ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ / 14/11/07 / Μάθημα 3

Σειρές

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \begin{cases} \dfrac{n i}{(1+i)^n}, & n \text{ άρτιος} \\ \dfrac{2^n n^5}{(2-i)^n}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

Κριτήριο ρίζας:

• Για n άρτιο: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{ni}{(1+i)^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{n}{|1+i|^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{|1+i|} =$

$= \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Για n περιττό: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n \cdot n^5}{(2-i)^n}} = \sqrt[n]{\frac{2^n \cdot n^5}{|2-i|^n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt[n]{n^5} \to \frac{2}{\sqrt{5}}$ (με $\sqrt[n]{n^5} \to 1$)

$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

Φυσικά η ακολουθία $\sqrt[n]{|a_n|}$ αποκλίνει

όμως $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Κριτήριο ρίζας:

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(1-i)^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{|1-i|^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{|1-i|}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$, άρα συγκλίνει

Κριτήριο Λόγου

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{(1-i)^n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{|1-i|}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\overbrace{\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^{n-1}}^{\to e}\overbrace{\left(\frac{n}{n-1}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}} \to$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Άρα συγκλίνει η σειρά από κριτήριο λόγου.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ όπου $z_n = p(n)\alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$, P πολυώνυμο.

$$p(z) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 =$$
$$= z^k\left(\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{z^k}\right)$$

$$\underset{p(n)\to}{\sqrt[n]{|p(n)|}} = \underbrace{\sqrt[n]{n^k}}_{\to 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{\left|\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \dots + \frac{\alpha_0}{n^k}\right|}}_{\to 1} \to 1$$

Με κριτήριο ρίζας:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|P(n)\cdot \alpha^n|} = \underbrace{\sqrt[n]{|P(n)|}}_{\to 1}\cdot|\alpha| \begin{cases} \text{αν } |\alpha|<1 \text{ από κριτήριο ρίζας συγκλίνει} \\ \text{αν } |\alpha|>1 \text{ αποκλίνει} \end{cases}$$

Αν $|\alpha|=1$ έχουμε:

$|a_n| = |P(n)\cdot\alpha| = |P(n)| \to \infty$ και άρα $a_n \to \infty$

και άρα η σειρά αποκλίνει

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \alpha^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ πολυώνυμα

Από κριτήριο ~~ρα~~ ρίζας

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\alpha^n \frac{P(n)}{Q(n)}\right|} = |\alpha|\cdot\frac{\overbrace{\sqrt[n]{|P(n)|}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[n]{|Q(n)|}}_{\to 1}} \to |\alpha|$$

όπου συνεχίζουμε όπως πριν.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(1+i)^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

$$|a_n| = \left|\frac{(1-i)^n}{(1+i)^n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right| = \frac{|1-i|^n}{|1+i|^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 1/e\,, \text{ δηλ. } a_n \not\to 0.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

Και με κριτήριο ρίζας:

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\frac{(1-i)^n}{(1+i)^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = 1-\frac{1}{n} \to 1$$

<u>Άσκηση</u>: Να λυθεί η εξίσωση:

$$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = i \Rightarrow 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = 1 + i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^z = 1+i \Rightarrow z = \log|1+i| + [\arg(1+i) + 2k\pi]\, i$$

$$= \log\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}$$

<u>Αναλυτικότερα</u>:

$$z = x + yi$$

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = 1+i$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos y = \frac{1}{e^x} \\ \sin y = \frac{1}{e^x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos^2 y = \frac{1}{e^{2x}} \\ \sin^2 y = \frac{1}{e^{2x}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{e^{2x}} = 1 \Rightarrow e^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{2} = \log\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos y = \frac{1}{e^{\log\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \pi/4$$

Άρα $y = \pi/4 + 2k\pi \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}$

Οπότε $z = \ln\sqrt{2} + (\pi/4 + 2k\pi)i, \;\; k \in \mathbb{Z}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$, $P(n), Q(n)$ πολυώνυμα μιγαδικά

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|} = \frac{\sqrt[n]{|P(n)|}}{\sqrt[n]{|Q(n)|}} \to 1$$

$p(z) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0, \ \alpha_k \neq 0.$
$q(z) = \beta_\lambda z^\lambda + \beta_{\lambda-1} z^{\lambda-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0, \ \beta_\lambda \neq 0.$

$$\frac{p(z)}{Q(z)} = \frac{z^k\left(\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{z^k}\right)}{z^\lambda\left(\beta_\lambda + \frac{\beta_{\lambda-1}}{z} + \dots + \frac{\beta_1}{z^{\lambda-1}} + \frac{\beta_0}{z^\lambda}\right)} = z^{k-\lambda} \cdot \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^k}}{\beta_\lambda + \frac{\beta_{\lambda-1}}{z} + \dots + \frac{\beta_0}{z^\lambda}}$$

για $z = n$:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \to ;$$

έχουμε $n^{k-\lambda}$.

- Αν $k=\lambda$ τότε $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\alpha_k}{\beta_\lambda}$
- Αν $\lambda > k$ τότε έχουμε $\frac{1}{n^{\lambda-k}} \to 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$
- Αν $\lambda < k$ τότε έχουμε $n^{k-\lambda} \to \infty$, άρα η σειρά σίγουρα αποκλίνει

$\lambda \geq k$: $\sqrt[n]{\frac{P(n)}{Q(n)}} \to 1$ άρα το κριτήριο αποτυγχάνει.

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{\left|\frac{P(n+1)}{Q(n+1)}\right|}{\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|} = 1$$

↳ αποτυγχάνει

Άσκηση: Έστω ~~δύο~~ σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ τέτοιες ώστε να υπάρχουν μ, M θετικοί αριθμοί ώστε $\mu \le \left|\frac{z_n}{w_n}\right| \le M$ (1) για κάθε $n = 1, 2, \dots$

Τότε αν η μία σειρά συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και η άλλη απόλυτα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Από (1) $\Rightarrow \mu \le \left|\frac{z_n}{w_n}\right| \Rightarrow \mu |w_n| \le |z_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ η $\sum_{n=1}^{\infty} \mu |w_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ συγκλίνει [illegible]

Αντίστροφα: Έστω ότι η $\sum w_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Από (1) $\Rightarrow |z_n| \le M |w_n| \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ η $\sum z_n$ συγκλίνει απόλυτα από κριτήριο σύγκρισης.

Παρατήρηση: • Αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_n}{w_n}\right| \to \alpha \in (0, \infty)$ έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα

• Αν ισχύει $0 < \underline{\lim} \left|\frac{z_n}{w_n}\right| \le \overline{\lim} \left|\frac{z_n}{w_n}\right| < +\infty$ πάλι έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

$\alpha \ell$

Στην προηγούμενη άσκηση: αν $\kappa < \lambda$.

$\deg P(z) = \kappa$

$\deg Q(z) = \lambda$

1η περίπτωση : $\lambda \geq \kappa+2$.

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda-\kappa}} < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$ συγκλίνει $\forall\ x>0$

Θέτουμε $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ και $w_n = \frac{1}{n^{\lambda-\kappa}}$ βαθμό λ

Έχουμε $$\left|\frac{a_n}{w_n}\right| = \left|\frac{\frac{P(n)}{Q(n)}}{\frac{1}{n^{\lambda-\kappa}}}\right| = \frac{|P(n)\cdot n^{\lambda-\kappa}|}{|Q(n)|} \to \alpha > 0$$

βαθμό λ

Με βάση την παρατήρηση από το λήμμα η σειρά συγκλίνει μαζί η $\sum w_n$ συγκλίνει απόλυτα

2η περίπτωση : $\lambda = \kappa+1$

Θέτουμε $w_n = \frac{1}{n}$

Έχουμε $$\left|\frac{a_n}{w_n}\right| = \frac{|P(n)\cdot n|}{|Q(n)|} \to \alpha > 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η a_n συγκλίνει απόλυτα

Τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. ΑΤΟΠΟ.

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ δεν συγκλίνει απόλυτα

Δεν βγάζουμε συμπέρασμα για αν συγκλίνει απλά.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad R = ;$$

Κριτήριο λόγου:

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to 1. \quad \text{Άρα } R = 1$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+i}{n^n+i} z^n, \quad R = ;$$

$$\left| \frac{\frac{n!+i}{n^n+i}}{\frac{(n+1)!+i}{(n+1)^{n+1}+i}} \right| = \left| \frac{(n!+i)\left((n+1)^{n+1}+i\right)}{\left((n+1)!+i\right)(n^n+i)} \right| = \frac{|(n!+i)|\,|(n+1)^{n+1}+i|}{|(n+1)!+i|\,|n^n+i|}$$

$$= \frac{n!\left|\left(1+\frac{i}{n!}\right)\right|(n+1)^{n+1}\left|1+\frac{i}{(n+1)^{n+1}}\right|}{(n+1)!\left|1+\frac{i}{(n+1)!}\right| \cdot n^n\left|1+\frac{i}{n^n}\right|} =$$

$$= \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,n^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{n!}\right)\left(1+\frac{i}{(n+1)^{n+1}}\right)}{\left(1+\frac{i}{(n+1)!}\right)\left(1+\frac{i}{n^n}\right)} \to e$$

Άρα $R = e$