Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Συναρτήσεις – Υποδείξεις

7. (α) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι $1-1$ αλλά όχι επί: $f(x) = 2x$.

(β) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι επί αλλά όχι $1-1$: $f(x) = 0$ αν ο x είναι περιττός και $f(x) = x/2$ αν ο x είναι άρτιος.

(γ) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι $1-1$ και επί: $f(x) = x$.

(δ) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που δεν είναι ούτε $1-1$ ούτε επί: $f(x) = 0$.

8. (α) Η f δεν είναι ένα προς ένα: αν θεωρήσουμε δύο δίσκους x και y στο επίπεδο με διαφορετικά κέντρα αλλά την ίδια ακτίνα r, τότε $x \neq y$ αλλά $f(x) = f(y) = \pi r^2$.

(β) Η f δεν είναι επί: ένας αρνητικός $a \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να ισούται με το εμβαδόν κάποιου $x \in S$.

9. Η g είναι ένα προς ένα και επί του $(0, +\infty)$. Για κάθε $a > 0$ υπάρχει μοναδικός κύκλος στο επίπεδο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και περίμετρο a: ο κύκλος ακτίνας $a/(2\pi)$.

11. Το πλήθος των συναρτήσεων από το A στο B είναι n^m. Για καθένα από τα m στοιχεία του A έχουμε n επιλογές για την εικόνα $f(a)$: μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα n στοιχεία του B.

12. Ελέγξτε πρώτα ότι το σύνολο $\emptyset$ είναι συνάρτηση από το $\emptyset$ σε κάθε σύνολο C: πράγματι, η πρόταση «για κάθε $x \in \emptyset$ υπάρχει $y \in C$ ώστε $(x, y) \in \emptyset$ είναι αληθής» αφού δεν υπάρχουν $x \in \emptyset$. Τώρα,

1. Αν $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση από το A στο B: η $\emptyset \subseteq \emptyset = A \times B$. Είναι συνάρτηση και κάθε συνάρτηση $f \subseteq \emptyset = A \times B$ είναι αναγκαστικά το κενό σύνολο.
2. Αν $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$, δεν υπάρχει συνάρτηση $f \subseteq B \times A$. Αυτό διότι, υπάρχει $b \in B$ και γι΄ αυτό το b θα υπήρχε $a \in A = \emptyset$ ώστε $(b, a) \in f$.
3. Υπάρχει συνάρτηση από το $\emptyset$ στο $\emptyset$: το $\emptyset$.

13. Έχουμε:

1. $(f \circ f)(n) = f(n+1) = n+2$.
2. $(f \circ g)(n) = f(2n) = 2n+1$.
3. $(g \circ f)(n) = g(n+1) = 2n+2$, $(g \circ h)(n) = g(0) = 0$ αν ο n είναι άρτιος και $(g \circ h)(n) = g(1) = 2$ αν ο n είναι περιττός.
4. $(h \circ g)(n) = h(2n) = 0$.
5. $[(f \circ g) \circ h](n) = [f \circ (g \circ h)](n) = f(0) = 1$ αν ο n είναι άρτιος και $[(f \circ g) \circ h](n) = [f \circ (g \circ h)](n) = f(2) = 3$ αν ο n είναι περιττός.

14. Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$.

(α) Υποθέτουμε ότι η $g \circ f : X \to Z$ είναι επί. Έστω $z \in Z$. Υπάρχει $x \in X$ ώστε $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Αν θέσουμε $y = f(x) \in Y$ τότε $g(y) = z$. Αφού το $z \in Z$ ήταν τυχόν, η g είναι επί.

(β) Υποθέτουμε ότι η $g \circ f$ είναι $1-1$. Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε,

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

Η $g \circ f$ είναι 1-1, άρα $x_1 = x_2$. Έπεται ότι η f είναι $1-1$.

Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x$, $f(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$), η g είναι επί αλλά $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η $g \circ f$ δεν είναι επί. Αν πάρουμε $f(x) = x$ και $g(x) = 0$ τότε η f είναι 1-1 αλλά $g \circ f = g$, δηλαδή η $g \circ f$ δεν είναι 1-1.

15. Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$ δύο $1-1$ και επί συναρτήσεις.

Η $g \circ f : A \to C$ είναι $1-1$: έστω $a_1, a_2 \in A$ με $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Από την $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ έπεται ότι $f(a_1) = f(a_2)$ διότι η g είναι 1-1. Από την $f(a_1) = f(a_2)$ έπεται ότι $a_1 = a_2$ διότι η f είναι 1-1.

Η $g \circ f$ είναι επί: έστω $c \in C$. Αφού η g είναι επί, υπάρχει $b \in B$ ώστε $g(b) = c$. Αφού η f είναι επί, υπάρχει $a \in A$ ώστε $f(a) = b$. Τότε,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

16. (α) Αν υπήρχε $b \in f(\emptyset)$ τότε θα υπήρχε $a \in \emptyset$ ώστε $f(a) = b$, άτοπο. Αν υπήρχε $a \in f^{-1}(\emptyset)$ τότε θα είχαμε $f(a) \in \emptyset$, άτοπο. Για την τρίτη ισότητα, προφανώς ισχύει $f^{-1}(B) \subseteq A$ και, αντίστροφα, για κάθε $a \in A$ έχουμε $f(a) \in B$, συνεπώς $a \in f^{-1}(B)$.

(β) Έστω $a \in U \cap V$. Αφού $a \in U$ έχουμε $f(a) \in f(U)$ και αφού $a \in V$ έχουμε $f(a) \in f(V)$. Δηλαδή, για κάθε $a \in U \cap V$ έχουμε $f(a) \in f(U) \cap f(V)$. Έπεται ότι

$$f(U \cap V) = \{f(a) : a \in U \cap V\} \subseteq f(U) \cap f(V).$$

(γ) Αν η f είναι $1-1$, δείχνουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό $f(U \cap V) \supseteq f(U) \cap f(V)$. Έστω $y \in f(U) \cap f(V)$. Υπάρχουν $x_1 \in U$ και $x_2 \in V$ ώστε $y = f(x_1) = f(x_2)$. Αφού η f είναι 1-1, ισχύει $x_1 = x_2 = x \in U \cap V$. Τότε, $y = f(x) \in f(U \cap V)$.

(δ) Ο εγκλεισμός $f^{-1}(X \cup Y) \supseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ προκύπτει από τους $f^{-1}(X \cup Y) \supseteq f^{-1}(X)$ και $f^{-1}(X \cup Y) \supseteq f^{-1}(Y)$. Αυτοί πάλι ελέγχονται εύκολα: για παράδειγμα, αν $a \in f^{-1}(X)$ τότε $f(a) \in X$ άρα $f(a) \in X \cup Y$, οπότε $a \in f^{-1}(X \cup Y)$.

Αντίστροφα, έστω $a \in f^{-1}(X \cup Y)$. Τότε, $f(a) \in X \cup Y$, άρα είτε $f(a) \in X$ ή $f(a) \in Y$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $a \in f^{-1}(X)$ ενώ στην δεύτερη έχουμε $a \in f^{-1}(Y)$. Σε κάθε περίπτωση, $a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

(ε) Ο εγκλεισμός $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ προκύπτει από τους $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X)$ και $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(Y)$. Αυτοί πάλι ελέγχονται εύκολα: για παράδειγμα, αν $a \in f^{-1}(X \cap Y)$ τότε $f(a) \in X \cap Y$ άρα $f(a) \in X$, οπότε $a \in f^{-1}(X)$.

Αντίστροφα, έστω $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Τότε, $f(a) \in X$ και $f(a) \in Y$. Έπεται ότι $f(a) \in X \cap Y$, άρα $a \in f^{-1}(X \cap Y)$.

(στ) Έχουμε $a \in f^{-1}(B \setminus X)$ αν και μόνο αν $f(a) \in B \setminus X$ αν και μόνο αν $f(a) \notin X$ αν και μόνο αν $a \notin f^{-1}(X)$ αν και μόνο αν $a \in A \setminus f^{-1}(X)$.

17. (α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x + 2$. Η f είναι 1-1 και επί. Λύνοντας την $y = 4x + 2$ ως προς x βλέπουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $u(y) = (y - 2)/4$.

(β) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = x^2$. Η g δεν είναι 1-1 αλλά είναι επί. Ένα δεξιό αντίστροφο είναι η $v(y) = \sqrt{y}$, ένα άλλο η $w(y) = -\sqrt{y}$. Η g δεν έχει αριστερό αντίστροφο.

18. Είναι: $f([-1, 1]) = [-2, 6]$, $f^{-1}([0, 2]) = [-1/2, 0]$, $g([-3, -2]) = [0, 9]$ και $g^{-1}([2, 4]) = [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$.

19. Είναι το σύνολο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ και } y \neq 0\}$.

20. (α) $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\qquad S_a = [0, a + 1]$. Έχουμε

$$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = [0, 2] \cup [0, 3] \cup \cdots \cup [0, n + 1] = [0, n + 1]$$

και

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = [0, 2] \cap [0, 3] \cap \cdots \cap [0, n + 1] = [0, 2].$$

(β) $A = \mathbb{N}$, $\qquad S_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1/n\}$. Έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = S_1 = (0, 1)$$

και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $x \in S_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $x > 0$ και $x < 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο από την Αρχιμήδεια ιδιότητα (για κάθε $x > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $1/m < x$ και, τότε, $x \notin S_m$).

21. (β) Είναι: $B = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, $f^{-1}([-1, 4]) = [-3, 1]$, $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$, $f^{-1}([-2, 0)) = \emptyset$.

(γ) Ένα δεξιό αντίστροφο της $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ είναι η $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ με $g(y) = \sqrt{y} - 1$. Άλλο δεξιό αντίστροφο της $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ είναι η $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ με $h(y) = -\sqrt{y} - 1$.

(δ) Θέτουμε $A_1 = (-\infty, -1]$ και $A_2 = [1, \infty)$ του $\mathbb{R}$. Τότε, $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ είναι ένα προς ένα. Αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_1}$ είναι η h και αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_2}$ είναι η g.

23. (α) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε $x \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, ειδικότερα, $x \in A_n$ για κάθε $n \geq k$. Άρα,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. Για κάθε $n < k$ έχουμε $x \in A_k \subseteq A_n$ (διότι η (A_n) είναι φθίνουσα) άρα $x \in A_n$. Συνεπώς, $x \in A_n$ για κάθε $n \geq k$ και κάθε $n < k$. Δηλαδή, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Έπεται ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

(β) Από τις $A_n \subseteq A_n \cup B_n$ και $B_n \subseteq A_n \cup B_n$ βλέπουμε εύκολα ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) \ \text{ και } \ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n).$$

Άρα,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) \supseteq \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ ώστε $x \notin (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \bigcup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$. Τότε, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Συνεπώς, υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin A_n$ και $x \notin B_m$.

Αν $n \geq m$ παίρνουμε $x \notin B_m \Rightarrow x \notin B_n$ και $x \notin A_n$, άρα $x \notin A_n \cup B_n$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$.

Αν $m \geq n$ παίρνουμε $x \notin A_n \Rightarrow x \notin A_m$ και $x \notin B_m$, άρα $x \notin A_m \cup B_m$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$.

Αυτό δείχνει ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) \subseteq \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

24. (α) Έστω $y \in f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)$. Υπάρχει $x \in \bigcup_{t \in T}$ ώστε $y = f(x)$. Αφού $x \in \bigcup_{t \in T} A_t$, υπάρχει $t_0 \in T$ ώστε $x \in A_{t_0}$. Τότε, $y = f(x) \in f(A_{t_0}) \subseteq \bigcup_{t \in T} f(A_t)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) \subseteq \bigcup_{t \in T} f(A_t)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι $A_t \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$ για κάθε $t \in T$, συνεπώς $f(A_t) \subseteq f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)$ για κάθε $t \in T$. Συνεπώς, $\bigcup_{t \in T} f(A_t) \subseteq f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)$. Άρα,

$$f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t).$$

(β) Έχουμε $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_t$ για κάθε $t \in T$, συνεπώς $f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \subseteq f(A_t)$ για κάθε $t \in T$. Άρα,

$$f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \subseteq \bigcap_{t \in T} f(A_t).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι ένα προς ένα. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $y \in \bigcap_{t \in T} f(A_t)$. Για κάθε $t \in T$ υπάρχει $x_t \in A_t$ ώστε $f(x_t) = y$. Όμως η f

είναι ένα προς ένα, άρα $x_t = x_s = x$ για κάθε $t, s \in T$. Έπεται ότι $x \in \bigcap_{t\in T} A_t$ και $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)$. Άρα, $\bigcap_{t\in T} f(A_t) \subseteq f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)$. Αυτό αποδεικνύει την

$$f\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) = \bigcap_{t\in T} f(A_t).$$