PL

Δευτέρα, 29 Νοεμβρίου 2021 1:13 μμ

Θ) Έαν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τ.δ. από μονοπαραμετρική κατανομή $f(x;\theta)$, τότε εαν $\hat{\theta}$ είναι η ΕΜΠ του θ και $\delta=\delta(\underline{x})$ αποτελεσματική εκτιμήτρια του θ, τότε: $\boxed{\hat{\theta}=\delta}$

Αφού η $\delta=\delta(\underline{x})$ αποτελεσματική, τότε:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x_i;\theta) = k(\nu,\theta)\left[\delta(\underline{x})-\theta\right]$$

Συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\theta)=\prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta)$

και: $\ell(\theta)=\log L(\theta)=\sum_{i=1}^{\nu}\log f(x_i;\theta)$

Επιπλέον: $\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}\log f(x_i;\theta)=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)$

Άρα: $\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=k(\nu,\theta)\cdot\left[\delta(\underline{x})-\theta\right]$

ΕΜΠ: $\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=0 \Rightarrow k(\nu,\theta)\cdot\left[\delta(\underline{x})-\theta\right]=0$

$\hat{\ } \ \delta(x)$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \delta(\underline{x})$

Επιπλέον: $\dfrac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} = k'(v,\theta)\left[\delta(\underline{x}) - \theta\right] - k(v,\theta)$

με $E\left[\dfrac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}\right] = k'(v,\theta)\left[\underbrace{E(\delta(\underline{x}))}_{\to \theta} - \theta\right] - k(v,\theta)$

$= -k(v,\theta) < 0.$

άρα: $-E\left[\dfrac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}\right] = \underline{k(v,\theta) = I_{\underline{x}}(\theta)}$

Π2

Δευτέρα, 29 Νοεμβρίου 2021 1:35 μμ

ΠΧ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $U[\alpha,\beta]$, με

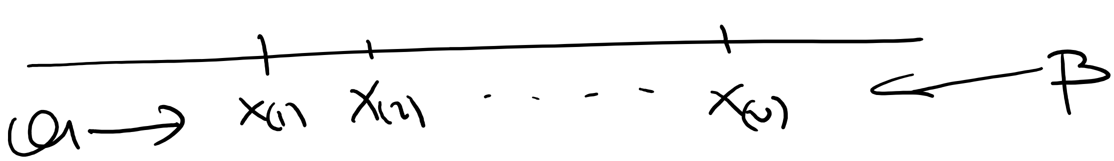
$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot I(\alpha < x < \beta).$$ Ζητάμε $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$.

Πιθανοφάνεια: $$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\alpha,\beta)$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot I(\alpha \le x_i \le \beta)$$

$$= (\beta-\alpha)^{-\nu} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(\alpha \le x_i \le \beta) \quad \ldots\ldots (*)$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)^\nu} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(\alpha \le x_i \le \beta).$$



Στην (*) η πιθανοφάνεια μεγαλώνει όσο η διαφορά $(\beta-\alpha)$ μικραίνει! Όμως, το α δεν

μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το $X_{(1)} = \min_i x_i$
και το β δεν μπορεί να είναι μικρότερο από
το $X_{(\nu)} = \max_i x_i$.

Άρα: $\hat{\beta} - \hat{\alpha} = X_{(\nu)} - X_{(1)}$ είναι η μικρότερη διαφορά

και συνεπώς: $\hat{\alpha} = X_{(1)}$

κι $\hat{\beta} = X_{(\nu)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ΕΜΠ έχουν την ιδιότητα του Αναλλοίωτου (Invariance). Δηλ. αν $\hat{\theta}$ είναι η ΕΜΠ του θ και $u(\theta)$ μια συνάρτηση του θ με μονότιμη αντίστροφη συνάρτηση (single valued inverse), τότε η ΕΜΠ της $u(\theta)$ είναι η $u(\hat{\theta})$.

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τδ. από $N(\mu, \sigma^2)$, να βρεθεί η ΕΜΠ του $\log\sigma^2$

Βρίσκουμε ότι η ΕΜΠ του σ^2 είναι: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \bar{X})^2$

Οπότε, σύμφωνα με την ιδιότητα του αναλλοίωτου η ΕΜΠ του $\log\sigma^2$ θα είναι η

$$\log\left[\frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (X_i - \bar{X})^2\right].$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $f(x;\theta)$ και $T = T(\underline{x})$ επαρκής σ.σ. για το θ. Τότε η ΕΜΠ $\hat{\theta}$ του θ είναι συνάρτηση της σ.σ. $T = T(\underline{x})$.

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κανονική με

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ ...

αθροιστική σ.κ. $F(x;\theta) = 1 - \frac{\theta^3}{x^3}$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$

α) ΝΔΟ η $\delta = X_{(1)} = \min_i X_i$, $i = 1, 2, \dots, \nu$ είναι η ΕΜΠ του θ και να βρεθεί η κατανομή της.

β) Να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε η $\delta_1 = aX_{(1)}$ να είναι α.ε. του θ. Είναι η δ_1 συνεπής;

Λύση

α) $f(x;\theta) = \frac{d}{dx} F(x;\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4}$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$.

Δηλ. $$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{3\theta^3}{x^4}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ή $$f(x;\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} I(\theta \leq x < \infty).$$

Παίρνουμε τη πιθανοφάνεια

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{3\theta^3}{x_i^4} \cdot I(\theta \leq x_i < \infty)$$

$$= \frac{3^\nu \theta^{3\nu}}{\dots} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} I(\theta \leq x_i < \infty).$$

$\prod_{i=1} x_i^4 \quad i=1$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας μεγιστοποιείται όταν το θ γίνει το μέγιστο δυνατό.

Πρέπει: $\theta \leq X_{(1)}$ και άρα: $\hat{\theta} = X_{(1)}$.

Κατανομή της: $T = X_{(1)}$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X_{(1)} \leq t) =$$

$$= 1 - P(X_{(1)} > t) = 1 - P(X_1, X_2, \ldots, X_\nu > t)$$

$$= 1 - P(X_1 > t) \cdot P(X_2 > t) \cdots P(X_\nu > t)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{\nu} P(X_i > t) = 1 - [P(X > t)]^\nu =$$

$$= 1 - [1 - P(X \leq t)]^\nu = 1 - [1 - F_X(t)]^\nu$$

$$= 1 - \frac{\theta^{3\nu}}{t^{3\nu}}$$

Άρα: $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = 3\nu \theta^{3\nu} \cdot t^{-3\nu-1}, \quad t \geq \theta$

β) Έχουμε: $E(T) = E(X_{(1)}) =$

$$= \int_\theta^\infty t f_T(t)\,dt = \int_\theta^\infty t\, 3\nu \theta^{3\nu} t^{-3\nu-1}\,dt =$$

$$= 3\nu\theta^{3\nu} \cdot \int_\theta^\infty t^{-3\nu}\,dt = \dots = \frac{3\nu}{3\nu-1}\cdot\theta .$$

Ζητάμε a, τ.ω. η $\delta_1 = a X_{(1)} = aT$ να είναι α.ε. του θ.

Δηλ. $E(\delta_1) = E(aT) = \theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow a E(T) = \theta \Rightarrow a \frac{3\nu}{3\nu-1}\theta = \theta \Rightarrow a = \frac{3\nu-1}{3\nu}.$$

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Έχουμε $E(\delta_1) = \theta$.

ΝΔΟ $\lim_{\nu\to\infty} V(\delta_1) = 0$, ώστε η δ_1 συνεπής.

$$V(\delta_1) = V(aT) = a^2 \cdot V(T) = \left(\frac{3\nu-1}{3\nu}\right)^2 \cdot V(T).$$

όπου:

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$

και: $E(T^2) = \int_\theta^\infty t^2 f_T(t)\,dt = \int_\theta^\infty t^2\, 3\theta^{3\nu} \cdot t^{-3\nu-1}\,dt$

και: $E(T\ ) = \int_{\theta} t\, f(t)\, dt$

$$= \dots = \frac{3\nu}{3\nu-2}\theta^2$$

Άρα: $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 =$

$$= \frac{3\nu}{3\nu-2}\theta^2 - \left(\frac{3\nu}{3\nu-1}\right)^2\theta^2 = \dots = \frac{3\nu}{(3\nu-2)(3\nu-1)^2}\theta^2$$

Συνεπώς: $V(\delta_1) = \frac{\cancel{(3\nu-1)^2}}{(3\nu)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{3\nu}}{(3\nu-2)\cdot\cancel{(3\nu-1)^2}}\theta^2$

$$= \frac{1}{3\nu(3\nu-2)}\cdot\theta^2 = \frac{1}{9\nu^2-6\nu}\theta^2$$

Οπότε: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{1}{9\nu^2-6\nu}\theta^2 = 0$

Άρα, η δ_1 συνεπής εκτιμήτρια του θ.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

(Method of Moments).

Αν θέλουμε να εκτιμήσουμε s παραμέτρους, εξισώνουμε τις s-πρώτες ροπές (περί το μηδέν) του δείγματος με τις αντίστοιχες ροπές του πληθυσμού. Δηλ.

$$\underbrace{\begin{aligned} M_1' &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i = \overline{X} \\ M_2' &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \\ &\vdots \\ M_s' &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^s \end{aligned}}_{\text{δειγματικές ροπές}} \qquad \underbrace{\begin{aligned} \mu_1' &= E(X) \\ \mu_2' &= E(X^2) \\ &\vdots \\ \mu_s' &= E(X^s). \end{aligned}}_{\text{ροπές του πληθυσμού}}$$

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $Bern(p)$. Να βρεθεί η εκτιμήτρια του p με τη μέθ. των ροπών.

Έχουμε: $X \sim Bern(p)$ με $f(x;p) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}$

όπου $x = 0, 1$, $0 \le p \le 1$

Έχουμε μία άγνωστη παράμετρο, άρα θα εξισώσουμε τον μέσο του πληθυσμού $\mu = E(X)$ με το μέσο του δείγματος.

Άρα: $\mu = E(X) = p = \overline{X} \Rightarrow \boxed{\overline{p} = \overline{X}}$