Θεμέλια των Μαθηματικών – 21 Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1 (2 μον.) Αν A και B είναι δύο σύνολα, δείξτε ότι:

(i) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(ii) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.

(iii) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.

Θέμα 2 (1.5 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις στο $\mathbb{R}$ εξετάστε αν είναι: (i) ανακλαστική, (ii) συμμετρική, (iii) μεταβατική.

$$1. \quad |x-y| \leq 1 \qquad 2. \quad x-y \in \mathbb{Q} \qquad 3. \quad x-y \notin \mathbb{Q}.$$

Θέμα 3 (2.5 μον.) (α) Δίνεται μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (δηλαδή, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$). Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

(β) Δίνονται συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Δείξτε ότι:

(i) Αν η $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί.

(ii) Αν η $g \circ f$ είναι $1-1$, τότε η f είναι $1-1$.

Θέμα 4 (2 μον.) (α) Να εξετάσετε κατά πόσον οι ακόλουθες προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$(i) \quad [(p \vee (p \wedge q)] \longleftrightarrow p \qquad (ii) \quad [p \wedge (p \vee q)] \longleftrightarrow p.$$

(β) Δίνεται ο σύνδεσμος $\underline{\vee}$ με πίνακα αληθείας

p	q	$p \underline{\vee} q$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Να ελεγχθεί αν οι προτάσεις $[p\underline{\vee}(q \longrightarrow r)]$ και $[(p\underline{\vee}q) \longrightarrow (p\underline{\vee}r)]$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(γ) Να βρείτε μια πρόταση λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $[p \vee q]$, στην οποία να υπεισέρχονται μόνον οι σύνδεσμοι $\wedge$ και $\neg$.

Θέμα 5 (2 μον.) (α) Να βρείτε τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$|z| = 1 \text{ και } \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

(β) Έστω $w \in \mathbb{C}$ και $(w-2)^5 + w^5 = 0$. Να αποδειχθεί ότι ο w είναι της μορφής $w = 1 + \left(\frac{1}{\text{εφ}\,\theta_k}\right) i$, για κατάλληλες γωνίες θ_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, τις οποίες και θα προσδιορίσετε.

Θέμα 6 (2 μον.) (α) Έστω $\{I_a \mid a \in A\}$ οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

(β) Δείξτε ότι **δεν υπάρχει** συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί το εξής: «αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x \neq y$ τότε $|f(x) - f(y)| > 1$».

Καλή Επιτυχία!