PL

Παρασκευή, 12 Νοεμβρίου 2021 1:14 μμ

Fisher Information: $I_X(\theta)=E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right]$

Επίσης, έχουμε.

$$E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right]=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]$$

Επίσης: $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)=\nu I_X(\theta)$.

Ανισότητα Cramer-Rao

Έστω $f(x;\theta)$ η σ.π.π. από την οποία έχουμε δείγμα.
Αν $T=T(X_1,\dots,X_\nu)$ είναι μια εκτιμήτρια της $g(\theta)$ και $b_T(\theta)$ η μεροληψία της T ως εκτιμήτρια της $g(\theta)$, το κατώτερο φράγμα της διασποράς της T από την ανισότητα C-R είναι:

$$V(T)\geq\frac{\left[g'(\theta)+b_T'(\theta)\right]^2}{\nu E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right]}=-\frac{\left[g'(\theta)+b_T'(\theta)\right]^2}{\nu E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]}$$

Ειδικότερα:

1) Αν T είναι αμ.ε. της $g(\theta)$, τότε $b_T(\theta)=0$ κ'

1) Αν Τ ...

$$V(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{\nu E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right]} = -\frac{[g'(\theta)]^2}{\nu E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]}$$

2) Αν $g(\theta)=\theta$, τότε: $g'(\theta)=1$, και αν T αμ. ε. του θ, τότε έχουμε:

$$V(T) \geq \frac{1}{\nu E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right]} = -\frac{1}{\nu E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right]}$$

$$= \frac{1}{\nu I_X(\theta)} = \frac{1}{I_{\underline{X}}(\theta)}$$

Θ| Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$ και έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη $g(\theta)$. Για $U=U(\underline{X})$ αμ. ε. της $g(\theta)$, η $V(U)$ θα ισούται με το κάτω φράγμα C-R αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση του θ, έστω $k(\theta)$, τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = k(\theta)\cdot\left[U - g(\theta)\right].$$

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \theta)$, όπου μ-γνωστό.
Να βρεθεί α.ε.ε.δ. του θ.

Έχουμε: $$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2}$$

Οπότε: $$\log f(x;\theta) = -\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\theta - \frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2$$

και: $$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta) = -\frac{1}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2.$$

Επιπλέον: $$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right]^2 = \frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{4\theta^4}(x-\mu)^4 - \frac{1}{2\theta^3}(x-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{4\theta^2}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^4 - \frac{1}{2\theta^2}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2$$

Συνεπώς: $$E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{4\theta^2}E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^4\right] - \frac{1}{2\theta^2}E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2\right]$$

Έχουμε: $\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1)$, οπότε $\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2 \sim \chi^2_1$.

Άρα: $E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2\right] = 1$ και $V\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2\right] = 2$

Επίσης, έχουμε ότι: $V(x) = E(x^2) - E(x)^2$. Οπότε

παίρνουμε ότι: $E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^4\right] = 2 + 1^2 = 3$.

Οπότε: $I_x(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)^2\right]$

$$= \frac{1}{4\theta^2} + \frac{1}{4\theta^2}\cdot 3 - \frac{1}{2\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2}$$

Συνεπώς: $K\Phi\text{-}CR = \frac{1}{\nu I_x(\theta)} = \frac{1}{\nu\,\frac{1}{2\theta^2}} = \frac{2\theta^2}{\nu}$.

Εναλλακτικά:

$$I_x(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right] =$$

$$= -E\left[\frac{1}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}(x-\mu)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\cdot \underbrace{E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2\right]}_{1}$$

$$= -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2}.$$

Παίρνουμε τη σ.σ. $T = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2$, και

$$E(T) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}E\left[(X_i-\mu)^2\right] = \frac{1}{\nu}\cdot\nu\theta = \theta$$

Άρα, T είναι αμ.ε. του θ. Επίσης:

$$V(T) = V\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)^2\right].$$

Όμως: $\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2 \sim \chi^2_1$ έχουμε ότι:

$$V\left[\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\theta}}\right)^2\right] = 2 \Rightarrow \frac{1}{\theta^2}\cdot V\left[(X-\mu)^2\right] = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left[(X-\mu)^2\right] = 2\theta^2$$

<u>Οπότε</u>: $V(T) = \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu}V\left[(X_i-\mu)^2\right]$

$$= \frac{1}{\nu^{\cancel{2}}}\cancel{\nu}\cdot 2\theta^2 = \frac{2\theta^2}{\nu}.$$

η οποία ισούται με το ΚΦ-CR. Συνεπώς, η

T είναι α.Ε.Ε.Δ. του ϑ.

Αν πάρουμε το: $S^2 = \frac{1}{\nu-1} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2$

έχουμε: $E(S^2) = \theta = \sigma^2$ άρα α.ε. του θ

όμως: $V(S^2) = \frac{2\theta^2}{\nu - 1}$

<u>οπότε:</u> $V(T) < V(S^2)$.

Από το προηγούμενο θεώρημα:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{\nu}{2}\log 2\pi\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$= -\frac{\nu}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2$$

$$= \frac{\nu}{2\theta^2}\left[\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2 - \theta\right]$$

Άρα, η $\frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2$ α.ε.Ε.Δ. του θ.

P3

Παρασκευή, 12 Νοεμβρίου 2021 2:27 μμ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ (EFFICIENCY)

Αν η εκτιμήτρια Ψ είναι α.ε. της παραμέτρου θ και η διασπορά της Ψ επιτυγχάνει το ΚΦ-CR, τότε η Ψ ονομάζεται <u>αποτελεσματική</u> (efficient) εκτιμήτρια του θ.

Η αποτελεσματικότητα (efficiency) μιας α.ε. έστω $\delta(\underset{\sim}{x})$ του $g(\theta)$ ορίζεται ως:

$$a(\delta) = \frac{\text{ΚΦ-CR}}{\text{διασπορά της } \delta(\underset{\sim}{x})} = \frac{[g'(\theta)]^2 / nI_X(\theta)}{V(\delta)}.$$