



Θέματα Έξετάσεων για τὸ προπτυχιακὸ μάθημα:
«Αναδρομικές Συναρτήσεις»
τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν

Δευτέρα 16 Φεβρουαρίου 2009, 18:00 – 20:30

1. (2 μονάδες) Ἐστω $L = \{\langle M, k \rangle \mid \exists M' : L(M) = L(M') \text{ και } |\langle M' \rangle| = k\}$. Δείξτε ὅτι $L \notin \text{REC}$.
Υπόδειξη: δείξτε ὅτι $\text{BPAUTATEΣ}/\text{TM} \leq_T \bar{L}$.
2. (2 μονάδες) Ἀποδείξτε ὅτι $\text{FIN} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ πεπερασμένη γλῶσσα}\} \notin \text{REC}$ χρησιμοποιώντας τὸ Θεώρημα τῆς Ἀναδρομῆς καὶ ὅχι ἐπικαλούμενοι τὸ Θεώρημα τοῦ Rice.
Υπόδειξη: Μιμηθῆτε τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος τοῦ Rice ἢ ὁποία χρησιμοποιεῖ τὸ Θεώρημα τῆς Ἀναδρομῆς.
3. (2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα
- $$L = \{\langle M \rangle \mid \text{ἡ } M \text{ ἀποδέχεται γιὰ κάθε εἴσοδο καὶ ἀφοῦ ἐκτελέσει περισσότερο ἀπὸ 2009 βήματα.}\}$$
- δὲν εἶναι ἀναδρομική.
Υπόδειξη: Δείξτε πρῶτα ὅτι $\{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\} \leq_m L$.
4. (2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἂν $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 2009\}$, τότε δὲν ὑπάρχει ἀπεικονιστικὴ ἀναγωγή τοῦ $\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}/\text{TM}$ στὸ συμπλήρωμα τῆς L .
Υπόδειξη: Δείξτε πρῶτα ὅτι $L \in \text{RE}$.
5. (2 μονάδες) Ἀδρανῆς λέγεται μιὰ κατάσταση μιᾶς $\text{TM } M$ στὴν ἡ ὁποία ἡ M δὲν μεταβαίνει ποτὲ ὅποια καὶ νὰ εἶναι ἡ εἰσοδὸς τῆς. Θεωρήστε τὸ πρόβλημα τῆς ἀπόφασης τοῦ ἂν μιὰ TM ἔχει ἀδρανεῖς μῆ-τελικές καταστάσεις. Τυποποιῆστε τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὡς γλῶσσα (ὀνομάστε τὴν ΑΔΡΑΝ) καὶ δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα αὐτὴ δὲν εἶναι ἀναδρομική.
Υπόδειξη: Δείξτε ὅτι $\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}/\text{TM} \leq_m \text{ΑΔΡΑΝ}$.
6. (2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἂν ἡ $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ εἶναι μιὰ 1-1 καὶ ἐπὶ μ -ἀναδρομικὴ συνάρτηση, τότε καὶ ἡ ἀντίστροφὴ τῆς ϕ^{-1} εἶναι μ -ἀναδρομική.

Λύστε ὅσες θέλετε ἀπὸ τὶς παραπάνω ἀσκήσεις. Ἄν συνολικὰ ἀπαντήσετε γιὰ x μονάδες, ὁ τελικὸς βαθμὸς τῆς ἐξέτασης θὰ εἶναι:

$$\tau = \min\{x, 10\}$$

Καλὴ ἐπιτυχία,

Δημήτριος Μ. Θηλυκός.