

**Όμάδα ασκήσεων Νο. 2 για το μάθημα «Αναδρομικές Συναρτήσεις» του
Μαθηματικού Τμήματος για τὸ Α.Ε. 2009–2010**

Τετάρτη 13 Ιανουαρίου 2010.

Λύστε ὅσες μπορείτε ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ ἀσκήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Τρίτη 19/01/2010 ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ τὶς ἔχουν λύσει μὲ τυχαία ἐπιλογή. Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν εἴτε (κατὰ προτίμηση) ἠλεκτρονικὰ, σὲ μορφή .pdf, στὴν διεύθυνση sedthilk@math.uoa.gr ἢ ἔντυπα πρὶν τὸ μάθημα τῆς 19/01/2010. Μπορεῖτε (καὶ ἐνθαρρύνεστε) νὰ σχηματίσετε ὁμάδες συνεργασίας τὸ πολὺ 4 ἀτόμων γιὰ τὴν ἐπίλυση καὶ παρουσίαση τῶν ἀσκήσεων. Ὁ βαθμὸς ποὺ θὰ πάρει κάθε φοιτητὴς τοῦ ὁποῖου ἡ ὁμάδα θὰ ἔχει παρουσιάσει ἀσκηση (ἡ ὁποῖα θὰ ἔχει λυθεῖ καὶ γραφεῖ σωστὰ) θὰ εἶναι μεταξὺ 0,5 καὶ 1,5 καὶ θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὴν παρουσίαση ποὺ θὰ κάνει ὁ (τυχαία ἐπιλεγμένος) ἀντιπρόσωπός της. (Ἄν κάποιο μέλος μιᾶς ὁμάδας ἀπουσιάζει κατὰ τὴν παρουσίαση, ἀποκλείεται ἀπὸ τὴν διεκδίκηση τοῦ βαθμοῦ). Φοιτητὲς ποὺ θὰ πάρουν βαθμὸ ἀπὸ ἀσκηση ἀποκλείονται ἀπὸ τὴν διεκδίκηση βαθμοῦ ἀπὸ μελλοντικὰ πακέτα ἀσκήσεων.

1. Δεῖξτε ὅτι ἂν ἓνα ὑποσύνολο τῆς γλῶσσας $\text{BRACHYTATES}/\text{TM}$ εἶναι ἀναδρομικὸ, τότε θὰ εἶναι καὶ πεπερασμένο.
2. Ἐστω L ἡ γλῶσσα ποὺ περιέχει τὴν κωδικοποίηση κάθε TM γιὰ τὴν ὁποία ἡ γλῶσσα ποὺ ἀναγνωρίζει νὰ εἶναι ἄπειρη. Δεῖξτε ὅτι $L \in \Pi_2^0$.
3. Ἐστω $L = \{\langle M, k \rangle \mid \exists M' : L(M) = L(M') \text{ καὶ } |\langle M' \rangle| = k\}$. Δεῖξτε ὅτι $L \notin \text{co-RE}$
Υπόδειξη: δεῖξτε πρῶτα ὅτι $\text{BRACHYTATES}/\text{TM} \leq_T \bar{L}$.
4. Δεῖξτε ὅτι ἡ γλῶσσα

$$L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid \forall x \in \Sigma^* : M_1(x) \downarrow \vee M_2(x) \uparrow\}$$

δὲν εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαραριθμήσιμη.

5. Ἀποδείξτε ὅτι ἡ παρακάτω γλῶσσα ἀνήκει στο $\Pi_1^0 - \Delta_1^0$

$$\text{ALLODD} = \{\langle M \rangle \mid \eta \ L(M) \text{ περιέχει ἀκριβῶς τις συμβολοσειρές περιττοῦ μήκους}\},$$

χρησιμοποιώντας τὸ Θεώρημα τῆς Ἀναδρομῆς καὶ ὄχι ἐπικαλούμενοι τὸ Θεώρημα τοῦ Rice.

6. Δεῖξτε (χρησιμοποιώντας τὸ Θεώρημα τῆς Ἀναδρομῆς) ὅτι ὑπάρχει μιὰ Μήχανή Turing ἡ ὁποία νὰ ἀποδέχεται μόνο συμβολοσειρές ποὺ ἔχουν μῆκος μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς κωδικοποίησής της.
7. Δεῖξτε ὅτι κάθε ἀναδρομικὰ ἀπαραριθμήσιμο πρόβλημα ἀνάγεται (με ἀπεικονιστικὴ ἀναγωγή) στὸ

$$K = \{\langle M \rangle \mid M(\langle M \rangle) \downarrow\}$$

Υπόδειξη: Δεῖξτε πρῶτα ὅτι ἂν $L \in \Sigma_1^0$ τότε $L \leq_m \text{ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ}/\text{TM}$ καὶ στὴν συνέχεια δεῖξτε (χρησιμοποιώντας τὸ Θεώρημα τῆς Ἀναδρομῆς) ὅτι $\text{ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ}/\text{TM} \leq_m K$.