



Θέματα Έξετάσεων για τὸ προπτυχιακὸ μάθημα:
«Αναδρομικές Συναρτήσεις»
τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν

Δευτέρα 27 Σεπτεμβρίου 2010, 08:00 – 10:30

- 1.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ὑπάρχει Μηχανὴ Turing ἡ ὁποία νὰ ἀποδέχεται μόνο συμβολοσειρές τῶν ὁποίων τὸ μήκος νὰ μὴν διαιρεῖται ἀπὸ μήκους τῆς κωδικοποίησής της.
- 2.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ γλῶσσα $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \leq 2010\}$ δὲν εἶναι ἀναδρομικὴ χρησιμοποιώντας τὸ θεώρημα τῆς ἀναδρομῆς καὶ ὄχι τὸ θεώρημα τοῦ Rice.
- 3.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ
$$L_{DIE\Sigma} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$
δὲν εἶναι ἀναδρομικὴ γλῶσσα.
- 4.(2 μονάδες) Ἀποδείξτε ὅτι τὸ παρακάτω πρόβλημα δὲν εἶναι διαγνώσιμο:

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΠΛΗΘΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Εἴσοδος: Μηχανὲς Turing M_1 καὶ M_2 καὶ $x \in \Sigma^*$.

Ερώτηση: Εἶναι τὸ πλῆθος τῶν καταστάσεων ἀπὸ τίς ὁποῖες περνάει ἡ M_1 μὲ εἴσοδο x διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν κατατάσεων ἀπὸ τίς ὁποῖες περνάει ἡ M_2 μὲ εἴσοδο x ;

- 5.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἂν οἱ $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ εἶναι 1-1 καὶ ἐπὶ ἀναδρομικὲς συναρτήσεις, τότε καὶ ἡ συνάρτηση $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1}$ εἶναι ἀναδρομικὴ (τὸ σύμβολο “ο” ἀντιστοιχεῖ στὴν σύνθεση συναρτήσεων).
- 6.(2 μονάδες) Δείξτε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\phi(i) = \begin{cases} i & \text{ἂν } |L(M_i)| + |L(M_{i+1})| > 2010 \\ \uparrow & \text{διαφορετικὰ.} \end{cases}$$

εἶναι ὑπολογίσιμη.

(Υπενθυμίζεται ὅτι ἡ M_i εἶναι ἡ i -στή, κατὰ λεξικογραφικὴ σειρὰ κωδικοποίησης, μηχανὴ Turing.)

Λύστε ὅσες θέλετε ἀπὸ τίς παραπάνω ἀσκήσεις. Ἄν συνολικὰ ἀπαντήσετε γιὰ x μονάδες, ὁ τελικὸς βαθμὸς τῆς εξέτασης θὰ εἶναι:

$$\tau = \min\{x, 10\}$$

Καλὴ ἐπιτυχία,

Δημήτριος Μ. Θηλυκός.