Θεμέλια των Μαθηματικών – 12 Φεβρουαρίου 2009

Θέμα 1 (2 μον.) (α) Έστω A και B δύο σύνολα. Δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ αν και μόνο αν $A = B$.

(β) Έστω A, B και C τρία σύνολα. Δείξτε ότι: (i) $(A \triangle B) \triangle A = B$ και (ii) αν $A \triangle B = A \triangle C$ τότε $B = C$.

[*Υπενθύμιση*: η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων X και Y είναι το σύνολο $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$].

Θέμα 2 (2 μον.) (α) Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Πότε μια σχέση $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ λέγεται: (i) ανακλαστική; (ii) συμμετρική; (iii) μεταβατική; (iv) σχέση ισοδυναμίας;

(β) Ορίζουμε μια σχέση $\boldsymbol{\sigma}$ στο σύνολο $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y \neq 0\}$ ως εξής:

$$(m, n)\boldsymbol{\sigma}(r, s) \quad \text{αν} \quad m \cdot s = n \cdot r.$$

Εξετάστε αν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θέμα 3 (2 μον.) (α) Δώστε παράδειγμα (i) συνάρτησης $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ η οποία είναι 1-1 αλλά όχι επί και (ii) συνάρτησης $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ η οποία είναι επί αλλά όχι 1-1.

(β) Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις.

1. Δείξτε ότι $(g \circ f)(X) \subseteq g(Y)$.
2. Δείξτε ότι: αν η g είναι 1-1 και $(g \circ f)(X) = g(Y)$ τότε η f είναι επί.

Θέμα 4 (2 μον.) (α) Να εξετάσετε κατά πόσον η πρόταση $[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$ είναι ταυτολογία.

(β) Να χαρακτηρίσετε τον ακόλουθο ισχυρισμό ως σωστό ή λανθασμένο, δικαιολογώντας την απάντησή σας:

> «Αν οι προτάσεις $(q \wedge r) \to p$ και $q \to \neg r$ είναι αληθείς, τότε η πρόταση p είναι αληθής».

(γ) Δίνονται δύο προτάσεις p και q για τις οποίες γνωρίζουμε ότι: «δεν μπορεί να είναι η μία αληθής και η άλλη ψευδής». Τι μπορούμε να πούμε τότε για την συνεπαγωγή $p \to q$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 5 (2 μον.) (α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Πότε ισχύει ισότητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Έστω $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, και έστω $f : \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\} \to \mathbb{C}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}.$$

Να αποδείξετε ότι: $|f(z)| > 1$ αν και μόνο αν $|z| > 1$.

(γ) Αν $w^4 = 16(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, $\theta \in (0, \pi/2)$, να βρεθούν μέτρο και όρισμα για τους μιγαδικούς $z = w^2 + 4$.

Θέμα 6 (2 μον.) (α) Δείξτε ότι τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικά:

$$A = (0, 1), \qquad B = [0, 1), \qquad C = [0, +\infty).$$

(β) Δίνεται ένα σύνολο A. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : A \to \mathcal{P}(A)$ η οποία να είναι επί.

Καλή Επιτυχία!