Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Σχέσεις – Υποδείξεις

1. Από τον ορισμό θα έπρεπε να έπεται το εξής: αν $(x,y)=(a,b)$ τότε $x=a$ και $y=b$. Από τον προτεινόμενο ορισμό δεν εξασφαλίζεται κάτι τέτοιο. Για παράδειγμα: αν $x=\{1\}$, $y=2$, τότε $(x,y)=\{\{1\},\{2\}\}$. Όμως, αν $a=\{2\}$, $b=1$, τότε $(a,b)=\{\{2\},\{1\}\}=\{\{1\},\{2\}\}$. Θα έπρεπε λοιπόν να ισχύει $x=\{1\}=\{2\}=a$ και $y=2=1=b$, δηλαδή $2=1$.

2. Δείχνουμε μία από αυτές ενδεικτικά. Για την $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$: θεωρούμε πρώτα $(x,y)\in(A\cup B)\times C$. Τότε, $x\in A\cup B$ και $y\in C$. Αυτό σημαίνει ότι είτε «$x\in A$ και $y\in C$» ή «$x\in B$ και $y\in C$». Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $(x,y)\in A\times C$ ενώ στη δεύτερη έχουμε $(x,y)\in B\times C$. Σε κάθε περίπτωση, $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $(A\cup B)\times C\subseteq(A\times C)\cup(B\times C)$. Αντίστροφα, έστω $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. Αν $(x,y)\in A\times C$, τότε $x\in A\subseteq A\cup B$ και $y\in C$, συνεπώς $(x,y)\in(A\cup B)\times C$. Αν $(x,y)\in B\times C$, τότε $x\in B\subseteq A\cup B$ και $y\in C$, συνεπώς $(x,y)\in(A\cup B)\times C$. Σε κάθε περίπτωση, $(x,y)\in(A\cup B)\times C$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C$. Έπεται ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα.

3. (α) Έστω $(x,y)\in(A\setminus B)\times C$. Τότε $x\in A\setminus B$ και $y\in C$. Δηλαδή, $x\in A$, $x\notin B$ και $y\in C$. Από τις $x\in A$, $y\in C$ βλέπουμε ότι $(x,y)\in A\times C$ ενώ από την $x\notin B$ βλέπουμε ότι $(x,y)\notin B\times C$. Συνεπώς, $(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $(A\setminus B)\times C\subseteq(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Αντίστροφα, έστω $(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)$. Τότε, $(x,y)\in A\times C$ και $(x,y)\notin B\times C$. Αυτό σημαίνει ότι $x\in A$, $y\in C$ και «είτε $x\notin B$ ή $y\notin C$». Αφού όμως $y\in C$, αναγκαστικά $x\notin B$. Άρα, $x\in A\setminus B$ και $y\in C$, δηλαδή $(x,y)\in(A\setminus B)\times C$. Έτσι, έχουμε δείξει ότι $(A\times C)\setminus(B\times C)\subseteq(A\setminus B)\times C$, και έπεται η ισότητα:

$$(A\times C)\setminus(B\times C)=(A\setminus B)\times C.$$

(β) Για τη δεύτερη ισότητα, πρώτα γράφουμε

$$(A\times C)\triangle(B\times C)=[(A\times C)\setminus(B\times C)]\cup[(B\times C)\setminus(A\times C)]$$

και, χρησιμοποιώντας το (α) βλέπουμε ότι αυτό το σύνολο είναι ίσο με το

$$[(A\setminus B)\times C]\cup[(B\setminus A)\times C].$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα της Άσκησης 2, βλέπουμε ότι αυτό το σύνολο ισούται με το

$$[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\times C=(A\triangle B)\times C.$$

4. Μονοσύνολα: $A=\{a\}$, $B=\{2\}$, $C=\{c\}$, $D=\{4\}$. Το $(A\times B)\cup(C\times D)$ έχει 2 στοιχεία ενώ το $(A\cup C)\times(B\cup D)$ τέσσερα.

5. Παρατηρήστε πρώτα ότι $\boldsymbol{\sigma}\subset\boldsymbol{\rho}$ διότι: αν $a^2\mid b$ τότε και $a\mid b$. Συνεπώς,

- $(a,b) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ αν και μόνο αν $a \mid b$.
- $(a,b) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ αν και μόνο αν $a^2 \mid b$.
- $(a,b) \in \boldsymbol{\rho} \setminus \boldsymbol{\sigma}$ αν και μόνο αν $a \mid b$ αλλά δεν ισχύει $a^2 \mid b$.
- $\boldsymbol{\sigma} \setminus \boldsymbol{\rho} = \emptyset$.

6. Γράφουμε μόνο τις απαντήσεις (και, για ορισμένες από αυτές, σύντομη επεξήγηση):

1. $x < y$. Δεν είναι ανακλαστική ούτε συμμετρική, είναι μεταβατική.
2. $x \geq y$. Δεν είναι συμμετρική, είναι ανακλαστική και μεταβατική.
3. $|x-y| \leq 1$. Είναι ανακλαστική και συμμετρική, δεν είναι μεταβατική: $|2-1| \leq 1$ και $|3-2| \leq 1$ αλλά $|3-1| > 1$.
4. $|x-y| \leq 0$. Είναι η σχέση ισότητας: $|x-y| \leq 0$ αν και μόνο αν $x = y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
5. $x - y \in \mathbb{Q}$. Είναι σχέση ισοδυναμίας: ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
6. $x - y \notin \mathbb{Q}$. Είναι ανακλαστική και συμμετρική, δεν είναι όμως μεταβατική: $2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Q}$, αλλά $2 - 1 \in \mathbb{Q}$.

7. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $(x,x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x,x) \in \boldsymbol{\sigma}$. Συνεπώς, $(x,x) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma} \subseteq \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Άρα, οι σχέσεις $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστικές.

8. Έστω $(x,y) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Τότε, είτε $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$ οπότε $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}$ ή $(x,y) \in \boldsymbol{\sigma}$ οπότε $(y,x) \in \boldsymbol{\sigma}$ (χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι οι δύο σχέσεις είναι συμμετρικές). Σε κάθε περίπτωση, $(y,x) \in \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$. Άρα, η $\boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική.

Εντελώς ανάλογα, έστω $(x,y) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$. Τότε, $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$ οπότε $(y,x) \in \boldsymbol{\rho}$ και $(x,y) \in \boldsymbol{\sigma}$ οπότε $(y,x) \in \boldsymbol{\sigma}$ (χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι οι δύο σχέσεις είναι συμμετρικές). Άρα, $(y,x) \in \boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$. Δηλαδή, η $\boldsymbol{\rho} \cap \boldsymbol{\sigma}$ είναι κι αυτή συμμετρική.

9. Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας:

1. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστική: $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(m,n)$ διότι $m + n = m + n$.
2. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική: αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$, τότε $m+s = r+n$, άρα $r+n = m+s$ κι αυτό μας δίνει $(r,s)\boldsymbol{\sigma}(m,n)$.
3. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεταβατική: αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$ και $(r,s)\boldsymbol{\sigma}(u,v)$, τότε $m+s = r+n$ και $r+v = u+s$, οπότε $m+s+r+v = r+n+u+s$, οπότε $m+v = n+u = u+n$, δηλαδή $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(u,v)$.

Συνεπώς, η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία του $\mathbb{Z}$. Για παράδειγμα,

$$E_{-2} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{N}\} = \{(1,3), (2,4), (3,5), \ldots\}$$

και

$$E_0 = \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), \ldots\}.$$

10. Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας:

1. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ανακλαστική: $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(m,n)$ διότι $m \cdot n = m \cdot n$.
2. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική: αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$, τότε $m \cdot s = r \cdot n$, άρα $r \cdot n = m \cdot s$ κι αυτό μας δίνει $(r,s)\boldsymbol{\sigma}(m,n)$.
3. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεταβατική: αν $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(r,s)$ και $(r,s)\boldsymbol{\sigma}(u,v)$, τότε $m \cdot s = r \cdot n$ και $r \cdot v = u \cdot s$, οπότε $m \cdot s \cdot r \cdot v = r \cdot n \cdot u \cdot s$, οπότε $m \cdot v = n \cdot u = u \cdot n$ (η διαίρεση με s επιτρέπεται και (i) αν $r \neq 0$ διαιρούμε και με r, ενώ (ii) αν $r = 0$ τότε $m = u = 0$ οπότε πάλι $m \cdot v = u \cdot n$). Δηλαδή, $(m,n)\boldsymbol{\sigma}(u,v)$.

Συνεπώς, η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης αντιστοιχούν με φυσιολογικό τρόπο στα στοιχεία του $\mathbb{Q}$. Για παράδειγμα,

$$E_{-2} = \{(-2n,n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{(4,-2),(2,-1),(-2,1),(-4,2)\ldots\},$$

$$E_{2/3} = \{(2n,3n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{(-4,-6),(-2,-3),(2,3),(4,6)\ldots\}$$

και

$$E_0 = \{(0,n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{(0,-1),(0,1),(0,2),\ldots\}.$$

11. Το επιχείρημα δεν είναι σωστό. Ξεκινάμε με τυχόν a και θέλουμε να δείξουμε ότι $a \sim a$. Το επιχείρημα προϋποθέτει ότι υπάρχει b ώστε $a \sim b$, μπορεί όμως το a να μην «σχετίζεται» με κανένα στοιχείο του συνόλου.

Για παράδειγμα, η σχέση $R = \{(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$ στο σύνολο $A = \{a,b,c\}$ είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά δεν είναι ανακλαστική αφού $(a,a) \notin R$.

12. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\sim$ είναι ανακλαστική. Έστω $x \in X$. Από την ιδιότητα (β) της $\sim$, υπάρχει $y \in X$ ώστε $x \sim y$. Η $\sim$ είναι συμμετρική, άρα $y \sim x$. Η $\sim$ είναι μεταβατική, οπότε από τις $x \sim y$ και $y \sim x$ έπεται ότι $x \sim x$.

13. Έχουμε $(x,y) \in \equiv_4 \cap \equiv_6$ αν και μόνο αν ο $x - y$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των 4 και 6. Δηλαδή, αν και μόνο αν ο $x - y$ είναι πολλαπλάσιο του 12. Άρα, $\equiv_4 \cap \equiv_6 = \equiv_{12}$.

14. Υπάρχουν τόσες διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο $A = \{1,2,3,4\}$ όσες είναι και οι διαμερίσεις του A. Υπάρχουν:

1. Μία διαμέριση σε τέσσερα μονοσύνολα.
2. Τρεις διαμερίσεις σε δύο δισύνολα.
3. Τέσσερις διαμερίσεις σε μονοσύνολο και τρισύνολο.
4. Έξι διαμερίσεις σε ένα δισύνολο και δύο μονοσύνολα.
5. Μία διαμέριση που αποτελείται μόνο από το A.

Συνολικά, δεκαπέντε διαφορετικές διαμερίσεις.

15. Έστω $E_x^1 \in \Delta_1$ η κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ ως προς την $\boldsymbol{\rho_1}$. Αν $y \in E_x^1$ τότε $(y,x) \in \boldsymbol{\rho_1} \subseteq \boldsymbol{\rho_2}$, άρα $y \in E_x^2$, όπου E_x^2 η κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ ως προς την $\boldsymbol{\rho_2}$. Δηλαδή, κάθε στοιχείο της Δ_1 περιέχεται σε κάποιο στοιχείο της Δ_2.

16. Έστω $\boldsymbol{\rho}$ μια ασθενής διάταξη στο A. Από τον ορισμό της ασθενούς διάταξης, για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $x\boldsymbol{\rho}y$ ή $y\boldsymbol{\rho}x$ ή και τα δύο. Παίρνουμε τυχόν $x \in A$. Θέτοντας $y = x$ βλέπουμε ότι, αναγκαστικά, $x\boldsymbol{\rho}x$. Συνεπώς, η $\boldsymbol{\rho}$ είναι ανακλαστική σχέση.

17. Ελέγχουμε τις τρεις ιδιότητες της ασθενούς διάταξης:

1. Έστω $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$ και $y\boldsymbol{\rho}^{-1}z$. Τότε, $z\boldsymbol{\rho}y$ και $y\boldsymbol{\rho}x$, άρα $z\boldsymbol{\rho}x$, απ΄ όπου παίρνουμε $x\boldsymbol{\rho}^{-1}z$.
2. Για κάθε δύο στοιχεία x, y του X ισχύει μία από τις $y\boldsymbol{\rho}x$ ή $x\boldsymbol{\rho}y$ ή και οι δύο. Οπότε ισχύει μία από τις $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$ ή $y\boldsymbol{\rho}^{-1}x$ ή και οι δύο.
3. Αν $x \neq y$ και ισχύει $x\boldsymbol{\rho}^{-1}y$ τότε ισχύει $y\boldsymbol{\rho}x$, οπότε δεν ισχύει $x\boldsymbol{\rho}y$. Δηλαδή, δεν ισχύει $y\boldsymbol{\rho}^{-1}x$.

18. Ναι, είναι: παρατηρήστε ότι τα στοιχεία του A συγκρίνονται ανά δύο (περιέχονται το ένα στο άλλο). Αυτό δείχνει τη δεύτερη ιδιότητα της ασθενούς διάταξης. Οι άλλες δύο ιδιότητες ελέγχονται εύκολα από τις γνωστές ιδιότητες του «περιέχεσθαι».

19. Η $\boldsymbol{\rho}$ είναι μερική διάταξη. Αν $a \mid b$ και $b \mid c$ τότε $a \mid c$. Επίσης, αν $a \mid b$ και $b \mid a$ τότε $a = b$. Υπάρχουν όμως ζεύγη φυσικών, για παράδειγμα ο 3 και ο 5, που δεν συγκρίνονται. Άρα, η $\boldsymbol{\rho}$ δεν είναι ασθενής διάταξη (ούτε γνήσια διάταξη) στο $\mathbb{N}$.

20. Η σχέση $\boldsymbol{\rho}$ (του διαιρέτη) στο σύνολο $X = \{1, 2, 6, 30, 210\}$ είναι γνήσια διάταξη. Ο λόγος είναι ότι, τώρα, τα στοιχεία του X συγκρίνονται ανά δύο: αυτό προκύπτει εύκολα, αν παρατηρήσετε ότι $1 \mid 2$, $2 \mid 6$, $6 \mid 30$ και $30 \mid 210$.

22. Παρόμοια με την επόμενη.

23. Υποθέτουμε πρώτα ότι $(a, b)\ L\ (c, d)$ και $(c, d)\ L\ (x, y)$. Τότε, ισχύει ένα από τα εξής:

- $a\ S\ c$ και $c\ S\ x$. Τότε, $a\ S\ x$.
- $a\ S\ c$, $c = x$ και $d\ T\ y$. Τότε, $a\ S\ x$.
- $a = c$, $b\ T\ d$ και $c\ S\ x$. Τότε, $a\ S\ x$.
- $a = c = x$, $b\ T\ d$ και $d\ T\ y$. Τότε, $a = x$ και $b\ T\ y$.

Σε κάθε περίπτωση, $(a, b)\ L\ (x, y)$.

Ελέγξτε ότι ισχύει η ιδιότητα της τριχοτομίας, οπότε η L είναι γνήσια διάταξη.