



Θέματα Ἐξετάσεων γιὰ τὸ προπτυχιακὸ μάθημα:
«Ἀναδρομικὲς Συναρτήσεις»
τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν

Πέμπτη 03 Σεπτεμβρίου 2009, 08:00 – 10:30

- 1.(3 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα

$$L = \{ \langle M \rangle \mid \text{ἡ } M \text{ ἀποδέχεται γιὰ κάθε} \\ \text{εἴσοδο καὶ ἀφοῦ ἐκτελέσει ἄρτιο ἀριθμὸ βημάτων.} \}$$

δὲν εἶναι ἀναδρομική.

- 2.(3 μονάδες) Ἀποδείξτε ὅτι $\text{INFIN} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ μὴ-πεπερασμένη γλῶσσα} \} \notin \text{REC}$ χρησιμοποιώντας τὸ Θεώρημα τῆς Ἀναδρομῆς καὶ ὄχι ἐπικαλούμενοι τὸ Θεώρημα τοῦ Rice.

- 3.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα

$$\{ \langle M \rangle \mid \exists M', M'' : L(M) = L(M') = L(M'') \text{ καὶ } |\langle M' \rangle| < |\langle M \rangle| < |\langle M'' \rangle| \}$$

δὲν εἶναι ἀναδρομική.

- 4.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\phi(i) = \begin{cases} i & \text{ἂν } |L(M_i)| \geq i \\ \uparrow & \text{διαφορετικὰ.} \end{cases}$$

εἶναι ὑπολογίσιμη.

(Υπενθυμίζεται ὅτι ἡ M_i εἶναι ἡ i -στή, κατὰ λεξικογραφικῇ σειρά κωδικοποίησης, μηχανὴ Turing.)

- 5.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἂν οἱ $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ εἶναι 1-1 καὶ ἐπὶ μ -ἀναδρομικὲς συναρτήσεις, τότε καὶ ἡ συνάρτηση $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1}$ εἶναι μ -ἀναδρομική (τὸ σύμβολο “ο” ἀντιστοιχεῖ στὴν σύνθεση συναρτήσεων).

Λύστε ὅσες θέλετε ἀπὸ τὶς παραπάνω ἀσκήσεις. Ἄν συνολικὰ ἀπαντήσετε γιὰ x μονάδες, ὁ τελικὸς βαθμὸς τῆς εξέτασης θὰ εἶναι:

$$\tau = \min\{x, 10\}$$

Καλὴ ἐπιτυχία,

Δημήτριος Μ. Θηλυκός.