Έλεγχος απλής H_0 έναντι απλής H_1

Έχουμε: $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της $H_1: \theta=\theta_1$

(*) Για την εύρεση του καλύτερου ελέγχου σταθεροποιούμε τη $P(\text{Σφ. Τύπου I})=\alpha$ και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη $P(\text{Σφ. Τύπου II})=\beta$ ή ισοδύναμα να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση ισχύος: $\Pi(\theta_1)=1-P(\text{Σφ. Τύπου II})$

$$=1-\beta.$$

Ορισμός Έστω ο έλεγχος $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι $H_1: \theta=\theta_1$. Έστω C μια κ.π. μεγέθους α, δηλ. $P(C \mid H_0 \text{ αληθής}) = P(\text{Σφ. Τύπου I}) = \alpha$

Τότε, η C είναι μια ισχυρότατη κ.π. μεγέθους α εάν για κάθε άλλη κ.π. μεγέθους α, έστω D, έχουμε ότι: $P(C \mid \theta_1) \geq P(D \mid \theta_1)$.

Δηλ. μια ισχυρότατη κ.π. μεγέθους α είναι η κ.π. με τη μεγαλύτερη ισχύ ανάμεσα σε όλες τις κ.π. μεγέθους α.

ΠΧ (συνέχεια) | Ρίψη νομίσματος.

$H_0: p=1/2$ vs $H_1: p=3/4$

$H_0: p = 1/2$ vs $H_1: p = 3/4$

Έστω:

$\alpha = P(\Sigma\varphi.\ \text{τύπου I}) = \dfrac{7}{64}$

S	$p=1/2$	$p=3/4$
0	1/64	1/4096
1	6/64	18/4096
2	15/64	
3	⋮	⋮
4	⋮	⋮
5	6/64	1458/4096
6	1/64	729/4096

Πιθανές κ.π., δηλ.

ως $P(C_i \mid p=1/2) = \dfrac{7}{64}$

$C_1 = \{S = 0, 1\}$

$C_2 = \{S = 0, 5\}$

$C_3 = \{S = 1, 6\}$

$C_4 = \{S = 5, 6\}$

Ποια είναι η ισχυρότερη.

$P(C_1 \mid p = \tfrac{3}{4}) = \dfrac{19}{4096}$

$P(C_2 \mid p = \tfrac{3}{4}) = \dfrac{1459}{4096}$

$P(C_3 \mid p = \tfrac{3}{4}) = \dfrac{747}{4096}$

$P(C_4 \mid p = \tfrac{3}{4}) = \dfrac{2187}{4096}$.

Άρα, η ισχυρότερη κ.π. είναι η C_4

η οποία μεγιστοποιεί την

$P(C \mid H_1) = 1 - P(\Sigma\varphi.\ \text{τύπου II})$.

ή αλλιώς ελαχιστοποιεί την $P(\Sigma\varphi.\ \text{τύπου II})$.

Λήμμα Neyman-Pearson

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από $f(x,\theta)$ και έστω ο παραμετρικός χώρος $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Ζητάμε ισχυρότατο έλεγχο για την

$H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1: \theta = \theta_1$

Έχουμε συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = f(\underline{x};\theta)$$

Εάν υπάρχει θετική σταθερά k και περιοχή C του Δ.Χ. τ.ω.

1) $\dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq k$ εάν $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$

2) $\dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > k$ εάν $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C'$

3) $P\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C \mid \theta_0\right] = \alpha$.

Τότε, η C είναι ισχυρότατη κ.π. μεγέθους α για τον έλεγχο.

$H_0: \theta=\theta_0$ έναντι $H_1: \theta=\theta_1$.

Πχ) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2=36)$

Να ελεγχθεί: $H_0: \mu=50$ vs $H_1: \mu=55$

Πιθανοφάνεια

$$L(\mu)=f(\underline{x};\mu)=\prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\mu)=(72\pi)^{-\nu/2} e^{-\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}$$

Οπότε:

$$\frac{L(\mu_0=50)}{L(\mu_1=55)}=\frac{\cancel{(72\pi)^{-\nu/2}} e^{-\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-50)^2}}{\cancel{(72\pi)^{-\nu/2}} e^{-\frac{1}{72}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-55)^2}}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{72}\left[\cancel{\sum x_i^2}+\nu 50^2-100\sum x_i-\cancel{\sum x_i^2}-\nu 55^2+110\sum x_i\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{72}\left[10\sum_{i=1}^{\nu} x_i+\nu\left(50^2-55^2\right)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{72}\left[10\sum x_i-525\nu\right]\right\}$$

Είναι: $\frac{L(50)}{L(55)}\leq k$, οπότε

$$-\frac{1}{72}\left(10\sum x_i - 525\nu\right) \le \lg k \iff$$

$$\iff -10\frac{\sum x_i}{\nu} + 525 \le \frac{72\lg k}{\nu} \iff$$

$$\iff -10\overline{X} \le \frac{72\lg k}{\nu} - 525$$

$$\iff \overline{X} \ge -\frac{1}{10\nu}\left[72\lg k - 525\nu\right]$$

Σύμφωνα με το Λ.N-P, η ισχυρότερη κ.π. είναι η: $C: \left\{(x_1,x_2,\dots,x_\nu) : \overline{X} \ge \underbrace{-\frac{1}{10\nu}\left[72\lg k - 525\nu\right]}_{w}\right\}$

όπου η σταθερά w επιλέγεται έτσι ώστε:

$$P\left((x_1,\dots,x_\nu)\in C \mid \mu=50\right) = a$$

α) Αν $a=0{,}05$ και $\nu=16$, να βρεθεί το w.

Έχουμε: $P\left((x_1,\dots,x_{16})\in C \mid \mu=50\right) = 0{,}05$

όμως $X_i \sim N(\mu,36)$, άρα: $\overline{X} \sim N\left(\mu,\frac{36}{16}\right)$

Οπότε: $P\left(\overline{X} > w \mid \mu=50\right) =$

$$= P\left(\frac{\overline{X}-50}{\ldots} > \frac{w-50}{\ldots}\right) = 0.05 \Longrightarrow$$

$$\sqrt{\tfrac{36}{16}}\;)$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{W-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}}\right) = 0{,}05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{W-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}}\right) = 0{,}05 \Rightarrow$$

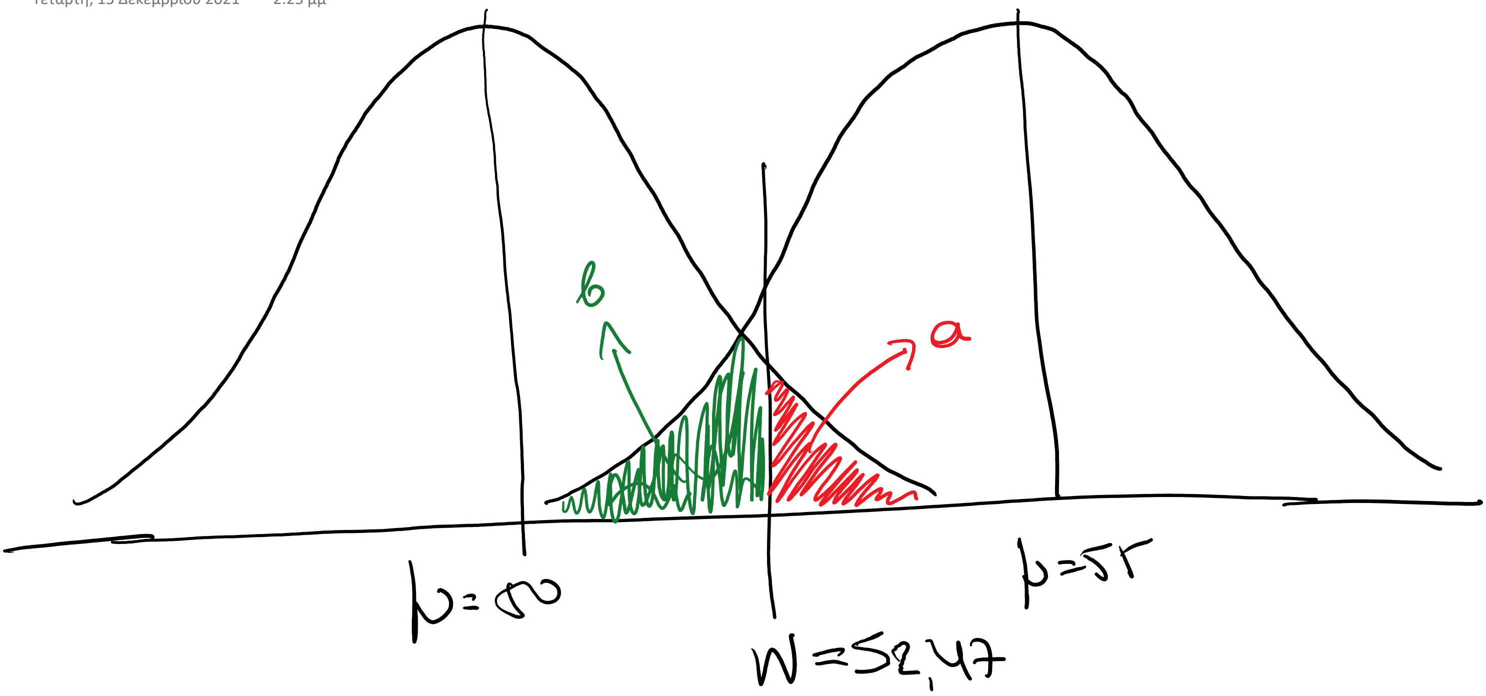
$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{W-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}}\right) = 0{,}95$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Phi\left(\dfrac{W-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}}\right) = 0{,}95 \\ \text{όπου} : \Phi(1{,}645) = 0{,}95 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}} = 1{,}645 \Rightarrow \boxed{W = 52{,}47}$$

P3

Τετάρτη, 15 Δεκεμβρίου 2021 2:25 μμ



β) Έστω $n=16$ κι $W=53$. Να βρεθεί το ε.σ.σ. α.

Άρα: $\alpha = P(\bar{X} > W \mid \mu=50)$ κι $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{16}\right)$

Έχουμε:

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X}-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}} > \frac{53-50}{\sqrt{\frac{36}{16}}}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{3}{6/4}\right) = P(Z > 2)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 0{,}0228.$$