Συχνά μας απασχολεί η κατανομή της $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i$

όπου $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από ....

- Poisson(λ). Τότε: $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Poisson(\nu\lambda)$.
- Bernoulli(p). Τότε $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Bin(\nu, p)$
- $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε: $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu, \nu\sigma^2)$

  <u>κ'</u> $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)$.
- $Exp(\theta)$. Τότε: $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim Gamma(\nu, \theta)$

<u>Παρατήρηση</u>. Οι κατανομές Εκθετική – Gamma – χ^2 συνδέονται:

– Η $Gamma(1, \theta)$ είναι η $Exp(\theta)$.

– Η $Gamma\left(\frac{r}{2}, 2\right)$ (τύπου I) ή $Gamma\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (τύπου II) είναι χ^2_r

<u>Εκθετική</u>

Είναι χ^2_r | Εκθετική

I) $f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-x/b}$ || $f(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{-x/b}$

II) $f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$ || $f(x) = b \cdot e^{-bx}$

Συνήθως, για χ^2_r έχουμε: $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2}) 2^{r/2}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x/2}$

– Η χ^2_2 είναι Gamma$(\frac{2}{2}, 2) \equiv$ Gamma$(1, 2)$
ή Gamma$(1, \frac{1}{2})$ (τύπου II)

– Αν $X_1, \ldots, X_\nu$ α.δ. από Exp(2) (τύπου I)

τότε: $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim$ Gamma$(\nu, 2)$

ή ισοδύναμα $\chi^2_{2\nu}$

P2

Δευτέρα, 1 Νοεμβρίου 2021 1:51 μμ

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω $Z \sim Gamma(\nu,\theta)$ και

$$f_Z(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)\theta^\nu} \cdot z^{\nu-1} e^{-z/\theta}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \nu,\theta > 0$$

Τότε: $T = 2Z/\theta \sim \chi^2_{2\nu}$

Έχουμε: $F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(\frac{2Z}{\theta} \leq t\right)$

$$= P\left(Z \leq \frac{t\theta}{2}\right) = F_Z\left(\frac{t\theta}{2}\right).$$

<u>Οπότε</u>: $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt} F_Z\left(\frac{t\theta}{2}\right) =$

$$= f_Z\left(\frac{t\theta}{2}\right) \cdot \frac{\theta}{2}$$

Συνεπώς: $f_T(t) = \frac{\cancel{\theta}}{2} \frac{1}{\Gamma(\nu)\cancel{\theta^\nu}} \left(\frac{t\cancel{\theta}}{2}\right)^{\nu-1} \cdot e^{-t\cancel{\theta}/2\cancel{\theta}}$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu) 2^\nu} \cdot t^{\nu-1} e^{-t/2}$$

Συνεπώς: $T = \dfrac{2Z}{\theta} \sim \chi^2_{2N}$

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από εκθετική κατανομή σππ $f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta>0$. Να βρεθεί επαρκής κ' πλήρης σ.σ. για το θ.

Επαρκεια: Παραγοντικό κριτήριο

$$f(x_1,\dots,x_\nu;\theta)=\prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{\nu}\theta e^{-\theta x_i}=$$

$$=\theta^\nu \cdot e^{-\theta\sum_{i=1}^{\nu}x_i}=h(\underline{x})\cdot g(T(\underline{x});\theta)$$

όπου: $g(T(x);\theta)=\theta^\nu\cdot e^{-\theta\sum_{i=1}^{\nu}x_i}$

κ' $h(\underline{x})=1$

Άρα: $T(\underline{x})=\sum_{i=1}^{\nu}x_i$ επαρκής σ.σ. για το θ.

Για πληρότητα βρίσκω τη σ.π.π. της T, έστω $f_T(t)$.

Έχουμε: $T=\sum_{i=1}^{\nu}X_i \sim \text{Gamma}(\nu,\theta)$

$$f_T(t)=\frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)}\, t^{\nu-1}e^{-\theta t},\quad t>0$$

με: $f_T(t) = \dfrac{\quad}{\Gamma(\nu)}$

Έστω $g(T)$ μια συνάρτηση της T. Έχουμε:

$$E\left[g(T)\right] = \int_0^\infty g(t)\cdot f_T(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{g(t)\frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)}\cdot t^{\nu-1}}_{f} e^{-\theta t}\,dt = 0, \ \forall \theta > 0$$

(*) Ο μετασχηματισμός Laplace συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται ως: $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\,dt = F(s)$

για $t \geq 0$

Εδώ έχουμε: $f(t) = g(t)\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}$

Λόγω του μονοσήμαντου μετασχηματισμού Laplace έχουμε: $g(t)\cdot\dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = 0 \ , \forall t > 0$

Συνεπώς: $g(t) = 0, \forall t > 0$, άρα $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ είναι πλήρης.

P4

Δευτέρα, 1 Νοεμβρίου 2021 2:22 μμ

Πχ Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, 1)$. Να βρεθεί επαρκής κ' πλήρης σ.σ. για το μ.

Έχουμε δείξει ότι: $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ είναι επαρκής για το μ.

Επίσης: $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu, \nu)$.

Άρα: $f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \nu}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\nu} \cdot (t-\nu\mu)^2\right\}$.

Έστω $g(T)$ μια συνάρτηση του T. Έχουμε:

$E[g(T)] = 0, \ \forall \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$E[g(T)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}(t-\nu\mu)^2\right\} dt = 0, \ \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-t^2/2\nu} \cdot e^{t\mu} \cdot e^{-\nu\mu^2/2} dt = 0, \ \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-t^2/2\nu} \cdot e^{\mu t} dt = 0, \ \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \int_{-\infty} g(t) \cdot e \quad \cdot e \quad \ldots$

Δηλ. ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t)e^{-t^2/2\omega}$ είναι μηδέν $\forall t \in \mathbb{R}$

Οπότε, λόγω του μονοσήμαντου του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace έχουμε ότι:

$$g(t)e^{-t^2/2\omega} = 0 \, , \forall t \in \mathbb{R}$$

οπότε: $g(t) = 0 \, , \forall t \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς, είναι πλήρης.

PS

Δευτέρα, 1 Νοεμβρίου 2021 2:31 μμ

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(0,\sigma^2)$. Να βρεθεί επαρκής κι πλήρης σ.σ. για το σ^2.

Από το παραγοντικό κριτήριο έπεται ότι

$T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$ είναι επαρκής σ.σ. για το σ^2

Έχουμε $X_i \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$

Οπότε: $\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$

κι $Y = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{X_i^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 = \frac{T}{\sigma^2} \sim \chi^2_\nu$

Οπότε: $T = \sigma^2 Y$ και βρίσκουμε την κατανομή της T.

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(\sigma^2 Y \le t) = P\left(Y \le \frac{t}{\sigma^2}\right)$$

$$= F_Y\left(\frac{t}{\sigma^2}\right).$$

και: $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt} F_Y\left(\frac{t}{\sigma^2}\right)$

$$= f_Y\left(\frac{t}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^2} =$$

$$= f_Y\left(\frac{t}{\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\cdot\left(\frac{t}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1}\cdot e^{-t/2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{(2\sigma^2)^{\nu/2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot t^{\frac{\nu}{2}-1}\cdot e^{-t/2\sigma^2}$$

Έστω $g(T)$ συνάρτηση της T

$$E[g(T)] = 0,\ \forall \sigma^2>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty g(t)\, t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t/2\sigma^2}\, dt = 0,\ \forall \sigma^2>0$$

Οπότε, λόγω του μονοσήμαντου του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$g(t)\, t^{\nu/2-1} = 0,\ \forall t>0 \Rightarrow g(t) = 0,\ \forall t>0$$

Άρα, η T είναι πλήρης.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω ότι ...

μονοπαραμετρική ΕΟΚ με παράμετρο θ. Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από την X με:

$$f(x;\theta) = \exp\{\eta(\theta)\cdot T(x) - B(\theta)\}\cdot h(x)$$

__ΤΟΤΕ__ η σ.σ. $Y = \sum_{i=1}^{\nu} T(X_i)$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ. $\blacksquare$