

**Όμάδα ασκήσεων για το μάθημα «Αναδρομικές Συναρτήσεις» του
Μαθηματικού Τμήματος για τὸ Α.Ε. 2012–2013**

Σάββατο 26 Απριλίου 2013.

Λύστε ὅσες μπορείτε ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ ἀσκήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Δευτέρα 13/05/2013 καὶ τὴν Τρίτη 14/05/2013 μεταξύ 16:00 καὶ 18:00 ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ τὶς ἔχουν λύσει μὲ τυχαία ἐπιλογή. Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἠλεκτρονικά, σὲ μορφή .pdf, στὴν διεύθυνση sedthilk@math.uoa.gr πρὶν τὶς 23:59 τῆς Κυριακῆς 12/05/2013. Μπορεῖτε (καὶ ἐνθαρρύνεστε) νὰ σχηματίσετε ὁμάδες συνεργασίας τὸ πολὺ 3 ἀτόμων γιὰ τὴν ἐπίλυση καὶ παρουσίαση τῶν ἀσκήσεων. Ὁ βαθμὸς ποὺ θὰ πάρει κάθε φοιτητὴς/τρια τοῦ/τῆς ὁποῦ/ας ἡ ὁμάδα θὰ ἔχει παρουσιάσει ἀσκήση (ἡ ὁποία θὰ ἔχει λυθεῖ καὶ γραφεῖ σωστὰ) θὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς μεταξύ 0 καὶ 2 καὶ θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὴν παρουσίαση ποὺ θὰ κάνει ὁ/ἡ (τυχαία ἐπιλεγμένος/η) ἀντιπρόσωπὸς της. (Ἄν κάποιον μέλος μιᾶς ὁμάδας ἀπουσιάζει κατὰ τὴν παρουσίαση, ἀποκλείεται ἀπὸ τὴν διεκδίκηση τοῦ βαθμοῦ).

1. Ἐστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$. Ὀρίζουμε τὴν συνάρτηση $\text{rank}_A(x) = |\{y \mid y < x \wedge y \in A\}|$. Δείξτε ὅτι ἡ συνάρτηση rank_A εἶναι ὑπολογίσιμη ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ A εἶναι ἀναδρομικὴ γλῶσσα. (Ἐνα σύνολο ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ στὴν γλῶσσα ποὺ περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ A γραμμένους στο δυαδικὸ σύστημα).
2. Κάθε ἀπειρη ἀναγνωρίσιμη γλῶσσα μπορεῖ νὰ διαμεριστεῖ σὲ δύο ἀπειρες γλῶσσες L_1 καὶ L_2 τέτοιες ὥστε ἡ L_1 νὰ εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη καὶ ἡ L_2 νὰ εἶναι ἀναδρομικὴ.
3. Λέμε ὅτι μιὰ γλῶσσα C διαχωρίζει τὶς γλῶσσες A καὶ B ἂν $A \subseteq C$ καὶ $B \subseteq \overline{C}$.
Ἐστω A, B δύο γλῶσσες ὅπου $A \cap B = \emptyset$ καὶ τέτοιες ὥστε τὰ συμπληρώματά τους νὰ εἶναι ἀναγνωρίσιμα. Δείξτε ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἀναδρομικὴ γλῶσσα ποὺ νὰ διαχωρίζει τὶς A καὶ B .
4. Ἐστω L μιὰ ἀναγνωρίσιμη γλῶσσα ποὺ δὲν εἶναι ἀναδρομικὴ. Δείξτε ὅτι ἂν ἡ M εἶναι μιὰ Μηχανὴ Turing ποὺ ἀναγνωρίζει τὴν L τότε ἡ γλῶσσα $C = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ἡ } M \text{ μὲ εἴσοδο } w \text{ δὲν τερματίζει}\}$ εἶναι ἀπειρη.
5. Ἐστω A καὶ B γλῶσσες τέτοιες ὥστε ἡ A νὰ εἶναι ἀναδρομικὴ ἐνῶ ἡ B ὄχι. Δείξτε ὅτι ἂν $A \cap B = \emptyset$, τότε ἡ $A \cup B$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὴ.
6. Δείξτε ὅτι ἕνα μὴ κενὸ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{N}$ εἶναι ἀναδρομικὴ γλῶσσα (οἱ ἀριθμοὶ ἀντιστοιχοῦν σὲ δυαδικὲς λέξεις) ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι τὸ πεδίο τιμῶν μιᾶς πλήρους καὶ αὐξουσας ἀναδρομικῆς συνάρτησης (προσοχή! ὄχι ἀπαραίτητα γνήσια αὐξουσας).
7. Καλοῦμε μιὰ λέξη παλίνδρομο ἂν παραμένει ἡ ἴδια ὅταν γράφεται ἀνάποδα. Δείξτε ὅτι ἂν μιὰ γλῶσσα εἶναι ἀναγνωρίσιμη τότε καὶ τὸ σύνολο ὄλων τῶν παλίνδρομων ποὺ περιέχει εἶναι ἀναγνωρίσιμο.
8. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid \forall x \in \Sigma^* : M_1(x) \downarrow \vee M_2(x) \uparrow\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη.
9. Δείξτε ὅτι κάθε ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμο πρόβλημα ἀνάγεται (μὲ απεικονιστικὴ ἀναγωγή) στὸ
$$K = \{\langle M \rangle \mid M(\langle M \rangle) \downarrow\}.$$
10. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M \rangle \mid \exists x \in \Sigma^* : |x| = 2013 \wedge x \in L(M)\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη. Εἶναι ἡ $\overline{L}$ ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη;
11. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 2013\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη. Εἶναι ἡ $\overline{L}$ ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη;
12. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| < \aleph_0\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη. Εἶναι ἡ $\overline{L}$ ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη;
13. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \exists x \in \Sigma^* : \text{ἡ λέξη } x \text{ εἶναι ἀντιπαράδειγμα τῆς εἰκασίας τοῦ Goldbach γραμμένο σὲ δυαδικὴ μορφή}\}$ εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμη. Ἄν ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ L εἶναι ἀναδρομικὴ, θὰ σημάνει αὐτὸ ὅτι ἔχει ἀποδειχθεῖ ἡ εἰκασία τοῦ Goldbach;
14. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M \rangle \mid \text{ἡ } M \text{ ἀποδέχεται γιὰ κάθε εἴσοδο καὶ ἀφοῦ ἐκτελέσει ἄρτιο ἀριθμὸ βημάτων}\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὴ.
15. Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M_1, M_2, x \rangle \mid \text{οἱ } M_1 \text{ καὶ } M_2, \text{ κατὰ τὴν λειτουργία τους μὲ εἴσοδο τὴν } x \text{ γράφουν μετὰ ἀπὸ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ βημάτων τὸ ἴδιο σύμβολο στὴν ταινία τους}\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὴ.
16. Δείξτε ὅτι τὸ παρακάτω πρόβλημα εἶναι ἀποφάνσιμο:

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΜΝΗΜΗ

Εἴσοδος: Μηχανὴ Turing M μὲ αλφάβητο εἰσόδου τὸ Σ , συμβολοσειρὰ $w \in \Sigma^*$, καὶ μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος n .

Ἐρώτηση: Ἐπισκέπτεται ἡ κεφαλὴ τῆς M τὴν n -στὴ θέση τῆς ταινίας της κατὰ τὴν διάρκεια τῆς λειτουργίας της μὲ εἴσοδο w ;