

**Όμάδα ασκήσεων Νο. 1 για το μάθημα «Αναδρομικές Συναρτήσεις» του  
Μαθηματικού Τμήματος για το Α.Ε. 2009–2010**

Τρίτη 20 Οκτωβρίου 2009.

Λύστε όσες μπορείτε από τις παρακάτω ασκήσεις. Οι ασκήσεις θα παρουσιαστούν την Τρίτη 03/11/2009 από αυτούς που τις έχουν λύσει με τυχαία επιλογή. Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν είτε (κατά προτίμηση) ηλεκτρονικά, σε μορφή .pdf, στην διεύθυνση sedthilk@math.uoa.gr ή έντυπα στο γραμματοκιβώτιο του γραφείου 208 πριν τις 23:59 της Κυριακής 01/11/2009. Μπορείτε (και ενθαρρύνεστε) να σχηματίσετε ομάδες συνεργασίας το πολύ 4 ατόμων για την επίλυση και παρουσίαση των ασκήσεων. Ο βαθμός που θα πάρει κάθε φοιτητής του οποίου η ομάδα θα έχει παρουσιάσει άσκηση (ή όποια θα έχει λυθεί και γραφτεί σωστά) θα είναι μεταξύ 0,5 και 1,5 και θα εξαρτηθεί από την παρουσίαση που θα κάνει ο (τυχαία επιλεγμένος) αντιπρόσωπός της. (Αν κάποιο μέλος μιās ομάδας απουσιάζει κατά την παρουσίαση, αποκλείεται από την διεκδίκηση του βαθμού). Φοιτητές που θα πάρουν βαθμό από άσκηση αποκλείονται από την διεκδίκηση βαθμού από μελλοντικά πακέτα ασκήσεων.

Για την διευκόλυνση των φοιτητών στην λύση των παρακάτω ασκήσεων συνιστάται να παρακολουθήσουν το τρίωρο της 27 Οκτωβρίου 2009 το οποίο θα αφιερωθεί αποκλειστικά στην επίλυση ασκήσεων.

1. Κάθε άπειρη αναγνωρίσιμη γλώσσα περιέχει άπειρη αναδρομική γλώσσα ως υποσύνολο.
2. Λέμε ότι μιὰ γλώσσα  $C$  διαχωρίζει τις γλώσσες  $A$  και  $B$  αν  $A \subseteq C$  και  $B \subseteq \bar{C}$ .  
Έστω  $A, B$  δύο γλώσσες όπου  $A \cap B = \emptyset$  και τέτοιες ώστε τα συμπληρώματά τους να είναι αναγνωρίσιμα. Δείξτε ότι υπάρχει μιὰ αναδρομική γλώσσα που να διαχωρίζει τις  $A$  και  $B$ .
3. Έστω  $L$  μιὰ αναγνωρίσιμη γλώσσα που δεν είναι αναδρομική. Δείξτε ότι αν η  $M$  είναι μιὰ Μηχανή Turing που αποδέχεται την  $L$  τότε η γλώσσα

$$C = \{w \in \Sigma^* \mid \text{η } M \text{ με είσοδο την } w \text{ δεν τερματίζει}\}$$

είναι άπειρη.

4. Έστω  $A$  και  $B$  γλώσσες τέτοιες ώστε ή  $A$  να είναι αναδρομική ενώ ή  $B$  όχι. Δείξτε ότι αν  $A \cap B = \emptyset$ , τότε ή  $A \cup B$  δεν είναι αναδρομική.
5. Δείξτε ότι ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{N}$  είναι αναδρομική γλώσσα (οί αριθμοί αντιστοιχούν σε δυαδικές λέξεις) αν και μόνο αν είναι το πεδίο τιμών μιās πλήρους και αύξουσας αναδρομική συνάρτησης (προσοχή! όχι απαραίτητα γνήσια αύξουσας).
6. Δείξτε ότι κάθε άπειρη αναδρομική γλώσσα είναι ένωση δύο άπειρων αναδρομικών γλωσσών χωρίς κοινά στοιχεία.
7. Καλούμε μιὰ λέξη *παλίνδρομο* αν παραμένει ή ίδια όταν γράφεται ανάποδα. Δείξτε ότι αν μιὰ γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη τότε και το σύνολο όλων των παλίνδρομων που περιέχει είναι αναγνωρίσιμο.
8. Δώστε έναν τυπικό όρισμό μιās μηχανής Turing με πεπερασμένη μνήμη. Δείξτε ότι το πρόβλημα του τερματισμού για τέτοιου είδους μηχανές είναι αποφάνσιμο.