Θεμέλια των Μαθηματικών (2008–09)
Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα – Υποδείξεις

1. Έστω A άπειρο σύνολο. Επιλέγουμε $a_1 \in A$. Το $A \setminus \{a_1\}$ είναι μη κενό (αλλιώς το A θα ήταν μονοσύνολο) οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Αν έχουμε επιλέξει $a_1, \ldots, a_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του A, το $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι μη κενό (αλλιώς το A θα ήταν πεπερασμένο σύνολο) οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Συνεχίζοντας έτσι, ορίζουμε 1-1 συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to A$ με $n \mapsto a_n$. Το σύνολο $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του A.

2. Έστω A άπειρο σύνολο. Από την Άσκηση 1, το A έχει άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο $B = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Γράφουμε $A = B \cup (A \setminus B)$ (το $A \setminus B$ μπορεί να είναι κενό). Το A είναι ισοπληθικό με το $C := (B \setminus \{x_1\}) \cup (A \setminus B)$ το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολό του: θεωρήστε την απεικόνιση $f : A \to C$ με $f(x_n) = x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ και $f(x) = x$ αν $x \in A \setminus B$. Δείξτε ότι η f είναι 1-1 και επί.

3. Κάθε άρτιος $x \in \mathbb{N}_0$ γράφεται στη μορφή $x = 2n = f(0, n)$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Αν ο $x \in \mathbb{N}_0$ είναι περιττός, τότε ο $x + 1$ είναι άρτιος και γνήσια θετικός. Αν m είναι ο μεγαλύτερος φυσικός ώστε $2^m \mid x + 1$, τότε $x = 2^m(2n + 1)$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}_0$ (ο $x/2^m$ είναι περιττός). Τότε, $x = f(m, n)$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι η f είναι επί.

Για το 1-1: έστω ότι $f(m, n) = f(t, s)$, δηλαδή $2^m(2n + 1) = 2^t(2s + 1)$. Αν υποθέσουμε ότι $m > t$, τότε $2^{m-t}(2n + 1) = 2s + 1$, το οποίο είναι άτοπο αφού στο αριστερό μέλος έχουμε άρτιο φυσικό και στο δεξιό περιττό. Όμοια αποκλείεται η $m < t$. Άρα, $m = t$ και έπεται ότι $n = s$. Εχουμε λοιπόν αποδείξει ότι η f είναι 1-1.

4. Όχι: αν ήταν, γράφοντας $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ θα είχαμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο ως ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων. Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{R}$ όχι.

5. Έστω T το σύνολο όλων των αριθμητικών προόδων με όρους φυσικούς αριθμούς. Μια αριθμητική πρόοδος προσδιορίζεται πλήρως από τον πρώτο της όρο t_1 και το βήμα της d. Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$ με $f(t, d) = (t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$, όπου $t_1 = t$, $t_2 = t + d$, $t_3 = t + 2d$, κλπ. Η f είναι επί, άρα $T \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, συνεπώς το T είναι αριθμήσιμο.

6. Η συνάρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ είναι 1-1 και επί. Η συνάρτηση $g : (0, 1) \to (-1, 1)$ με $g(t) = 2t - 1$ είναι 1-1 επί. Συνεπώς, η $u = f \circ g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$u(t) = f(2t - 1) = \frac{2t - 1}{1 - |2t - 1|}$$

είναι 1-1 και επί. Ελέγξτε ότι απεικονίζει ρητούς σε ρητούς σε ρητούς και άρρητους σε άρρητους.

7. (α) Έστω $\{D_a : a \in A\}$ ένα σύνολο από κυκλικούς δίσκους στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Για κάθε $a \in A$ μπορούμε να βρούμε $x_a, y_a \in \mathbb{Q}$ ώστε το σημείο (x_a, y_a) να βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου D_a. Αν $a \neq a_1$ τότε $(x_a, y_a) \neq (x_{a_1}, y_{a_1})$ (αλλιώς, οι κυκλικοί δίσκοι D_a και D_{a_1} θα τέμνονταν).

Αυτό δείχνει ότι η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ με $f(a) = (x_a, y_a)$ είναι 1-1. Συνεπώς, $A \leq_c \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα το A είναι αριθμήσιμο.

(β) Θεωρούμε το σύνολο $T = \{C_r : r > 0\}$ όπου $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$. Οι κύκλοι C_r δεν τέμνονται ανά δύο και $T =_c \mathbb{R}^+$. Το $\mathbb{R}^+$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα και το T.

(γ) Σε κάθε οχτάρι O αντιστοιχίζουμε μια τετράδα ρητών (x, y, z, w) ως εξής: το (x, y) βρίσκεται στο εσωτερικό της μιας «τρύπας» του O και το (z, w) στο εσωτερικό της άλλης. Αν δύο οχτάρια O_1 και O_2 δεν τέμνονται, τότε οι αντίστοιχες τετράδες ρητών είναι διαφορετικές (εξηγήστε γιατί με κατάλληλα σχήματα, διακρίνοντας περιπτώσεις). Άρα, αν έχουμε ένα σύνολο από οχτάρια που ανά δύο δεν τέμνονται, αυτό θα έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με τον πληθάριθμο του $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, δηλαδή θα είναι αριθμήσιμο.

8. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \{a \in A : a \geq 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$: πράγματι, αν $a \in A$ τότε $a > 0$, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a \geq 1/n$, το οποίο σημαίνει ότι $a \in A_n$.

Από την υπόθεση, αν $a_1, \ldots, a_m \in A_n$ τότε $m/n \leq a_1 + \cdots + a_m \leq M$, δηλαδή $m \leq Mn$. Συνεπώς, κάθε A_n έχει το πολύ Mn στοιχεία, δηλαδή είναι πεπερασμένο.

Το A είναι αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων, άρα είναι αριθμήσιμο.

9. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο A_N των αλγεβρικών αριθμών που ικανοποιούν εξίσωση της μορφής

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

με $a_k \in \mathbb{Z}$, $a_m \neq 0$ και $m + |a_0| + \cdots + |a_m| = N$. Σύμφωνα με την υπόδειξη, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το πλήθος των εξισώσεων με $m + |a_0| + \cdots + |a_m| = N$ είναι πεπερασμένο. Πράγματι, έχουμε $m \leq N$ και κάθε $|a_k| \leq N$, οπότε οι επιλογές μας για το πολυώνυμο είναι το πολύ $(2N+1)^{N+1}$ (κάθε a_k, $k = 0, \ldots, N$ παίρνει τιμή από $-N$ ως N). Επίσης, καθένα από αυτά τα πολυώνυμα έχει το πολύ N ρίζες. Συνεπώς, το A_N έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με $N(2N+1)^{N+1}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε αλγεβρικός αριθμός ανήκει σε κάποιο A_N. Συνεπώς, το σύνολο A των αλγεβρικών αριθμών γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Έπεται ότι το A είναι αριθμήσιμο.

10. Για κάθε $h : A \times B \to C$ θεωρούμε τη συνάρτηση $U(h) : A \to X$ που ορίζεται ως εξής:

$$[(U(h))(a)](b) = h(a, b).$$

Η $U(h)$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και, για κάθε $a \in A$, η $(U(h))(a)$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το B και τιμές στο C. Βεβαιωθείτε ότι η $U : Z \to Y$ ορίζεται καλά και δείξτε ότι είναι 1-1 και επί.

11. Υποθέτουμε ότι το B είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο (αν το B είναι πεπερασμένο, εργαζόμαστε ανάλογα: μπορείτε να υποθέσετε ότι είναι μονοσύνολο και μετά να εφαρμόσετε επαγωγή). Από την Άσκηση 1, το A γράφεται στη μορφή $A = C \cup D$, όπου D άπειρο αριθμήσιμο σύνολο. Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : D \cup B \to D$: αν $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, ορίζουμε $f(x_n) = x_{2n-1}$ και $f(y_n) = x_{2n}$.

Ορίζουμε τώρα $F : A \cup B \to A$ ως εξής: αν $x \in C$ θέτουμε $F(x) = x$ και αν $x \in D \cup B$ θέτουμε $F(x) = f(x)$. Η F είναι 1-1 και επί.

12. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $A_k = \{(k, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε A_k είναι άπειρο αριθμήσιμο και τα A_k είναι ξένα ανά δύο. Αν θέσουμε $B_k = f(A_k)$, τότε κάθε B_k είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ διότι η f είναι 1-1. Επίσης, τα σύνολα B_k είναι ξένα ανά δύο διότι τα A_k είναι ξένα ανά δύο και η f είναι 1-1.

13. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε ακολουθία $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών, διαφορετικών ανά δύο, ώστε $q_n(x) \to x$. Ορίζουμε $A_x = \{q_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε A_x είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Μένει να δείξουμε ότι αν $x < y$ στο $\mathbb{R}$ τότε το $A_x \cap A_y$ είναι πεπερασμένο. Θεωρούμε $t \in \mathbb{R}$ με $x < t < y$. Από τον ορισμό του ορίου, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, k > m$, $q_n(x) < t < q_k(y)$. Συνεπώς, αν $u \in A_x \cap A_y$ θα πρέπει να είναι $u = q_n(x) = q_k(y)$ με κάποιο από τα n, k μικρότερο ή ίσο του m. Δηλαδή,

$$A_x \cap A_y \subseteq \{q_1(x), \dots, q_m(x)\} \cup \{q_1(y), \dots, q_m(y)\}.$$

Έπεται ότι το $A_x \cap A_y$ είναι πεπερασμένο.

(β) Θεωρούμε 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ και θέτουμε $A'_x = f(A_x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου A_x, $x \in \mathbb{R}$ τα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ που ορίσαμε στο ερώτημα (α).

14. Για κάθε $a \in A$ θεωρούμε ρητό $q_a \in I_a$. Η απεικόνιση $f : A \to \mathbb{Q}$ με $f(a) = q_a$ είναι 1-1: αν $f(a) = f(b) = q$, τότε $q = q_a \in I_a$ και $q = q_b \in I_b$, άρα $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. Τότε, $a = b$ (αν $a \neq b$ τα I_a και I_b είναι ξένα). Έπεται ότι $A \leq_c \mathbb{Q}$, δηλαδή το A είναι αριθμήσιμο.

15. Έστω $\{x_a :\in A\}$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $a \in A$, τα πλευρικά όρια $\ell_a := \lim_{x\to x_a^-} f(x)$ και $r_a = \lim_{x\to x_a^+} f(x)$ υπάρχουν και $\ell_a < r_a$. Ορίζουμε $I_a = (\ell_a, r_a)$. Παρατηρούμε ότι αν $a, b \in A$ και $x_a < x_b$ τότε $r_a < \ell_b$. Δηλαδή, τα ανοικτά διαστήματα $I_a, a \in A$ είναι ξένα ανά δύο. Από την Άσκηση 14 συμπεραίνουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο.