PL

ΠΧ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2-άγνωστο.

α) Να κατασκευαστεί ΔΕ με σ.ε. $(1-\alpha)$ για το μ.

β) Να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί το μέγεθος δείγματος ν ώστε το μήκος του Δ.Ε να είναι μικρότερο του 2σ με πιθ. $100(1-\beta)\%$

(προφανώς, $0<\alpha, \beta<1$).

Έχουμε μήκος Δ.Ε.

$$L = UB(\underline{x}) - LB(\underline{x})$$

$$= \bar{X} + t_{\nu-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}} - \left(\bar{X} - t_{\nu-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}}\right) =$$

$$= 2t_{\nu-1,\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{\nu}}$$

και θέλουμε: $P\left(2t_{\nu-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}} < 2\sigma\right) = 1-\beta$

Γνωρίζουμε ότι: $\dfrac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$

<u>Σωπάλκε</u>: $P\left(2 t_{\nu-1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{\nu}} < 2\sigma\right) = 1-\beta \Leftrightarrow$

$$P\left(\frac{S}{\sigma} < \frac{\sqrt{\nu}}{t_{\nu-1,\alpha/2}}\right) = 1-\beta \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{S}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{\nu}}{t_{\nu-1,\alpha/2}}\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \geq \frac{\nu}{t^2_{\nu-1,\alpha/2}}\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{(\nu-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \geq \frac{\nu\cdot(\nu-1)}{t^2_{\nu-1,\alpha/2}}\right) = \beta$$

Συνεπώς:

$$\frac{\nu\cdot(\nu-1)}{t^2_{\nu-1,\alpha/2}} = \chi^2_{\nu-1,\beta}$$

όπου $\chi^2_{\nu-1,\beta}$ το άνω β-ποσοστιαίο σημείο της $\chi^2_{\nu-1}$, που ισχύει: $P(X > \chi^2_{\nu-1,\beta}) = \beta$.
όπου $X \sim \chi^2_{\nu-1}$.

Άρα: $\nu\cdot(\nu-1) = t^2_{\nu-1,\alpha/2} \cdot \chi^2_{\nu-1,\beta}$.

Άρα: $\nu\cdot(\nu-1) = t^2_{\nu-1,\alpha/2} \cdot \bar{X}_{\nu-1,\beta}$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Δ.Ε. με σ.ε. $1-\theta$ για το μέσο μ κανονικής κατανομής.

i) Αν σ^2-γνωστό, τότε το Δ.Ε βασίζεται στην χρήση της $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1)$ και έχει άκρα

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}.$$

ii) Αν σ^2-άγνωστο, τότε το Δ.Ε. βασίζεται στην χρήση της $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu}}$ και έχει άκρα

$$\bar{X} \pm t_{\nu-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}}$$

(*) Αν $\nu > 30$ δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά των ποσοστιαίων σημείων της κανονικής και της Student-t κατανομής.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Σε περίπτωση μη κανονικών πληθυσμών

i) Αν σ^2-γνωστό και $\nu > 30$, τότε από Κ.Ο.Θ.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \sim N(0,1) \text{ ασυμπτωτικά.}$$

και Δ.Ε.: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$

ii) Αν σ^2 - άγνωστο, για $\nu > 30$ η τ.μ.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu}} \sim t_{\nu-1} \text{ ασυμπτωτικά}$$

και το Δ.Ε. έχει όρια: $\bar{X} \pm t_{\nu-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{\nu}}$.

P2

Δευτέρα, 6 Δεκεμβρίου 2021 2:00 μμ

Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών.

(⊛ Αν οι πληθυσμοί δεν είναι κανονικοί, αλλά τα μεγέθη των δειγμάτων είναι >30, τότε ισχύουν τα αντίστοιχα).

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{\nu_1}$ τ.δ. από $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu_2}$ τ.δ. από $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Έχουμε: $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{\nu_1}\right)$

και $\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\right)$.

και είναι ανεξάρτητοι. Οπότε:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\right).$$

⊛ Υπενθυμητρια:

$$M_{\bar{X}-\bar{Y}}(t) = E\left(e^{t(\bar{X}-\bar{Y})}\right) = E\left(e^{t\bar{X}}\right) \cdot E\left(e^{-t\bar{Y}}\right).$$

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε: $M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\}$

Άρα: $M_{\bar{X}-\bar{Y}}(t)=M_{\bar{X}}(t)\cdot M_{\bar{Y}}(-t)=$

$$=\exp\left\{\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}\frac{t^2}{2}-\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\frac{t^2}{2}\right\}$$

$$=\exp\left\{(\mu_1-\mu_2)\cdot t+\left(\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\right)\cdot\frac{t^2}{2}\right\}$$

η οποία είναι η ροπογεννήτρια της $N\left(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\right)$

Συνεπώς: $$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}}\sim N(0,1)$$

i) Αν σ_1^2,σ_2^2 είναι γνωστά, τότε τα άκρα του Δ.Ε. με σ.ε. $1-\alpha$ για το $\mu_1-\mu_2$ είναι

$$(\bar{X}-\bar{Y})\pm Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}$$

ii) Αν σ_1^2,σ_2^2 είναι άγνωστα, τότε:

(α) → Αν $\nu_1,\nu_2>30$, τότε ένα προσεγγιστικό Δ.Ε. με σ.ε. $1-\alpha$ για το $\mu_1-\mu_2$ είναι

$$(\bar{X}-\bar{Y})\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{\nu_1}+\frac{S_2^2}{\nu_2}}$$

(β) → Αν $\nu_1, \nu_2 < 30$, έχουμε προβλήματα.

Συνήθως υποθέτουμε: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Τότε: $\dfrac{(\nu_1-1)\cdot S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu_1-1}$ και $\dfrac{(\nu_2-1)\cdot S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu_2-1}$

και ανεξάρτητα, οπότε:

$$\frac{(\nu_1-1)\cdot S_1^2 + (\nu_2-1)\cdot S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu_1+\nu_2-2}$$

Οπότε: $Z = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\nu_1}+\dfrac{\sigma^2}{\nu_2}}}$

και επειδή X, Y ανεξ., τότε $\bar{X}, S_1^2$ κ' $\bar{Y}, S_2^2$ είναι ανεξ., οπότε:

$$T = \frac{\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\cdot\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{(\nu_1-1)\cdot S_1^2+(\nu_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \Big/ \nu_1+\nu_2-2}} =$$

$$= \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\quad} \sim t_{\nu_1+\nu_2-2}$$

$$= \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(\nu_1-1)\cdot S_1^2+(\nu_2-1)\cdot S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2}\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}\right)}} \sim t_{\nu_1+\nu_2-2}$$

Άρα, τα άκρα του Δ.Ε. για το $\mu_1-\mu_2$ είναι:

$$(\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\nu_1+\nu_2-2,\, \alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(\nu_1-1)\cdot S_1^2+(\nu_2-1)\cdot S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2}\cdot\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}\right)}$$

P3

Δευτέρα, 6 Δεκεμβρίου 2021 2:34 μμ

Πχ) Έστω d είναι προκαθορισμένο περιθώριο σφάλματος, να προσδιοριστεί το ν ώστε ώστε να βρεθεί Δ.Ε $100(1-\alpha)\%$ για το μ όχι μεγαλύτερο από το $(\bar{x}-d, \bar{x}+d)$

Λύση. Θέλουμε: $P(|\mu-\bar{x}|\leq d) = 1-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-d \leq \mu-\bar{x} \leq d) = 1-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\bar{x}-d \leq \mu \leq \bar{x}+d) = 1-\alpha.$

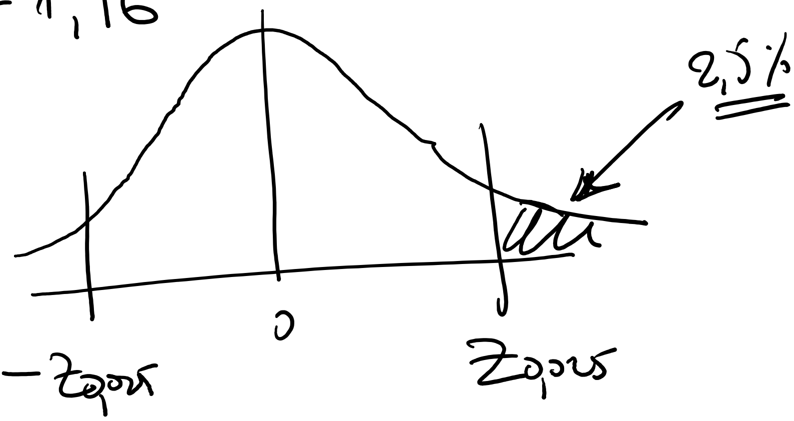
Όμως: $P\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \leq \mu \leq \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) = 1-\alpha$

Άρα: $d = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow d^2 = z^2_{\alpha/2}\frac{\sigma^2}{\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{d^2}}.$

Πχ) Έστω $X_1, \dots, X_{16} \sim N(\mu, \sigma^2=1)$

με $\bar{x}=2$. Να δοθεί ένα 95% ΔΕ για το μ. Δίνεται: $z_{0,025}=1,96$



Είναι:

$$\bar{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$$

Άρα: $2\pm 1,96\cdot\frac{1}{\sqrt{16}} = 2\pm 0,49 = [1,51\ ,\ 2,49]$