PL
Δευτέρα, 11 Οκτωβρίου 2021 1:13 μμ

Αμερόληπτες εκτιμήτριες (Unbiased)

Εάν $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$, τότε μια σ.σ. $U = U(\underset{\sim}{x}) = U(X_1, \dots, X_\nu)$ λέγεται αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ εάν: $E(U) = \theta, \ \forall \theta \in \mathbb{R}$

(*) Η $U = U(\underset{\sim}{x})$ καλείται α.ε. της $g(\theta)$ εάν: $E(U) = g(\theta), \ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Πχ) Αν $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\theta, \sigma^2)$, σ^2-γνωστό.
Να εξετασθεί αν οι παρακάτω σ.σ. είναι α.ε. του θ.

α) $T_1(\underset{\sim}{x}) = X_i$, β) $T_2(\underset{\sim}{x}) = \frac{X_1 + X_2}{2}$, γ) $T_3(\underset{\sim}{x}) = \overline{X}$

α) $E(T_1(\underset{\sim}{x})) = E(X_i) = \theta$

β) $E(T_2(\underset{\sim}{x})) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[E(X_1) + E(X_2)\right]$

$$= \frac{1}{2}(\theta + \theta) = \theta$$

γ) $E(T_3(\underset{\sim}{x})) = E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} E(X_i)$

$$= \frac{1}{\nu} \cdot \nu\theta = \theta .$$

Από τις α.ε. του θ, ποια διαλέγουμε;

α) $V(T_1(\underline{X})) = V(X_i) = \sigma^2$

β) $V(T_2(\underline{X})) = V\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(V(X_1)+V(X_2)\right) = \frac{\sigma^2}{2}$

γ) $V(T_3(\underline{X})) = V(\bar{X}) = \frac{1}{\nu^2} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} V(X_i) = \frac{1}{\nu^2} \nu \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\nu}$

Συνεπώς, η $T_3(\underline{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια ελαχίστης διασποράς (α.ε.ε.δ.)

P2

Δευτέρα, 11 Οκτωβρίου 2021 1:53 μμ

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από Bernoulli(θ).

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σ.σ. είναι α.ε. της παραμέτρου θ ή της συνάρτησης $g(\theta) = \theta^2$.

$T_1(\underline{x}) = \overline{X}$, $T_2(\underline{x}) = \dfrac{X_1 + X_\nu}{2}$, $T_3(\underline{x}) = X_1 \cdot X_\nu$

$$T_4(\underline{x}) = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \dots + X_{\nu-1}X_\nu}{c}$$

α) $E(T_1(\underline{x})) = E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i)$

$$= \frac{1}{\nu}\cdot\nu\cdot\theta = \theta$$

β) $E(T_2(\underline{x})) = E\left(\frac{X_1+X_\nu}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(X_\nu)\right)$

$$= \frac{1}{2}(\theta + \theta) = \theta$$

γ) $E(T_3(\underline{x})) = E(X_1 \cdot X_\nu) = E(X_1)\cdot E(X_\nu) = \theta^2$

δ) $E(T_4(\underline{x})) = E\left(\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \dots + X_{\nu-1}X_\nu}{c}\right) =$

$$= \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{\nu-1} E(X_iX_{i+1}) = \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{\nu-1} E(X_i)\cdot E(X_{i+1})$$

$$= \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{\nu-1}\theta^2 = \frac{(\nu-1)\cdot\theta^2}{c}$$

άρα α.Σ. του σ^2 αν: $c = \nu - 1$.

P3

Δευτέρα, 11 Οκτωβρίου 2021 2:05 μμ

Κατανομή χ^2 (chi-square)

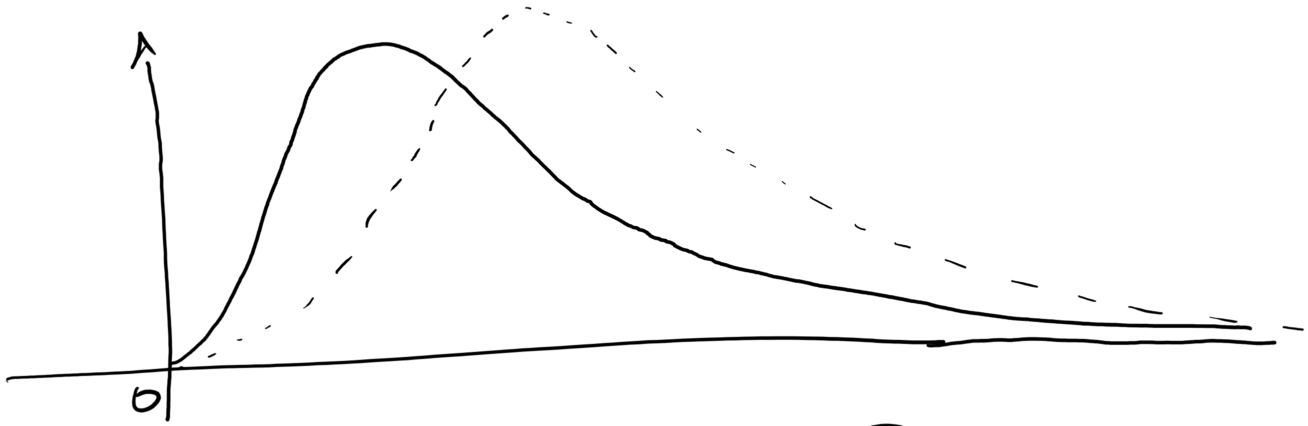
Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ν-ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. από την $N(0,1)$.

Η κατανομή της τ.μ.

$$U = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_\nu^2$$

λέγεται χ^2 (χι-τετράγωνο) με ν-βαθμούς ελευθερίας (β.ε.). Συμβολικά:

$$\chi_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} N(0,1)^2$$



Η χ^2 κατανομή είναι λοξή προς τα δεξιά και καθώς οι β.ε. αυξάνουν, η λοξότητα μειώνεται.

Έχει:

$\mapsto E(\chi_\nu^2) = \nu$

↳ $V(\chi^2_\nu) = 2\nu$.

και προσεγγίζεται από τη κανονική όταν $\nu \to \infty$.

Οι συνήθεις πίνακες της χ^2_ν δίνουν τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία $\chi^2_{\alpha,\nu}$, όπου:

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \alpha$$

Αν $X \sim \chi^2_k$, τότε:

$$f(x;k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot x^{k/2-1} \cdot e^{-x/2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

↳ $\text{Gamma}\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Κατανομή t (student-t)

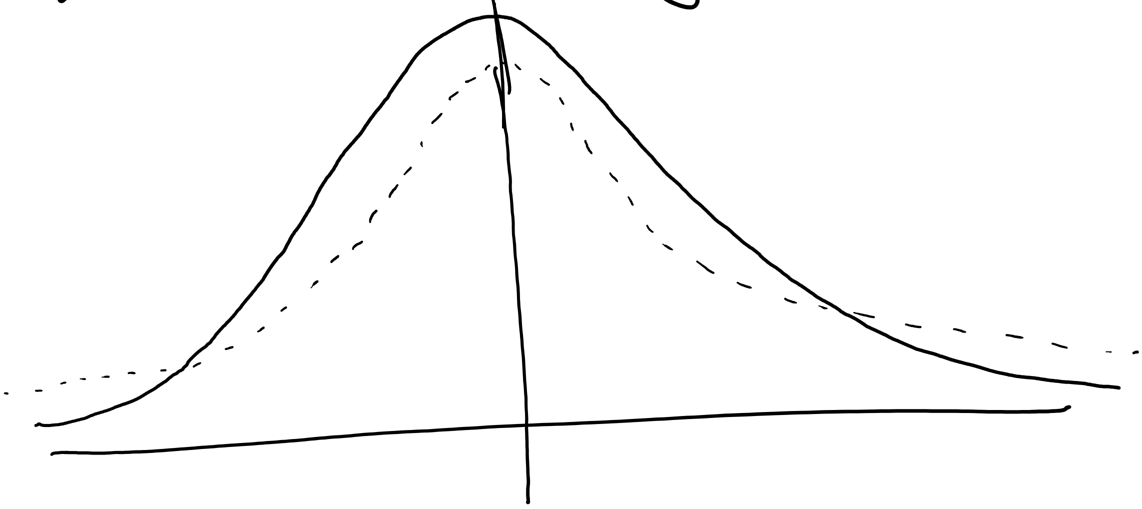
Έστω $X \sim N(0,1)$ και $Y \sim \chi^2_\nu$ και X, Y ανεξάρτητες. Τότε η κατανομή της τ.μ.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$$

λέγεται t-κατανομή με ν-β.ε.

Συμβολικά: $$t_\nu = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}}$$

Η t-κατανομή είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα $X=0$ και μοιάζει πολύ με τη κανονική



$\hookrightarrow E(t_\nu)=0$

$\hookrightarrow V(t_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}, \quad \nu > 2$

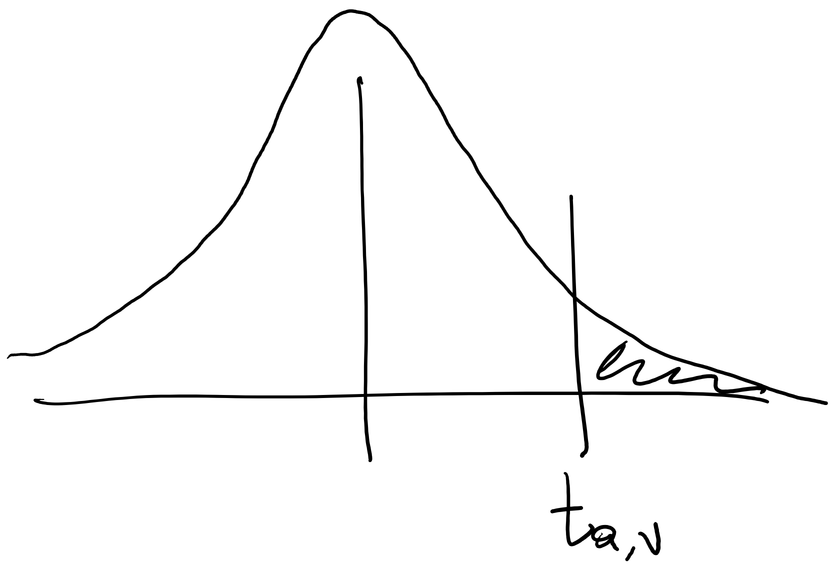
και επιπλέον $\underset{(\nu\to\infty)}{t_\infty} = N(0,1)$.

Οι πίνακες δίνουν τα ποσοστιαία σημεία:

$$P(T_\nu \geq t_{a,\nu}) = a.$$

Έστω $X \sim T_\nu$

Τότε: $P(X \geq t_{a,\nu}) = a$



PS

Δευτέρα, 11 Οκτωβρίου 2021 2:32 μμ

Κατανομή F

Έστω $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ κ' $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ και X_1 κ' X_2 ανεξάρτητες. Τότε, η κατανομή της τ.μ.

$$T = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

λέγεται F-κατανομή με ν_1, ν_2 β.ε.

Συμβολικά: $F_{\nu_1,\nu_2} = \dfrac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}$

Έχουμε:

$\hookrightarrow E(F_{\nu_1,\nu_2}) = \dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}, \quad \nu_2 > 2$

$\hookrightarrow V(F_{\nu_1,\nu_2}) = \dfrac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}, \quad \nu_2 > 4$

Τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία ορίζονται

$$P(F_{v_1,v_2} \geq F_{a,v_1,v_2}) = a$$

Με βάση τους ορισμούς, έχουμε

$$F_{1,v} = \frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_v/v} = \frac{N(0,1)^2}{\chi^2_v/v} = \left[\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_v/v}}\right]^2 = t_v^2$$