P1

ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

⊛ Επιθυμητό χαρακτηριστικό εκτιμητριών : Αμερόληπτη ελάχιστης διασποράς

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από $f(x;\theta)$ και έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το θ (ή $g(\theta)$). Μια εκτιμήτρια $\delta = \delta(\underline{x})$ καλείται α.ε. του θ (ή $g(\theta)$) αν: $E(\delta) = \theta$ (ή $E(\delta) = g(\theta)$).

⟹ Ανάμεσα σε όλες τις α.ε. εκείνη με την μικρότερη διασπορά καλείται αμερ. εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς (α.ε.ε.δ.).

<u>Ορ</u> Η $\delta = \delta(\underline{x})$ καλείται α.ε.ε.δ. του θ (ή $g(\theta)$) εάν $V(\delta(\underline{x})) \le V(\delta_1(\underline{x}))$, όπου $\delta_1(\underline{x})$ οποιαδήποτε άλλη α.ε. του θ (ή $g(\theta)$).

↳ Αν οι διάφορες εκτιμήτριες του θ <u>δεν</u> είναι α.ε. θα ψάχναμε πάλι εκτίμηση με τη μικρότερη διασπορά;

Ζητάμε εκτίμηση με το μικρότερο Μ.Τ.Σ. (MSE)

Αν η εκτιμήτρια <u>δεν</u> είναι αμερόληπτη, παρουσιάζει μεροληψία:

$$b(\delta) = E(\delta) - \theta = E(\delta - \theta)$$

Οπότε, το Μ.Τ.Σ. είναι:

$$E\left[(\delta-\theta)^2\right] = V(\delta-\theta) + E[\delta-\theta]^2 = V(\delta) + [E(\delta)-\theta]^2 = V(\delta) + b(\delta)^2$$

Προφανώς, αν δ α.ε. του θ, τότε: $b(\delta)=0$

Συνεπώς: $MSE(\delta) = V(\delta)$.

P2

Τετάρτη, 3 Νοεμβρίου 2021 2:08 μμ

Σύνδεση Αμεροληψίας κ' επάρκειας

Έστω $T_1 = T_1(\underline{x})$ και $T_2 = T_2(\underline{x})$ δύο α.ε. του θ. Συνεπώς: $E(T_1) = E(T_2) = \theta$.

Έστω τώρα η $T = T(\underline{x})$ είναι επαρκής σ.σ. για το θ.

Υποθέτουμε ότι: $T_1 = f(T)$. Συνεπώς και η T_1 είναι επαρκής για το θ.

Εάν η επάρκεια για το θ έχει κάποια αξία τότε περιμένω η T_1 να είναι "καλύτερη" εκτιμήτρια από την T_2. Άρα, περιμένω:

$$V(T_1) \leq V(T_2).$$

(*) Εάν γνωρίζουμε ότι η σ.σ. $U = U(\underline{x})$ είναι α.ε. του θ, μπορώ να βελτιώσω την U χρησιμοποιώντας κάποια επαρκή σ.σ. για το θ.

ΛΗΜΜΑ: Έστω U, Y τ.μ. τ.ω. $E(U) = \theta$ κ' $V(U) > 0$, πεπερασμένη. Έστω τώρα:

$$E(U|Y=y) = w(y).$$

Τότε, η $W = w(Y)$ είναι τ.ω. $E(W) = \theta$ και: $V(W) \leq V(U)$.

(για συνεχείς) U, Y συνεχείς τ.μ. και $g(u,y)$ η από κοινού σ.π.π. Έστω $g_1(y)$ η περιθώρια σ.π.π. της Y και $g_2(u)$ η περιθ. της U, κ' $h(u|y)$ η δεσμευμένη U δοθέντος $Y=y$.

Έχουμε: $E(U|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, h(u|y)\, du$

$$E(W) = E(W(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y) \cdot g_1(y)\, dy =$$

$$= \int E(U|Y=y) g_1(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u\, h(u|y)\, du \right] g_1(y)\, dy$$

$$= \iint u \frac{g(u,y)}{g_1(y)} g_1(y)\, du\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(u,y)\, dy}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} u\, g_2(u)\, du = E(U) = \theta.$$

Άρα: $E(U) = E(W) = \theta$

Έχουμε: $V(U) = E\left[(U - E(U))^2\right] = E\left[(U - W + W - \theta)^2\right]$

$$= E\left[(U-W)^2 + (W-\theta)^2 + 2(U-W)(W-\theta)\right] =$$

$$= E\left[(U-W)^2\right] + V(W) + 2E\left[(U-W)\cdot(W-\theta)\right].$$

Έχουμε: $E\left[(U-W)\cdot(W-\theta)\right] = \iint (u-w)\cdot(w-\theta)\, g(u,y)\, du\, dy$

$$= \iint (u-w)\cdot(w-\theta)\cdot h(u|y)\cdot g_1(y)\, du\, dy =$$

$$= \int (w-\theta)\cdot g_1(y)\cdot\left[\int (u-w)\, h(u|y)\, du\right] dy.$$

Όμως: $\int (u-w)\cdot h(u|y)\, du = \int u\, h(u|y)\, du - \int w\, h(u|y)\, du$

$$= E[U|Y=y] - w(y)\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(u|y)\, du}_{\to 1} =$$

$$= w(y) - w(y) = 0.$$

Συνεπώς: $V(U) = E\left[(U-W)^2\right] + V(W) \geq V(W)$

αφού: $E\left[(U-W)^2\right] \geq 0$.

Οπότε: $V(U) \geq V(W)$.

Οπότε: $V(U) \geq V(W)$.

(*) Αλλιώς: $V(U) = V[E[U|Y]] + E[V[U|Y]]$

$$= V(W) + \underbrace{\qquad}_{\geq 0}.$$

Θ. Rao-Blackwell

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από κατανομή $f(x;\theta)$ (συνεχή ή διακριτή). Έστω επίσης $Y = Y(\underline{X})$ επαρκής σ.σ. για το θ, και έστω $U = U(\underline{X})$ α.ε. του θ. Τότε η σ.σ. $W = W(Y) = E[U|Y]$ είναι α.ε. του θ, δηλ. $E(W) = \theta$, και

$$V(W) \leq V(U).$$

(Rao-Blackwellization).