

Όμάδα ασκήσεων Νο. 1 για το μάθημα «Αναδρομικές Συναρτήσεις» του
Μαθηματικού Τμήματος για το Α.Ε. 2008–2009

Δευτέρα 17 Νοεμβρίου 2008.

Λύστε όσες μπορείτε από τις παρακάτω ασκήσεις. Οι ασκήσεις θα παρουσιαστούν την Τρίτη 02/12/2008 από αυτούς που τις έχουν λύσει με τυχαία επιλογή. Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν (ηλεκτρονικά ή έντυπα και, κατά προτίμηση, γραμμένες σε $\text{\LaTeX}$ ή στο χέρι) πριν τις 23:59 της Κυριακής 30/11/2008. Μπορείτε (και ενθαρρύνεστε) να σχηματίσετε ομάδες συνεργασίας το πολύ 4 ατόμων για την επίλυση και παρουσίαση των ασκήσεων. Ο βαθμός που θα πάρει κάθε φοιτητής του οποίου ή ομάδα θα έχει παρουσιάσει άσκηση (ή όποια θα έχει λυθεί και γραφτεί σωστά) θα είναι μεταξύ 0,5 και 1,5 και θα εξαρτηθεί από την παρουσίαση που θα κάνει ο (τυχαία επιλεγμένος) αντιπρόσωπός της. (Αν κάποιο μέλος μιās ομάδας απουσιάζει κατά την παρουσίαση, αποκλείεται από την διεκδίκηση του βαθμού). Φοιτητές που θα πάρουν βαθμό από άσκηση αποκλείονται από την διεκδίκηση βαθμού από μελλοντικά πακέτα ασκήσεων.

1. Κάθε άπειρο αναδρομικό σύνολο είναι ή ένωση δύο άπειρων και αναδρομικών συνόλων χωρίς κοινά στοιχεία. (Για ευκολία αντιμετωπίζουμε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ως μιὰ γλώσσα $L \subseteq \{0, 1\}^*$ όπου οι αριθμοί είναι εκφρασμένοι στο δυαδικό σύστημα).
2. Δείξτε ότι αν $A \in \text{REC}$ και $L = \{ww \mid w \in A\}$, τότε $L \in \text{REC}$.
3. Η εικόνα του Γκόλντμπαχ είναι ένα από τα παλιότερα άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών και γενικότερα των μαθηματικών. Έκφράζεται ως εξής:

Κάθε άρτιος θετικός άκεραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, δηλ. για κάθε $n \geq 2$, $2n = p+q$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

- Έστω το παρακάτω πρόβλημα:

ΔΙΑΨΕΥΣΗ ΓΚΟΛΝΤΜΠΑΧ

Έσοδος: Φυσικός αριθμός $n \geq 2$.

Ερώτηση: Υπάρχει φυσικός αριθμός $k \geq n$ που να διαψεύδει την εικόνα του Γκόλντμπαχ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα ΔΙΑΨΕΥΣΗ ΓΚΟΛΝΤΜΠΑΧ είναι αναγνώρισιμο.

- Έστω επίσης το παρακάτω πρόβλημα:

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΓΚΟΛΝΤΜΠΑΧ

Έσοδος: Φυσικός αριθμός $n \geq 2$.

Ερώτηση: Ίσχύει ή εικόνα του Γκόλντμπαχ για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq n$;

Δείξτε ότι αν το πρόβλημα ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΓΚΟΛΝΤΜΠΑΧ είναι αναγνώρισιμο, τότε θα είναι και διαγνώσιμο.

4. Έστω μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \downarrow\}$ (προφανώς ή f είναι πλήρης συνάρτηση αν $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$). Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αναδρομικών γλωσσών (δηλ. των αποφάνσιμων γλωσσών) με REC . Επίσης συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αναδρομικά απαριθμήσιμων γλωσσών (δηλ. των ήμιαποφάνσιμων γλωσσών) με RE . Χρησιμοποιούμε τον όρο ϕ_x για την συνάρτηση που υπολογίζει ή Μηχανή Turing M_x με αριθμό Gödel x .

Έστω $K = \{x \mid M_x(x) \downarrow\}$ και $R = \{x \mid \text{Dom}(\phi_x) \in \text{REC}\}$. Εξετάστε την όρθότητα των παρακάτω προτάσεων:

- $R \subseteq K$
- $R \cap K = \emptyset$.
- $R \cup K \in \text{RE}$.

5. Δείξτε ότι το παρακάτω πρόβλημα είναι αποφάνσιμο:

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΜΝΗΜΗ

Εἴσοδος: Μηχανή Turing M με αλφάβητο εισόδου Σ , συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$, και μη άρνητικός άκέραιος n .

Ἑρώτηση: Ἐπισκέπτεται ἡ κεφαλή τῆς M τὴν n -στή θέση τῆς ταινίας της κατὰ τὴν διάρκεια τῆς λειτουργίας της μεῖς εἴσοδο w ;

6. Ἐστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$. Ὅρίζουμε τὴν συνάρτηση $\text{rank}_A(x) = |\{y \mid y < x \wedge y \in A\}|$. Δείξτε ὅτι ἡ συνάρτηση rank_A εἶναι ὑπολογίσιμη ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ A εἶναι ἀναδρομικὸ σύνολο.

7. Δείξτε ὅτι οἱ παρακάτω συναρτήσεις εἶναι πρωτογενῶς ἀναδρομικές.

- $\text{gcd}(m, n)$, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν n καὶ m .
- $\text{lcm}(m, n)$, τὸ ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν n καὶ m .
- $\text{prime}(x)$, τὸ κατηγόρημα ἡ τιμὴ τοῦ ὁποῖου εἶναι 1 ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ n εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς.
- $p(x)$, ὁ n -οστὸς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅπου $p(0) = 2, p(1) = 3$, κ.λ.π.

8. Ἐστω $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ συνάρτηση ποὺ εἶναι 1-1 καὶ ἐπὶ. Δείξτε ὅτι ἡ f εἶναι μ -ἀναδρομικὴ ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ f^{-1} εἶναι μ -ἀναδρομικὴ.

(Ἵπόδειξη, χρησιμοποιήστε τὸ γεγονός ὅτι ἡ f , ὡς μ -ἀναδρομικὴ εἶναι πλήρης καὶ τὸ θεώρημα ποὺ λέει ὅτι κάθε μ -ἀναδρομικὴ συνάρτηση εἶναι ὑπολογίσιμη).