Μάθημα 24/1/2008 (Τρίωρο) (1)

(67)

Άσκηση 51

Αν f είναι ακέραια συνάρτηση και $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$, δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ με $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$. Η g είναι ολόμορφη σαν σύνθεση ολομόρφων συναρτήσεων. Προφανώς το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία για την g.

Επειδή $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ έπεται άμεσα (με τον ορισμό) ότι $\lim_{z\to 0} g(z)=\infty$. Άρα η g έχει πόλο στο 0 έστω τάξης $m_0\in\mathbb{N}$, $m_0\geq 1$. Τότε υπάρχουν μοναδικά c_{-n}, $n=1,2,\dots,m_0$, c_n, $n=0,1,2,\dots \in \mathbb{C}$ ώστε

$$g(z)=\sum_{n=1}^{m_0}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad \forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \quad (1)$$

(Ανάπτυγμα Laurent της g στο $\Delta(0,0,+\infty)$).

Από την (1) για κάθε $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ συγκλίνει.

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ είναι $+\infty$. Θέτουμε

$F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Προφανώς

η F είναι ακέραια συνάρτηση από το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών.

Έστω τώρα $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ να είναι μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών όπου

$z_\nu \to \infty$. Τότε $\dfrac{1}{z_\nu^m} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0$ για κάθε

$m=1,2,\dots$ Άρα

$$\lim_{\nu\to+\infty} \sum_{n=1}^{m_0} \frac{c_{-n}}{z_\nu^n} = 0 \quad (2)$$

Αφού $z_\nu \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{z_\nu} \to 0$. Η f σαν ακέραια

είναι συνεχής στο 0. Άρα από την αρχή της μεταφοράς

αφού $\dfrac{1}{z_\nu} \to 0 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{z_\nu}\right) \to f(0) \Leftrightarrow$

$g(z_\nu) \to f(0)$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) και τον ορισμό της F

έπεται ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} F(z_\nu) = f(0) \in \mathbb{C}$.

Αυτό ισχύει για κάθε ακολουθία $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $z_\nu \to \infty$. Άρα $\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0) \in \mathbb{C}$. Απ' αυτό έπεται εύκολα ότι η F είναι φραγμένη και άρα από Liouville η F είναι σταθερή, έστω $F(z) = c_0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Άρα από την (1) έχουμε

$$g(z) = \sum_{n=1}^{m_0} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_0 = f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ για κάθε}$$

$z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Απ' αυτό έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n + c_0 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{m_0} c_{-n} z^n$

Τότε βέβαια $f(z) = P(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Αλλά η f και το P είναι συνεχείς στο 0 και άρα

$f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} P(z) = P(0)$. Άρα $f(z) = P(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Άρα $f = P$ δηλαδή η f είναι ένα πολυώνυμο.

N. N.

Άσκηση 39

(a) Έστω $r>0$, $g : \Delta(0,0,r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|g(z)| \geq \frac{1}{|z|^m}$ για κάθε $z \in \Delta(0,0,r)$. Αποδείξτε ότι το 0 είναι πόλος της g τάξης $\geq m$.

(b) Έστω f ακέραια συνάρτηση, $n \in \mathbb{N}$ και $R>0$ ώστε $|f(z)| \geq |z|^n$ για κάθε z με $|z|>R$. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού $\geq n$.

Απόδειξη

Θα κάνουμε πρώτα το (b).

(b).

Από την υπόθεση έπεται εύκολα ότι $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Απ' αυτό, το γεγονός ότι η f είναι ακέραια και την άσκηση 51 που δείξαμε προηγούμενα έπεται ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού έστω m

Έστω ότι $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$

Έχουμε τώρα για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(z)}{z^n} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_2 z + a_0}{z^n} =$$

$$= \frac{z^m \left(a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right)}{z^n} =$$

$$= z^{m-n} \left(a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right)$$

Άρα για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχουμε:

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} \right| = \left| z^{m-n} \left(a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right) \right|$$

$$= |z|^{m-n} \left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right|$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $m < n$. Τότε έχουμε ότι

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} = \frac{1}{|z|^{n-m}} \left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right| \quad (1)$$

για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Από τη (1) έπεται ότι

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^{n}} = 0$$ άτοπο αφού για κάθε

$z \in \mathbb{C}$ με $|z| > R$ έχουμε από την υπόθεση ότι

$\frac{|f(z)|}{|z|^{n}} \geq 1$ Άρα τελικά ισχύει ότι $m \geq n$.

(α)

Από την υπόθεση για την g έπεται εύκολα ότι $\lim_{z\to 0} g(z) = \infty$. Προφανώς το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία για την g και άρα η g έχει πόλο στο 0 έστω τάξης n. Τότε (από γνωστό θεώρημα) υπάρχει μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $f: \Delta(0,\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ για κάποιο $\varepsilon_0 \in (0,r)$ ώστε

$g(z) = \frac{f(z)}{z^{n}}$ (1) για κάθε $z \in \Delta(0,\varepsilon_0) - \{0\}$ με

$f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0,\varepsilon_0)$. Άρα από την υπόθεση και την (1) έπεται ότι:

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n}}\right| \geq \frac{1}{|z|^{m}} \quad \forall z \in \Delta(0,\varepsilon_0) - \{0\} \iff$$

$$|f(z)| \geq |z|^{n-m} \quad \forall z \in \Delta(0,\varepsilon_0) \setminus \{0\} \quad (2)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $n<m$. Τότε

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^{m-n}} = \infty \Rightarrow \lim_{z\to 0} |z|^{n-m} = +\infty \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$

άτοπο αφού η f είναι ολόμορφη στο $\Delta(0,\varepsilon_0)$

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι $f(z)\neq 0$ $\forall z\in\Delta(0,\varepsilon_0)$ είναι προφανώς περιττή, έτσι θα μπορούσαμε να πάρουμε την $f: \Delta(0,r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.

~ . ~

Άσκηση (βοηθητική) (Δεν υπάρχει στο φυλλάδιο αλλά έχει σαν άμεση συνέπεια την άσκηση 40 του φυλλαδίου)

Έστω f ακέραια, μη σταθερή συνάρτηση. Τότε το πεδίο τιμών της f ($f(\mathbb{C})$) είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη

Απο την πραγματική ανάλυση για να δείξουμε ότι το $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δίσκο $D(z,R)$, $z\in\mathbb{C}$, $R>0$ ισχύει $D(z,R)\cap f(\mathbb{C})\neq\emptyset$.

Ας υποθέσουμε (για να φτάσουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R>0$ ώστε $D(z_0, R) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$. Μεταφράζοντας αυτή τη σχέση έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ το $f(z) \notin D(z_0, R) \Rightarrow |f(z) - z_0| \geq R$ (1)

Άρα $f(z) - z_0 \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα από την (1) έχουμε ότι: $\dfrac{1}{|f(z) - z_0|} \leq \dfrac{1}{R}$ (2) για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$g(z) = \dfrac{1}{f(z) - z_0}$. Η g είναι προφανώς καλά ορισμένη και ολόμορφη, δηλαδή η g είναι ακέραια συνάρτηση. Από την (2) έχουμε ότι $|g(z)| \leq \dfrac{1}{R}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δηλαδή η ακέραια συνάρτηση g είναι φραγμένη. Άρα από το Θεώρημα Liouville έπεται ότι η g είναι σταθερή. Άρα υπάρχει $c_0 \in \mathbb{C}$ ώστε $g(z) = c_0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα από τον ορισμό της g

(75)

έχουμε ότι $\dfrac{1}{f(z)-z_0} = c_0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Από τον ορισμό της g έχουμε ότι $c_0 \neq 0$.

Άρα έπεται ότι $f(z) = \dfrac{1}{c_0} + z_0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση άτοπο από την υπόθεση. Άρα τελικά έχουμε το $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$

~ . ~.

Τώρα μπορούμε να λύσουμε εύκολα την άσκηση 40.

Άσκηση 40

Έστω f ακέραια συνάρτηση με την ιδιότητα $\operatorname{Re} f(z) > 0$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Απόδειξη

Θεωρούμε το "δεξί" ημιεπίπεδο $I := \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(\mathbb{C}) \subseteq I$ (1).

Έστω ότι η f είναι ακέραια μη σταθερή συνάρτηση. Τότε έχουμε $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\overline{I} = \mathbb{C}$ άτοπο. Γιατί αν πάρουμε τυχόν $z_0 \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z_0) < 0$ υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\Delta(z_0, \rho) \cap I = \emptyset$ και άρα το I δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Άρα η f είναι σταθερή και $f(z) = c_0 \; \forall z \in \mathbb{C}$ με $c_0 \in I$.

(70)

Άσκηση 52

Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$. Δείξτε ότι

$$\sum \left\{ Res\left(\frac{1}{P(z)}, \rho\right) : P(\rho) = 0 \right\} = 0$$

Λύση

Έστω $P(z) = \alpha_{n_0} z^{n_0} + \alpha_{n_0-1} z^{n_0-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$

όπου $n_0 = \deg(P(z))$ και $\alpha_{n_0} \neq 0$, $n_0 \geq 2$.

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq 1$ έχουμε

$|\alpha_i| |z|^i \leq |\alpha_i| \cdot |z|^{n_0-2}$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, n_0-1$ (1)

Προσθέτω κατά μέλη τις προηγούμενες n_0 ανισότητες κ. έχω:

$$\sum_{i=0}^{n_0-1} |\alpha_i| |z|^i \leq \sum_{i=0}^{n_0-2} |\alpha_i| |z|^{n_0-2} = \left(\sum_{i=0} |\alpha_i|\right) |z|^{n_0-2} \quad (2)$$

Θέτουμε $M = \sum_{i=0}^{n_0-2} |\alpha_i|$ (3). Από τις (2) και (3) έχουμε:

$$\left| \sum_{i=0}^{n_0-2} \alpha_i z^i \right| \leq M|z|^{n_0-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left| \sum_{i=0}^{n_0-2} \alpha_i z^i \right| \geq -M|z|^{n_0-2} \Rightarrow$$

$$|\alpha_{n_0}||z|^{n_0} - \left|\sum_{i=0}^{n_0-1} \alpha_i z^i\right| \geq |\alpha_{n_0}||z|^{n_0} - M|z|^{n_0-1} =$$

$$= |z|^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{|z|}\right) \quad (4)$$

Η (4) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq 1$.

Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$ έχουμε

$$|P(z)| = \left|\sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i z^i\right| = \left|\alpha_{n_0} z^{n_0} + \sum_{i=0}^{n_0-1} \alpha_i z^i\right|$$

Τριγ. ανισότητα

$$\geq \left|\,|\alpha_{n_0} z^{n_0}| - \left|\sum_{i=0}^{n_0-1} \alpha_i z^i\right|\,\right| \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$ έχουμε:

$$|P(z)| \geq |z|^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{|z|}\right) \quad (6)$$

Θέτουμε τώρα $R_0 := \max\left\{\frac{M}{|\alpha_{n_0}|}, 1\right\}$

Τώρα για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \in \left(D(0, R_0)\right)^c =$

$= \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R_0)}$ έχουμε $|z| > 1$ και

$|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{|z|} > 0$ και τότε έχουμε από την (6) ότι

$|P(z)| \geq |z|^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{|z|}\right) > 0$ για κάθε $z \in \left(\overline{D(0,R_0)}\right)^c$. Άρα για κάθε $z \in \left(\overline{D(0,R_0)}\right)^c$

έχουμε ότι $0 < \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{|z|^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{|z|}\right)}$ (7)

Επιλέγουμε τώρα τυχαίο $R > R_0$ και τυχαίο $z_0 \in \mathbb{C}$ με $|z_0| = R$. Τότε $|z_0| > R_0 \Rightarrow z_0 \in \left(\overline{D(0,R_0)}\right)^c$

$$\Rightarrow 0 < \left|\frac{1}{P(z_0)}\right| < \frac{1}{|z_0|^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{|z_0|}\right)} = \frac{1}{R^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{R}\right)}$$

Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = R > R_0$ έχουμε ότι

$$0 < \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{R^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{R}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in C(0,R)} \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{R^{n_0}\left(|\alpha_{n_0}| - \frac{M}{R}\right)} \quad (8)$$

Έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_0}$ να είναι οι ρίζες του P

Θέτουμε $\rho_0 := \max\{|\rho_1|, |\rho_2|, \dots, |\rho_{n_0}|, R_0\}$

Θεωρούμε τυχαίο $R > \rho_0$. Τότε πάνω στον κύκλο $C(0,R)$ το P δεν έχει ρίζα και επειδή $R > R_0$ ορίζεται η $\frac{1}{P}$ στον κύκλο $C(0,R)$ και γι' αυτό το R ισχύει η (8). Έτσι το ολοκλήρωμα

$$\int_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)}\, dz$$

είναι καλά ορισμένο. Ας εκτιμήσουμε αυτό το ολοκλήρωμα για τα $R > \rho_0$.

Έχουμε:

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)}\, dz \right| \leq \mu(C(0,R)) \cdot \sup_{z \in C(0,R)} \left| \frac{1}{P(z)} \right| \quad (9)$$

Τώρα για τυχόν $R > \rho_0$ ισχύουν οι (8) και (9) και άρα έχουμε ότι

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)}\, dz \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{1}{R^{n_0}\left(|a_{n_0}| - \frac{M}{R}\right)} \quad (10)$$

Άρα $\left| \int_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)} dz \right| \leq \frac{2\pi}{R^{n_0-1}\left(|a_{n_0}| - \frac{M}{R}\right)}$ (11)

για κάθε $R > \rho_0$. Επειδή $n_0 \geq 2 \Rightarrow n_0 - 1 \geq 1$

από την (11) παίρνουμε παίρνοντας όρια όταν $R \to +\infty$ ότι

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)} dz \right| = 0 \quad (12)$$

Η $\frac{1}{P}$ έχει προφανώς πόλους στα $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n_0}$ (όπου κάποια απ' αυτά μπορεί να είναι και ίσα).
Άρα για κάθε $R > \rho_0$ από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε ότι

$$\int_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)} dz = 2\pi i \cdot \sum \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P}, \rho\right) : P(\rho) = 0 \right\} \quad (13)$$

Από τις (12) και (13) έχουμε ότι:

$$\sum \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P}, \rho\right) : P(\rho) = 0 \right\} = 0$$

$\sim . \sim .$

Άσκηση 53

Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$ με απλές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\rho_j)} = 0$

Λύση

Έστω n_0 να είναι ο βαθμός του P.

Αφού $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_0}$ είναι οι ρίζες του P τότε έχουμε $P(z) = \alpha_{n_0}(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n_0})$ (όπου α_{n_0} είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του P) για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C} - A$ όπου $A = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_0}\}$ έχουμε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{\alpha_{n_0}(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n_0})} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n_0}} \cdot \left(\frac{A_1}{z-\rho_1} + \frac{A_2}{z-\rho_2} + \dots + \frac{A_{n_0}}{z-\rho_{n_0}} \right)$$ (γνωστό από την Άλγεβρα).

<u>κάνοντας απαλοιφή παρανομαστών</u>

$(A_1, A_2, \dots, A_{n_0} \in \mathbb{C})$

$$= \frac{1}{\alpha_{n_0}} \left(\frac{A_1(z-\rho_2)(z-\rho_3)\cdots(z-\rho_{n_0}) + \dots + A_{n_0}(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n_0-1})}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n_0})} \right)$$

Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus A$ έχουμε

$$1 = A_1(z-\rho_2)(z-\rho_3)\cdots(z-\rho_{n_0}) +$$
$$+ A_2(z-\rho_1)(z-\rho_3)\cdots(z-\rho_{n_0}) + \dots +$$
$$+ A_{n_0}(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{n_0-1}) \quad (1)$$

Στην (1) έχουμε την ισότητα δυο πολυωνύμων που ταυτίζονται σε όλο το $\mathbb{C}$ εκτός (πιθανώς) από το A. Τότε τα δυο αυτά πολυώνυμα ταυτίζονται και σε όλο το $\mathbb{C}$.

Άρα τελικά η (1) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Για $z = \rho_1$ η (1) μας δίνει ότι

$$A_1 = \frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\cdots(\rho_1-\rho_{n_0})}$$. Ανάλογα παίρνουμε

(θέτοντας διαδοχικά $z=\rho_2, z=\rho_3, \dots, z=\rho_{n_0}$ στην (1))

ότι

8

Γενικά παίρνουμε ότι

$$A_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu_0} (\rho_i - \rho_j)} \quad \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,\nu_0 \quad (2)$$

Έχουμε τώρα ότι

$$P(z) = \alpha_{\nu_0}(z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{\nu_0}) \text{ . Άρα}$$

$$P'(z) = \alpha_{\nu_0}\Big((z-\rho_2)(z-\rho_3)\cdots(z-\rho_{\nu_0}) +$$

$$+ (z-\rho_1)(z-\rho_3)\cdots(z-\rho_{\nu_0}) + \cdots + (z-\rho_1)(z-\rho_2)\cdots(z-\rho_{\nu_0-1})\Big) \quad (3)$$

Από την (3) θέτοντας διαδοχικά $z=\rho_1,\rho_2,\ldots$, έχουμε ότι $P'(\rho_i) = \alpha_{\nu_0} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu_0} (\rho_i - \rho_j)$ για κάθε $i=1,2,\ldots,\nu_0$ (4). Επειδή οι ρίζες του P είναι απλές έχουμε ότι $P'(\rho_i) \neq 0$ για κάθε $i=1,2,\ldots,\nu_0$

Από τις (2) και (4) παίρνουμε ότι

$$A_i = \frac{\alpha_{\nu_0}}{P'(\rho_i)} \quad \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,\nu_0 \quad (5)$$

84

Άρα από την (5) έχουμε:

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{p'(\rho_i)} \cdot \frac{1}{z-\rho_i} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \setminus A$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g_1(z) = \sum_{i=2}^{n_0} \frac{1}{p'(\rho_i)} \cdot \frac{1}{z-\rho_i}$

Έστω $\tau = \min\{|\rho_1 - \rho_i|, i=2,3,\ldots,n_0\}$. Η g_1 είναι ολόμορφη στον δίσκο $D(\rho_1, \tau)$ προφανώς. Άρα η g_1 αναλύεται σε δυναμοσειρά Taylor με με κέντρο το ρ_1 ως εξής:

$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^1 (z-\rho_1)^n$. Άρα στον δακτύλιο $\Delta(\rho_1, 0, \tau)$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{p'(\rho_1)(z-\rho_1)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^1 (z-\rho_1)^n \quad (6)$$

Άρα η $\frac{1}{p}$ αναλύεται κατά Laurent όπως στην (6) στο ρ_1. Άρα από την (6) έχουμε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{p}, \rho_1\right) = \frac{1}{p'(\rho_1)}$$

Ανάλογα για κάθε $i=2,3,\dots,n_0$ παίρνουμε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{P},\rho_i\right)=\frac{1}{P'(\rho_i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_0}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{P},\rho_i\right)=\sum_{i=1}^{n_0}\frac{1}{P'(\rho_i)}.$$ Άρα

από την άσκηση (52) έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n_0}\frac{1}{P'(\rho_i)}=0.$$

~ . ~

Κατ' αρχήν θα λύσουμε την παρακάτω άσκηση απειροστικού λογισμού πριν πάμε στην επόμενη άσκηση

Άσκηση

Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

Απόδειξη

Παίρνουμε τυχαίο αλλά σταθερό $m_0\in\mathbb{N}$, $m_0\geq 2$ έπειτα και ενα τυχαίο $\ell\in\mathbb{N}$ ώστε $\ell>m_0^{m_0+1}$. Τότε $\ell+m_0>m_0^{m_0+1}$ (1)

Έχουμε τώρα ότι

$m_0+j > m_0$ για κάθε $j=1,2,\dots,\ell-1$

Άρα $m_0(m_0+2)(m_0+2)\cdot\ldots\cdot(m_0+\ell-1) > m_0^{\ell}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$m_0(m_0+1)\cdots(m_0+\ell) > m_0^{\ell+m_0+1} \Rightarrow$

$(m_0+\ell)! > m_0^{\ell+m_0+1} > m_0^{\ell+m_0}$. Άρα υπάρχει

$n_0 > m_0$ ώστε $n_0! > m_0^{n_0}$. Άρα

απο δείξαμε ότι για κάθε $m\in\mathbb{N}$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$

ώστε $n! > m^n$. Για το ~~σταθερό~~ σταθερό m_0 που πήραμε

προηγούμενα θα δείξουμε τώρα επαγωγικά ότι

$n! \geq m_0^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq \ell+m_0$

Για $n=\ell+m_0$ το δείξαμε. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο

$k\in\mathbb{N}$, $k\geq \ell+m_0$ ισχύει ότι $k! > m_0^k$ (3). Τότε

έχουμε $k>m_0 \Rightarrow k+1 > m_0$ (4). Πολλαπλασιάζουμε τις

(3) και (4) κατά μέλη κι έχουμε: $(k+1)! > m_0^{k+1}$.

Άρα επαγωγικά παίρνουμε ότι $n! > m_0^n$ για κάθε

$n\geq \ell+m_0$. Άρα τελικά για κάθε $m\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι

υπάρχει $n(m)\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n(m)$

να ισχύει $n! > m^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} > m$

Έχουμε τώρα άμεσα ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.

~ . ~.

Είμαστε έτοιμοι τώρα για να λύσουμε την άσκηση 41

Άσκηση 41

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!+1)z^n}$$

Λύση

Για να μελετήσουμε το παραπάνω όριο θα πρέπει πρώτα να βρούμε για ποιά $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ υπάρχει το $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!+1)z^n} \in \mathbb{C}$.

Αρκεί γι' αυτό να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!+1)} z^n$.

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!+1}} \to 0$$ αφού $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!+1}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

Για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!+1)} z^n$ από το θεώρημα Cauchy-Hadamard πρέπει να υπολογίσουμε το $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!+2}\right|} =$

$$= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!+2}} = 0$$

Άρα $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!+2}\right|}} = +\infty.$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!+1}\right) z^n$ είναι $+\infty$. Θέτουμε λοιπόν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!+2}\right) z^n \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Τότε από το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών έχουμε ότι η f είναι ακέραια συνάρτηση

Ας πάρουμε τώρα μια σταθερή συνάρτηση $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $g(z) = c_0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου $c_0 \in \mathbb{C}$. Τότε βέβαια η g αναλύεται σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 κατά μοναδικό τρόπο ως εξής $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ όπου $c_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Απ' αυτό έπεται ότι $g \neq f$. Άρα η f δεν μπορεί να είναι σταθερή συνάρτηση.

Για μια ακέραια μη σταθερή συνάρτηση όπως η f δεν υπάρχει το $\lim_{z \to \infty} f(z)$ γιατί αν υπήρχε εύκολα θα βγάζαμε (απο θεώρημα Liouville) ότι η f θα ήταν σταθερή (που δεν είναι).

Προφανώς για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n!+1}\right) \frac{1}{z^n} \in \mathbb{C}.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το

$\lim_{z \to 0} \sum_{n=2} \frac{1}{(n!+1) z^n}$. Τότε βέβαια υπάρχει

το $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$. Αλλά εύκολα βλέπουμε (με τον ορισμό του ορίου στο άπειρο) ότι $\lim_{w \to \infty} f(w) = \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$. Άρα υπάρχει το $\lim_{w \to \infty} f(w)$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει το

$$\lim_{z \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!+1) z^n}.$$

~ . ~

Παρατηρήσεις πάνω σε κάποιες ασκήσεις του φυλλαδίου II.

Οι ασκήσεις 45, 47, 48 είναι εκτός ύλης, η άσκηση . 44 υπάρχει αναλυτικά λυμένη στο βιβλίο, η άσκηση 46 είναι εύκολη χρησιμοποιώντας πού η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται και είναι συνεχής.

Για το τέλος μια άσκηση από την εξεταστική του Σεπτεμβρίου 2007.