ ή $x \in X_2$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $x \in X_1$ και $a \in x$, άρα $a \in \bigcup X_1$. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $x \in X_2$ και $a \in x$, άρα $a \in \bigcup X_2$. Σε κάθε περίπτωση, $a \in (\bigcup X_1) \cup (\bigcup X_2)$. Συνεπώς,

$$\bigcup X \subseteq \left(\bigcup X_1\right) \cup \left(\bigcup X_2\right).$$

Ο άλλος εγκλεισμός αποδεικνύεται ανάλογα.

21. (α) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, αληθής.
(β) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$, αληθής.
(γ) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$, αληθής.
(δ) $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B)$, αληθής.
(ε) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, αληθής.
(στ) $\{\{a\}, b\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, ψευδής.
(ζ) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$, αληθής.

22. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

23. (α) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$: Αν $X \in \mathcal{P}(A)$ τότε $X \subseteq A$, άρα $X \subseteq A \cup B$, άρα $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Όμοια, $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Συνεπώς, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

(β) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$: Αν $A \subseteq B$ τότε $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, άρα

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B),$$

με την τελευταία ισότητα διότι $A \cup B = B$. Όμοια, αν $B \subseteq A$ τότε $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$, άρα

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup B),$$

με την τελευταία ισότητα διότι $A \cup B = A$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \setminus B \neq \emptyset$ και $B \setminus A \neq \emptyset$ και δείχνουμε ότι $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Υπάρχουν $x \in A \setminus B$ και $y \in B \setminus A$. Τότε, $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, άρα $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Όμως, το $\{x, y\}$ δεν είναι υποσύνολο του A ούτε του B, άρα $\{x, y\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(γ) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$: Έστω $X \in \mathcal{P}(A \setminus B)$. Τότε, $X \subseteq A \setminus B$. Άρα, $X \subseteq A$ και το X δεν περιέχει στοιχεία του B.

Αν το X είναι μη κενό, τότε δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του B, και αφού $X \subseteq A$ θα έχουμε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Σε κάθε περίπτωση, $X \in (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

24. Αφού $A \subseteq X$, έχουμε $A \in \mathcal{P}(X) \subseteq X \cup \mathcal{P}(X) = Z$ άρα $A \in Z$. Επίσης, $X \subseteq Z$ και $A \subseteq X$, άρα $A \subseteq Z$.

25. Δείχνουμε με επαγωγή την πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\emptyset$ και το S. Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1}. Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T, δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k. Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

26. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ για κάποιο σύνολο X και κταλήγουμε σε αντίφαση: Ορίζουμε $A = \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \notin Y\}$. Τότε, $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, άρα $A \subseteq X$, άρα $A \in \mathcal{P}(X)$.

1. Αν $A \in A$ τότε $A \notin A$ από τον ορισμό του A, άτοπο.

2. Αν $A \notin A$ τότε δεν ισχύει $A \notin A$, πάλι από τον ορισμό του A, άτοπο.