ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ / 21/11/07 | Μάθημα 4

15)
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z>0$ άρτια

Τότε $c_{2n+1}=0$ $\forall$ $n=0,1,\dots$
$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$f(z)=f(-z)$ $\forall$ $z\in D(0,r)$ (1)
Αφού η f είναι δυναμοσειρά είναι απεριόριστα διαφορίσιμη στο $D(0,r)$
Από (1) $f'(z)=-f'(-z)$, $f''(z)=f''(-z)$ και επαγωγικά παίρνω ότι $f^{(k)}(z)=(-1)^k f^{(k)}(-z)$ για κάθε $k=1,2,\dots$
$\forall z\in D(0,r)$ (2)
Από (2) για $z=0$ παίρνω $f^{(k)}(0)=(-1)^k f^{(k)}(0)$ $\forall$ $k=1,2,\dots$
$\Rightarrow (1-(-1)^k)f^{(k)}(0)=0$ $\forall$ $k=1,2,\dots$
Για k περιττό παίρνω $k=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$ και
$2f^{(k)}(0)=0 \Rightarrow f^{(k)}(0)=0$ $\forall$ $k=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$ (3)
Έχουμε ότι $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\forall$ $n=1,2,\dots$ (4). Άρα για n περιττό από τις (3) και (4) παίρνω ότι $c_n=0$. Άρα $c_{2n+1}=0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

16) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z>0$.

$\forall$ $z,w\in D(0,r)$, με $z^3=w^3$ ισχύει $f(z)=f(w)$.
Τότε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} z^{3n}$

Έστω τυχαίο $z_0\in D(0,r)$. Τότε $|z_0|<\varepsilon$. Θεωρούμε ρ να είναι μια τρίτη ρίζα του 1, $\rho\neq 1$.
Τότε $|z_0\rho|=|z_0||\rho|=|z_0|\cdot 1=|z_0|<\varepsilon$. Άρα $z_0\rho\in D(0,r)$
Έχουμε $(\rho z_0)^3=\rho^3 z_0^3=z_0^3$. Άρα από την υπόθεση

$f(z_0) = f(\rho z_0)$

Το z_0 και τυχόν, άρα $\forall\, z \in D(0,r)$ έχω

$f(z) = f(\rho z) \quad (1)$

Η f σαν δυναμοσειρά είναι απεριόριστα διαφορίσιμη

Από την (1) $f'(z) = \rho \cdot f'(\rho z)\ \forall\, z \in D(0,r)$

$f''(z) = \rho^2 f''(\rho z)\ \forall\, z \in D(0,r)$

Επαγωγικά αποδεικνύομε ότι

$$f^{(k)}(z) = \rho^k \cdot f^{(k)}(\rho z)\ \forall\, k=1,2,\dots,\ \forall\, z \in D(0,r) \quad (3)$$

Για $z=0$ έχομε από την (3):

$$f^{(k)}(0) = \rho^k \cdot f^{(k)}(0)\ \forall\, k=1,2,\dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\rho^k)\, f^{(k)}(0) = 0\ \forall\, k=1,2,\dots \quad (4)$$

Αν $k = 3\pi+u$, $\pi \in \mathbb{N}$, $u \in \{0,1,2\}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$

Για $k = 3\pi+1$, $\pi \in \mathbb{N}$ έχομε

$$\rho^k = \rho^{3\pi+1} = \rho^{3\pi}\cdot\rho = (\rho^3)^\pi \cdot \rho = \rho \neq 1 \Rightarrow 1-\rho^k \neq 0\ \forall\, k=3\pi+1,\ \pi \in \mathbb{N} \quad (5)$$

• Από τις (4) και (5) για κάθε $k = 3\pi+1$, $\pi \in \mathbb{N}$ έχομε ότι $f^{(k)}(0)=0$

• $k = 3\pi+2$ $\pi \in \mathbb{N}$ (6)

$\rho^k = \rho^{3\pi+2} = \rho^{3\pi}\cdot\rho^2 = \rho^2 \neq 1$. Άρα $1-\rho^k \neq 0\ \forall\, k=3\pi+2,\ \pi\in\mathbb{N}$.

Από τις (4) και (6) για κάθε $k=3\pi+2$, $\pi \in \mathbb{N}$ έχομε

$f^{(k)}(0)=0$.

• Έχομε ότι $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0\ \forall\, k=3\pi+1$ ή $k=3\pi+2$, $\pi\in\mathbb{N}$.

Επομένως έπεται το ζητούμενο

(Παρόμοια αν πάρομε ως υπόθεση $z^p = w^p$, p πρώτο έχομε $\sum_{n=0}^{\infty} c_{np} z^{np}$)

17) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $r>0$, $f(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in(-r,r)$
Τότε $c_n\in\mathbb{R}$ $\forall$ $n=0,1,\dots$

$f(0)=c_0$ Άρα $c_0\in\mathbb{R}$

Επαγωγικά υποθέτουμε ότι για κάποιο $k\geq 0$ έχουμε $c_j\in\mathbb{R}$ για κάθε $j=0,1,\dots,k$ και θα δείξουμε ότι $c_{k+1}\in\mathbb{R}$ και $f^{(j)}(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in(-r,r)$, $\forall j=0,1,\dots,k$.

Έστω $x_0\in(-r,r)$

$$f'(x_0)=\lim_{z\to x_0}\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$$

Ξέρουμε ότι αν $\lim_{z\to a} f(z)=b$

Αν $z_n\to a$ τότε $f(z_n)\to b$

Εφαρμόζουμε την αρχή της μεταφοράς.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι μια ακολουθία στο $(-r,r)$ όπου $x_n\to x_0$, $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε

$$\underbrace{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}_{\in\mathbb{R}}\to f'(x_0)$$

Αφού το $\mathbb{R}$ είναι κλειστό το $f'(x_0)\in\mathbb{R}$

x_0 τυχόν άρα τελικά $\forall x$, $f'(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in(-r,r)$

Άρα $f'(0)\in\mathbb{R}$. Αλλά $c_1=\frac{f'(0)}{1}=f'(0)\in\mathbb{R}$

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(0)}{z} \quad (1)$$

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\neq 0$ να είναι μια ακολουθία στο $(-r,r)$ ώστε $x_n\to 0$. Αφού το όριο (1) υπάρχει από την αρχή της μεταφοράς έχουμε ότι $\frac{f^{(k)}(x_n) - f^{(k)}(0)}{x_n} \to f^{(k+1)}(0)$

Επίσης το $\mathbb{R}$ είναι κλειστό από την (2) $\Rightarrow f^{(k+1)}(0) \in \mathbb{R}$

Άρα $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{R}$.

Άρα $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Αρκεί να υπάρχει $\delta > 0$ με $\delta < 2$ και ένα αριθμήσιμο και πυκνό στο $(-\delta, \delta)$ σύνολο $\{q_1, q_2, \ldots\}$ ώστε $f(q_n) \in \mathbb{R} \ \forall n = 1, 2, \ldots$

18)

$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$

$Q(z) = \overline{c_n} z^n + \overline{c_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \overline{c_1} z + \overline{c_0}$

$F(z) = P(z)Q(z) = \alpha_{2n} z^{2n} + \alpha_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$

Τότε $\alpha_j \in \mathbb{R} \ \forall j = 0, 1, \ldots, 2n$

Η F αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε όλο το $\mathbb{C}$.

Έστω ένας δίσκος $D(0, r)$, $r > 0$.

$F : D(0, r) \to \mathbb{C}$, r τυχαίο.

Έστω $x \in (-r, r)$.

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$

$Q(x) = \overline{c_n} x^n + \overline{c_{n-1}} x^{n-1} + \ldots + \overline{c_1} x + \overline{c_0} = \overline{P(x)}$

$F(x) = P(x) \cdot Q(x) = P(x) \cdot \overline{P(x)} = [P(x)]^2 \in \mathbb{R} \ \forall x \in (-r, r)$

Άρα $\alpha_j \in \mathbb{R} \ \forall j = 0, 1, \ldots, 2n$

19) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z > 0$

$\{z_m\}$ στο $D(0, r)$, $z_m \neq 0 \ \forall m$

$z_m \to 0$ και $f(z_m) = 0 \ \forall m$

Τότε $f = 0$

$f(0) = c_0$. Η f σαν δυναμοσειρά είναι συνεχής στο $0 \in D(0,r)$.
Αφού $z_m \to 0 \Rightarrow f(z_m) \to f(0)$ από αρχή της μεταφοράς.
Ακόμα $f(z_m) = 0 \ \forall m \Rightarrow f(z_m) \to 0$ (2).

Από τις (1) και (2) και την μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $f(0) = 0$. Αλλά $f(0) = c_0$. Άρα $c_0 = 0$. Άρα $\underline{c_0 = 0}$.

Με επαγωγή θα δείξουμε ότι $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k = 0,1,2,\ldots$
Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $\gamma = 0,1,2,\ldots,k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει $c_{k+1} = 0$
Από τον τύπο της f έχουμε

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j z^j = z^{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j z^{j-k-1} = z^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+k+1} z^j$$

Η δυναμοσειρά $\sum_{j=0}^{\infty} c_{j+k+1} z^j$ ορίζεται για κάθε $z \in D(0,r) \setminus \{0\}$ και ισούται με $\frac{f(z)}{z^{k+1}}$

Τότε ~~και~~ για $z \in D(0,r)$ έχουμε να ισούται με $\frac{f(z)}{z^{k+1}}$ για $z \neq 0$ και με c_{k+1} για $z = 0$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : D(0,r) \to \mathbb{C}$.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^{k+1}}, & z \in D(0,r) \setminus \{0\} \\ c_{k+1}, & z = 0 \end{cases}$$

Τότε $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+k+1} z^j$

Η δυναμοσειρά είναι συνεχής στο 0. Άρα η g είναι συνεχής στο $0 \in D(0,r)$

Από την αρχή της μεταφοράς αφού $z_m \to 0$ και g είναι συνεχής $\Rightarrow g(z_m) \to g(0)$. (3).
Αλλά $z_m \neq 0 \ \forall m$ και $g(z_m) = \frac{f(z_m)}{z_m^{k+1}} = 0 \ \forall m$.

Αφού $g(z_m) = 0 \ \forall m \Rightarrow g(z_m) \to 0$ (4)
Από τις (3) και (4) και την μοναδικότητα των ορίων έχουμε ότι $g(0)=0$. Αλλά $g(0) = c_{k+1}$.
Άρα $c_{k+1} = 0$. Άρα από την επαγωγή έχουμε $c_k = 0 \ \forall k = 0,1,2,\ldots$
Άρα $f=0$.

20) $z>0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$
$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$ δεν έχει ρίζα στο $D(0,r)$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$P_n \xrightarrow{u} e^z$ στα συμπαγή του $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow \sup_{z \in \overline{D(0,r)}} |p_n(z) - e^z| \to 0$

$e^z : \overline{D(0,r)} \to \mathbb{C}$
$|e^z| \neq 0 \ \forall z \in \overline{D(0,r)}$
Έστω $m = \sup_{z \in \overline{D(0,r)}} |e^z| > 0$

Η $|e^z|$ είναι συνεχής