PL

Δευτέρα, 8 Νοεμβρίου 2021 1:08 μμ

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ. L-S : Εάν η T είναι επαρκής κ' πλήρης για το θ, $\psi_1(T)$ είναι συνάρτηση του T και η $\psi_1(T)$ είναι α.ε. του $g(\theta)$, τότε η $\psi_1(T)$ είναι α.ε.ε.δ. της $g(\theta)$.

Από το Θ. L-S μπορώ να έχω $\psi(T) = E(U|T)$ η οποία είναι α.ε. της $g(\theta)$ και η $\psi(T)$ έχει την ιδιότητα ελάχιστης διασποράς ανάμεσα στις α.ε. του $g(\theta)$. Έστω $\psi_1(T)$ τ.ω. $E(\psi_1(T)) = g(\theta)$.

Έχουμε: $E[\psi(T) - \psi_1(T)] = 0$, και επειδή T είναι πλήρης, τότε: $\psi(T) = \psi_1(T)$, και άρα $\psi_1(T)$ α.ε.ε.δ. του $g(\theta)$.

Πχ) Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\theta, 1)$. Να βρεθεί α.ε.ε.δ. για το θ.

Ζητάμε T επαρκή κ' πλήρη σ.σ. για το θ.

Έχουμε δείξει ότι $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ είναι επαρκής κ' πλήρης σ.σ.

Επίσης, έχουμε δείξει ότι: $E(\overline{X})=\theta$.

Δηλ. $E(\overline{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{\nu}\right) = E\left(\frac{T}{\nu}\right) = \theta$

Άρα από L-S, το $\overline{X}$ είναι α.ε.ε.δ. του θ, ως α.ε. του θ και συνάρτηση της επαρκούς κ' πλήρους σ.σ. T.

P2

Δευτέρα, 8 Νοεμβρίου 2021 1:37 μμ

Πχ | Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\theta,1)$. ΝΔΟ η σ.σ. $\bar{X}^2 - \frac{1}{\nu}$ είναι α.ε.ε.δ. της $g(\theta)=\theta^2$.

Έχουμε δείξει ότι η σ.σ. $T=\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ είναι επαρκής κ' πλήρης για το θ. Αφού η $\bar{X}^2 - \frac{1}{\nu}$ είναι συνάρτηση της T, αρκεί να δείξουμε ότι είναι α.ε. της $g(\theta)=\theta^2$, οπότε από L-S η $\bar{X}^2 - \frac{1}{\nu}$ θα είναι α.ε.ε.δ. της $g(\theta)$.

Έχουμε: $E\left[\bar{X}^2 - \frac{1}{\nu}\right] = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{\nu} =$

$= V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 - \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu} V(X) + \theta^2 - \frac{1}{\nu}$

$= \frac{1}{\nu} + \theta^2 - \frac{1}{\nu} = \theta^2$, άρα α.ε.ε.δ. του θ^2

Εναλλακτικά:

$X_i \sim N(\theta, 1) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\theta, \frac{1}{\nu})$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\theta}{\dots} \sim N(0,1) \Rightarrow z^2 = \nu(\bar{X}-\theta)^2 \sim \chi^2_1$

$\frac{}{1/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1) \Rightarrow Z = \sqrt{\nu}(\ldots$

<u>Οπότε</u>: $E\left[\nu(\bar{x}-\theta)^2\right] = 1 \Rightarrow E\left[(\bar{x}-\theta)^2\right] = \frac{1}{\nu}$

$$\Rightarrow E\left[\bar{X}^2+\theta^2-2\theta\bar{X}\right] = \frac{1}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}^2)+\theta^2-2\theta\,\underbrace{E(\bar{X})}_{\theta} = \frac{1}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}^2)+\theta^2-2\theta^2 = \frac{1}{\nu} \Rightarrow$$

$\Rightarrow E\left[\bar{X}^2-\frac{1}{\nu}\right] = \theta^2$, άρα α.ε.ε.δ. του θ^2.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Μπορεί να δειχθεί ότι για την κανονική $N(\mu, \sigma^2$-γνωστό$)$, Bernoulli(p), Poisson(λ), Exp(θ) ο μέσος $\bar{X}$ είναι α.ε.ε.δ. της άγνωστης παραμέτρου.

P3
Δευτέρα, 8 Νοεμβρίου 2021 1:53 μμ

<u>ΠΧ</u> Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $U(0,\theta)$. Να βρεθεί ΟΑ.Ε.Ε.Δ. της $g(\theta) = \theta^k$.

Έχουμε: $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot I(0<x<\theta)$

όπου: $I(0<x<\theta) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0<x<\theta \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Έχουμε δείξει ότι η $T = X_{(\nu)}$ είναι επαρκής σ.σ. για το θ. Επίσης είναι και πλήρης σ.σ. με $f_T(t) = \frac{\nu t^{\nu-1}}{\theta^\nu}$, $t \in (0,\theta)$.

Επομένως, για να βρεθεί ΟΑ.Ε.Ε.Δ. της $g(\theta) = \theta^k$ αρκεί να βρεθεί $\psi(T)$: $E(\psi(T)) = g(\theta) = \theta^k$ $\forall \theta > 0$.

$$E(\psi(T)) = \int_0^\theta \psi(t) f_T(t) dt = \theta^k, \quad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \psi(t) \nu \frac{t^{\nu-1}}{\theta^\nu} dt = \theta^k, \quad \forall \theta > 0$$

$$\int_0^\theta \quad t^{\nu-1} \quad = \frac{\theta^{\nu+k}}{} \quad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} \psi(t)\, t^{\nu-1} dt = \frac{\theta^{\nu+k}}{\nu}, \quad \forall \theta > 0$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ:

$$\psi(\theta)\,\cancel{\theta^{\nu-1}} = (\nu+k)\cdot \frac{\theta^{\cancel{\nu}+k-\cancel{1}}}{\nu}, \quad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \psi(\theta) = \frac{\nu+k}{\nu}\cdot \theta^{k}.$$

Οπότε: $\psi(T) = \frac{\nu+k}{\nu} T^{k} = \frac{\nu+k}{\nu} X_{(\nu)}^{k}$ α.ε.ε.δ.

του $g(\theta) = \theta^{k}$.

(Άσκηση) Να βρεθεί α.ε.ε.δ του $E(X)$ και $V(X)$.

Αφού $X \sim U(0,\theta)$, ισχύει: $E(X) = \frac{\theta}{2}$

και $V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

Ζητάμε $\psi_1(T)$ τ.ω. $E(\psi_1(T)) = \frac{\theta}{2} = g_1(\theta)$

Έχουμε α.ε.ε.δ. του θ^k

Προφανώς; α.ε.ε.δ. του $c\theta^k$, όπου c-σταθερά, Θα είναι η $\varphi^*(T) = c \cdot \frac{v+k}{v} (X_{(v)})^k$

Συνεπώς, για $k=1$, η α.Ε.Ε.Δ. της $g_1(\theta) = \frac{\theta}{2}$

είναι η $\varphi_1(T) = \frac{1}{2} \frac{v+1}{v} \cdot X_{(v)}$

Ομοίως, για $k=2$, η α.Ε.Ε.Δ της $g_2(\theta) = \frac{\theta^2}{12}$

είναι η $\varphi_2(T) = \frac{1}{12} \cdot \frac{v+2}{v} X_{(v)}^2$

P4

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τδ από κατανομή με

$$f(x;\lambda) = 2\lambda^2 \cdot x^{-3}, \quad x>\lambda, \lambda>0$$

i) ΝΔΟ η σ.σ. $T = X_{(1)} = \min_i X_i$ είναι επαρκής κ' πλήρης για το λ.

ii) Να βρεθεί ο α.ε.ε.δ. του λ^{-k}

Θα δουλέψουμε με το παραγοντικό κριτήριο.

Έχουμε: $f(x;\lambda) = 2\lambda^2 \cdot x^{-3} \cdot I(\lambda<x<\infty)$.

Οπότε: $f(\underset{\sim}{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} 2\lambda^2 \cdot x_i^{-3} \cdot I(\lambda<x_i<\infty)$

$$= (2\lambda^2)^\nu \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i^3} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(\lambda<x_i<\infty)$$

Ζητάμε: $\prod_{i=1}^{\nu} I(\lambda<x_i<\infty) = 1$

$\iff I(\lambda<x_i<\infty), \ \forall i$

$\iff \lambda < x_1, \dots, x_\nu < \infty$

$\Leftrightarrow \; \lambda < X_{(1)} < \infty \;, \quad 0 < X_{(\nu)} < \infty$

$\Leftrightarrow \; I(\lambda < X_{(1)} < \infty) \cdot I(0 < X_{(\nu)} < \infty)$

Οπότε: $f(\underset{\sim}{x};\lambda) = (2\lambda^2)^\nu \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i^3} \cdot I(\lambda < X_{(1)} < \infty) I(0 < X_{(\nu)} < \infty)$

$= g(T(\underset{\sim}{x});\lambda) \cdot h(\underset{\sim}{x})$

όπου: $g(T(\underset{\sim}{x});\lambda) = (2\lambda^2)^\nu \cdot I(\lambda < X_{(1)} < \infty)$

$h(\underset{\sim}{x}) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{\nu} x_i^3} \cdot I(0 < X_{(\nu)} < \infty)$.

Συνεπώς: $T(\underset{\sim}{x}) = X_{(1)}$ επαρκής σ.σ. για το λ.

Θέλουμε τη κατανομή της T.

$F_T(t) = P(T \le t) = P(X_{(1)} \le t) = 1 - P(X_{(1)} > t)$

$= 1 - P(X_1, \dots, X_\nu > t) = 1 - \prod_{i=1}^{\nu} P(X_i > t) =$

$= 1 - [P(X > t)]^\nu = 1 - [1 - P(X \le t)]^\nu$

$= 1 - [1 - F_X(t)]^\nu, \quad t$

$$= 1 - [1 - F_X(t)]$$

Έχουμε: $F_X(t) = \int_\lambda^t f_X(x)\,dx = \int_\lambda^t 2\lambda^2 x^{-3}\,dx =$

$$= 2\lambda^2 \frac{1}{-2x^2}\Big|_\lambda^t = 2\lambda^2\left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2\lambda^2}\right] =$$

$$= 1 - \left(\frac{\lambda}{t}\right)^2, \quad t > \lambda$$

Άρα: $F_T(t) = 1 - \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{2\nu}$

κι $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = -2\nu\lambda^{2\nu} \frac{-1}{t^{2\nu+1}} =$

$$= \frac{2\nu\lambda^{2\nu}}{t^{2\nu+1}}, \quad t > \lambda.$$

Έστω $g(T)$ των T.

$$E(g(T)) = 0, \ \forall\lambda \Rightarrow \int_\lambda^\infty g(t) f_T(t)\,dt = 0, \ \forall\lambda$$

$$\Rightarrow \int_\lambda^\infty g(t) \frac{2\nu\lambda^{2\nu}}{t^{2\nu+1}}\,dt = 0, \ \forall\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\lambda^\infty g(t)\, t^{-2\nu-1}\,dt = 0, \ \forall\lambda$$

$$\Rightarrow \int_{\lambda}^{\infty} g(t)\, t^{-2\nu-1}\, dt = 0, \ \forall \lambda$$

Παραγωγίζουμε ως προς λ:

$$-g(\lambda)\, \lambda^{-2\nu-1} = 0, \ \forall \lambda \Rightarrow g(\lambda) = 0, \ \forall \lambda$$

Άρα, $g(t) = 0, \ \forall t > \lambda$.

Συνεπώς, η T είναι επαρκής κ' πλήρης σ.σ. για το λ.

Ζητάμε να βρούμε α.ε.ε.δ. για το λ^{-k}.

Ζητάμε $\psi(T)$ τ.ω. $E(\psi(T)) = \lambda^{-k}$

Έχουμε: $E(\psi(T)) = \int_{\lambda}^{\infty} \psi(t) f_T(t)\, dt = \lambda^{-k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\lambda}^{\infty} \psi(t)\, \frac{2\nu \lambda^{2\nu}}{t^{2\nu+1}}\, dt = \lambda^{-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\lambda}^{\infty} \psi(t)\, t^{-2\nu-1}\, dt = \frac{\lambda^{-k}}{2\nu \lambda^{2\nu}} = \frac{\lambda^{-k-2\nu}}{2\nu}$$

$$\Rightarrow \int_{\lambda}^{\infty} \psi(t)\, t^{-2n-1}\, dt = \frac{1}{2n\lambda^{k+2n}} = \frac{\lambda^{-k-2n}}{2n}$$

Παραγωγίζουμε ως προς λ:

$$-\psi(\lambda)\,\lambda^{-2n-1} = \frac{(-k-2n)}{2n}\,\lambda^{-k-2n-1}$$

$$\Rightarrow \psi(\lambda) = \frac{k+2n}{2n}\,\lambda^{-k}$$

Άρα, η σ.σ. $\psi(T) = \frac{k+2n}{2n}\,T^{-k} = \frac{k+2n}{2n}\left(X_{(1)}\right)^{k}$

είναι α.ε.ε.δ. του λ^{-k}.