Ασκήσεις Μιγαδικής Μαθημ. (52)

Μιγαδική Ανάλυση 16/1/08.

Ασκήσεις

22

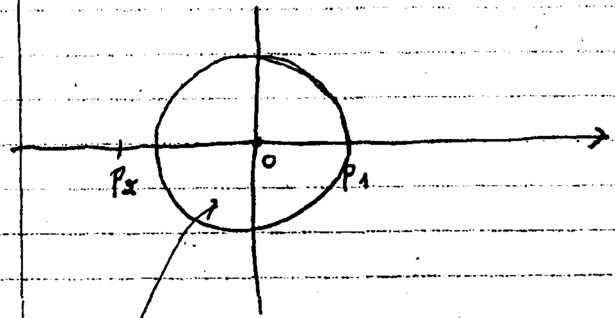
$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

$c_0 = c_1 = 1$

$c_n = c_{n-1} + c_{n-2},\ \forall n \geq 2.$

$1-z-z^2$

Ρίζες: $\rho_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\rho_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.



η $\frac{1}{1-z-z^2}$ είναι ολόμορφη στον $D(0,\rho_1)$,

άρα αναπτύσσεται κατά Taylor εκεί.

Είναι: $\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{(-1)(z-\rho_1)(z-\rho_2)} =$

$= \frac{A}{z-\rho_1} + \frac{B}{z-\rho_2}.$

$A = \frac{1}{\rho_1-\rho_2}$, $B = \frac{1}{\rho_2-\rho_1}$.

(53)

Τελικά: $\frac{1}{1-z-z^2} =$

$= \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\cdot\left(\frac{1}{z-\rho_2} - \frac{1}{z-\rho_1}\right)$.

Και: $\frac{1}{z-\rho_1} = \frac{1}{\rho_1\cdot\left(\frac{z}{\rho_1}-1\right)} = -\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\rho_1}} \overset{|z|<\rho_1}{=} -\frac{1}{\rho_1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_1}\right)^n\right) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\rho_1^{n+1}}\right)z^n$.

Επίσης: $\frac{1}{z-\rho_2} \overset{\text{όμοια}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\rho_2^{n+1}}\right)z^n$.

Έτσι: $\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\rho_2^{n+1}}\right)z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\rho_1^{n+1}}\right)z^n\right] =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\cdot\left(-\frac{1}{\rho_2^{n+1}}+\frac{1}{\rho_1^{n+1}}\right)\right)z^n$.

Άρα, $c_n = \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\cdot\left(\frac{1}{\rho_1^{n+1}}-\frac{1}{\rho_2^{n+1}}\right)$, $\forall n=0,1,2,\dots$

(54)

Έτσι: $c_0=c_1=1$ [με πράξεις. Αλλιώς:

$c_0=f(0)=\frac{1}{1-0-0^2}=1$

και: $c_1=f'(0)=1$, αφού

$f'(z)=\left(\frac{1}{1-z-z^2}\right)'=\dots=\frac{-1-2z}{(1-z-z^2)^2}$.]

Και: Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\rho_1$:

$R\geq\rho_1$. Και: $\frac{1}{z-\rho_1}=\sum_{n=0}^{\infty} l_n z^n$,

$l_n=-\frac{1}{\rho_1^{n+1}}$, $\forall n=0,1,2,\dots$

$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|l_n|} = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|-\frac{1}{\rho_1^{n+1}}\right|} =$

$= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{|\rho_1|}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{|\rho_1|}}}_{\to 1} = \frac{1}{|\rho_1|}$.

Άρα $R=\frac{1}{\frac{1}{|\rho_1|}}=|\rho_1|$.

Άρα, η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $|\rho_1|$

(η $\frac{1}{z-\rho_2}$ έχει $|\rho_2|$, η $\frac{1}{z-\rho_1}$ έχει $|\rho_1|$.

Αν ήταν $R>|\rho_1|$, ↳ για την $\frac{1}{1-z-z^2}$, αφού $|\rho_2|>|\rho_1|$)

και η $\frac{1}{z-p_1}$ είναι γρ. συνδ. των

$f(z), \frac{1}{z-p_2}$, θα είναι και η $\frac{1}{z-p_1}$ αυτ.

σύγκλισης $>|p_1|$, άτοπο).

<u>Τέλος:</u> Για $n \geq 2$:

$$c_{n-1}+c_{n-2} = \frac{1}{p_1-p_2}\cdot\left(\frac{1}{p_1^n}-\frac{1}{p_2^n}\right) + \frac{1}{p_1-p_2}\cdot\left(\frac{1}{p_1^{n-1}}-\frac{1}{p_2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p_1-p_2}\cdot\left(\left(\frac{1}{p_1^n}+\frac{1}{p_1^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{p_2^n}+\frac{1}{p_2^{n-1}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{p_1-p_2}\left[\frac{1}{p_1^{n-1}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{p_1}\right)}_{=\frac{1}{p_1^2}} - \frac{1}{p_2^{n-1}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{p_2}\right)}_{=\frac{1}{p_2^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{p_1-p_2}\cdot\left(\frac{1}{p_1^{n-1}}\cdot\frac{1}{p_1^2}-\frac{1}{p_2^{n-1}}\cdot\frac{1}{p_2^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{p_1-p_2}\cdot\left(\frac{1}{p_1^{n+1}}-\frac{1}{p_2^{n+1}}\right) = c_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

<u>Και:</u> (άλλος τρόπος)

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \quad , \quad r<|p_1|. \ :$$

$$c_{n-1}+c_{n-2} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^n}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n-1}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r} f(z)\cdot\left(\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)dz .$$

Άρα, $c_n-(c_{n-1}+c_{n-2}) =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\left(1+\frac{1}{z}\right)d$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=r} f(z)\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{z^{n-1}}\left(1+\frac{1}{z}\right)}_{=\,?}\right)dz$$

$$\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^{n-1}}\left(1+\frac{1}{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^{n-1}}\left(\frac{1}{z^2} - \left(1+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z^{n-1}}\left(\frac{1}{z^2}\left(1-z-z^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{z^{n+1}} \cdot \frac{1}{f(z)}.$$

Άρα: $c_n - (c_{n-1} + c_{n-2}) =$

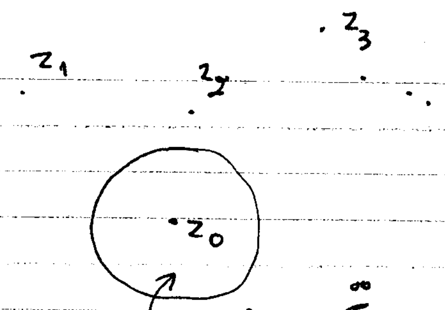
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{1}{z^{n+1}}\,dz = 0$$

(η $\frac{1}{z^{n+1}}$ έχει παράγουσα για $n \geq 2$).

<u>Άσκηση:</u> Έστω $A = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$, $A' = \emptyset$ (δεν έχει σ.σ.), $A \subseteq \mathbb{C}$, A αριθμήσιμο, και $f: \mathbb{C}\setminus A \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, η οποία έχει στα σημεία του A πόλο ή ουσιώδη ανωμαλία.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}\setminus A$ και $\rho = \min\{|z_0 - z|, z \in A\}$.

Τότε, η ακτίνα σύγκλισης της $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ είναι ρ,



εδώ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, γιατί αν ήταν 0 η ακτίνα σύγκλισης, τότε το A θα είχε σ.σ.

Θεωρώ το z_1 το σημείο του A με τη μικρότερη απόσταση από το z_0.

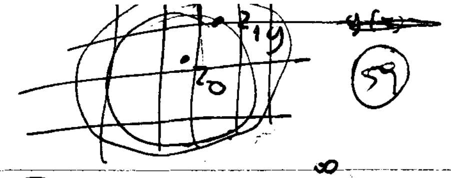
<u>Λύση:</u> Θεωρούμε το δίσκο $D(z_0, \rho)$, όπου $\rho = |z_0 - z_1|$.

Η f είναι ολόμορφη στον $D(z_0,\rho)$. Άρα, η f αναπτύσσεται ως δυναμοσειρά με κέντρο το z_0 στον $D(z_0,\rho)$ και ισχύει $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $\forall z \in D(z_0,\rho)$.

Άρα, η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον ρ.

Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > \rho$.

Άρα, για κάποιο $\varepsilon_0 > 0$, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ συγκλίνει $\forall z \in D(z_0, \rho+\varepsilon_0)$.



Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ είναι συνεχής στον δίσκο $D(z_0,\rho+\varepsilon_0)$.

Θεωρούμε μια ακολουθία (w_n), $n\in\mathbb{N}$, όπου $w_n \in D(z_0,\rho)$, ώστε $w_n \to z_1$.

Θεωρούμε $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Η g είναι συνεχής στον $D(z_0,\rho+\varepsilon_0)$.
Άρα:
Έχουμε $w_n \to z_1 \underset{\text{αρχή μεταφοράς}}{\Longrightarrow} g(w_n) \to g(z_1)$.

Αλλά $g(w_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w_n-z_0)^n = f(w_n)$,

$\forall n=1,2,\dots$ Άρα, $f(w_n)\to g(z_1) \in \mathbb{C}$.

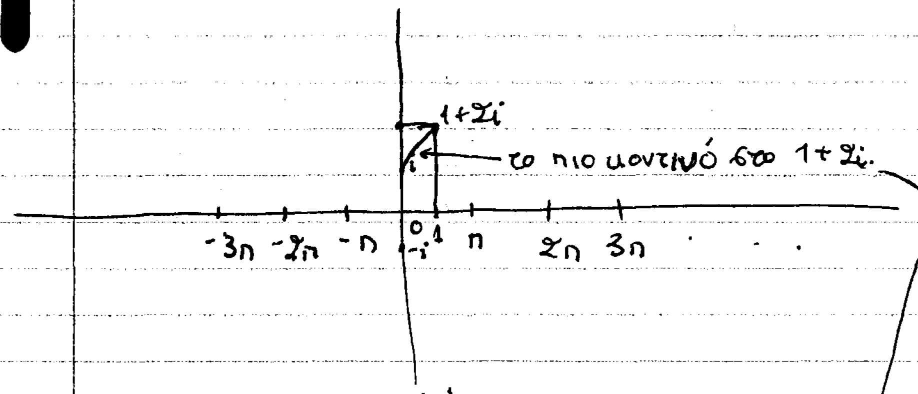
Όμως, το z_1 είναι ή πόλος ή ουσιώδης ανωμαλία.
Αν είναι πόλος $\to f(w_n)\to\infty$, άτοπο.
Αν είναι ουσιώδης ανωμαλία, τότε υπάρχουν 2 τουλ. ακολουθίες $f(w_{1_n})$, $f(w_{2_n})$, που συγκλίνουν σε 2 διαφ. όρια, άτοπο, γιατί συγκλίνουν στο $g(z_1)$.

Αλλιώς: αρχή αναλυτικής συνέχισης.

23 $f(z)=\frac{1}{\sin z}\cdot e^{\frac{1}{1+z^2}}$. Ποιά η ακτίνα σύγκλισης της

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1+2i)}{n!}\cdot z^n$?

Λύση: Πρόβλημα στα $\pm i$, $k\pi : k\in\mathbb{Z}$.



Αν θέσω $c_n = \frac{f^{(n)}(1+2i)}{n!}$, θεωρώ την:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-(1+2i))^n \to$ το ανάπτυγμα Taylor της f με κέντρο $1+2i$.

$|1+2i-i| = |1+i| = \sqrt{2}$.
$|1+2i-k\pi| = |(1-k\pi)+2i| \geq 2$.

Στο i η f έχει ουσιώδη ανωμαλία:

$z_n = i\left(1-\frac{1}{\nu}\right), \nu=1,2,\dots$, $w_n = i\left(1+\frac{1}{\nu}\right), \nu=1,2,\dots$

Όταν $z_n \to i$: $f(z_n) \to 0$
και $f(w_n) \to \infty$,
άρα έχουμε ουσιώδη ανωμαλία.

Άρα, από προηγούμενη άσκηση, η δυναμοσειρά
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-(1+2i))^n$$ έχει
ακτίνα σύγκλισης $\rho = \sqrt{2}$.

Αλλά: $$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(1+2i)}{n!}\right|}}.$$

Και η ζητούμενη ακτίνα σύγκλισης είναι:
$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(1+2i)}{n!}\right|}} = \rho = \sqrt{2}.$$

(29) f ολόμορφη στον $D(0,1)\setminus\{0\}$, ~~ορισμένη στον D(0,1)~~ άρτια.
$Res(f,0)=0$.

Λύση: $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ στο $D(0,1)\setminus\{0\}$.

$f(z) = f(-z)$, $\forall z \in D(0,1)\setminus\{0\}$

$$f(-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(-z)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-z)^n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(-1)^n z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^n \cdot z^n.$$

Άρα, $f(z) = f(-z) \xrightarrow{\text{μοναδικότητα ανάπτ.}}$ Laurent:

$\Rightarrow \frac{c_{-n}}{(-1)^n} = c_n$, $\forall n = 1,2,\dots$ και $c_n = (-1)^n \cdot c_n$, $\forall n = 0,1,2,\dots$

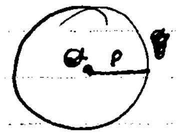
Άρα, για κάθε n περιττό $\Rightarrow c_n = 0$, $c_{-n} = 0$.

Άρα, $c_{-1} = 0 \Rightarrow Res(f,0) = 0$.

(30) Η f έχει ρίζα τάξης m στο a.

Τότε, η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο τάξης 1 με
$Res\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m$.

Λύση:



Θεωρώ ρ: η f να μην έχει άλλη ρίζα στο $D(a,\rho)$.
(αλλιώς, θα ήταν $f \equiv 0$).

Επεί: $f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$, $g(a) \neq 0$

$$f'(z)=\left((z-a)^m\right)'\cdot g(z)+(z-a)^m\cdot g'(z)=$$

$$=m\cdot(z-a)^{m-1}g(z)+(z-a)^m\cdot g'(z).$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m\cdot(z-a)^{m-1}g(z)+(z-a)^m\cdot g'(z)}{(z-a)^m g(z)}=$$

$$=\frac{m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

→ καλά ορισμένη στον $D(a,\rho)$.

Θεωρώ το $\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{f(z)}=$

$=\infty$. Άρα, η $\frac{f'(z)}{f(z)}$ έχει πόλο στο a.

Η $g'(z)/g(z)$ είναι ολόμ. στον $D(a,\rho)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

Άρα, $\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$: ανάπτυγμα Laurent.

Άρα, ~~Res(f~~ η f έχει απλό πόλο (τάξης 1) στο a, και $\mathrm{Res}(f'/f, a)=m$.

→ Αν η f έχει πόλο τάξης m στο a, τότε η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο τάξης 1 με $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f},a\right)=-$

Λύση: (όπως πριν):

$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $\forall z\in D(a,\rho)$, για κάποιο $\rho>0$, ώστε g ολόμορφη στο $D(a,\rho)$ και $g(a)\neq 0$, και η g δεν έχει καμία ρίζα στον $D(a,\rho)$.

Και:

$$f'(z)=\frac{g'(z)\cdot(z-a)^m-g(z)\cdot m\cdot(z-a)^{m-1}}{(z-a)^{2m}}.$$

Άρα: $$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\frac{g'(z)\cdot(z-a)^m}{(z-a)^{2m}}}{\frac{g(z)}{(z-a)^m}}-\frac{\frac{g(z)\cdot m\cdot(z-a)^{m-1}}{(z-a)^{2m}}}{\frac{g(z)}{(z-a)^m}}$$

$$=\frac{g'(z)\cdot\cancel{(z-a)^{2m}}}{g(z)\cdot\cancel{(z-a)^{2m}}}-\frac{\cancel{g(z)}\cdot m\cdot(z-a)^{2m-1}}{\cancel{g(z)}\cdot(z-a)^{2m}}=$$

$$=\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{m}{z-a}.$$

Η g είναι ολόμορφη στον $D(a,\rho)$, άρα $\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{f(z)}=\infty$. Άρα, η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο στο a. Και:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n (z-a)^n, \text{ αφού } \frac{g'}{g} \text{ ολόμορφη}$$

στον $D(a,\rho)$.

Άρα, $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{-m}{z-a} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} l_n (z-a)^n$,

ανάπτυγμα Laurent.

Άρα, ο πόλος a είναι απλός, και $\mathrm{Res}\left(f'/f, a\right) = -m$.

Τοπολογία: 16/1/08.

(7) Θεώρημα (επέκτασης του Tietze)

Έστω X φυσιολογικός χώρος και $F \subseteq X$ κλειστό. Αν $f: F \to [a,b]$ (όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$) είναι συνεχής, τότε $\exists\, g: X \to [a,b]$ συνεχής, ώστε $g|_F = f$, δηλ. g επεκτείνει την f.

Απόδειξη: Ισχυρισμός: Αν $r>0$ και

$f: F \to [-r,r]$ συνεχής, τότε $\exists\, g: X \to \mathbb{R}$ συνεχής, ώστε

$$|g(x)| \le \frac{r}{3},\ \forall x \in X, \text{ και } |f(x)-g(x)| \le \frac{2}{3} r,\ \forall x \in F.$$

Τριχοτομούμε το $[-r,r]$ στα διαστήματα

$I_1 = \left[-r, -\frac{r}{3}\right]$, $I_2 = \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]$, και

$I_3 = \left[\frac{r}{3}, r\right]$, το καθένα μήκους $\frac{2r}{3}$.

Θέτουμε: $A = f^{-1}(I_1)$ και $B = f^{-1}(I_3)$.

Τότε, τα A, B είναι ξένα και κλειστά στο F, και άρα κλειστά στο X (αφού F κλειστό). Αφού X φυσιολογικός, από Λ. Urysohn (παρατ.): $\exists\, g: X \to \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]$ ώστε $g(A) \subseteq \left\{-\frac{r}{3}\right\}$, $g(B) \subseteq \left\{\frac{r}{3}\right\}$.