Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ
ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Στέφανος Κεΐσογλου
Μαθηματικός M.ed
Υπ. Διδάκτωρ του Παν/μιου Αθηνών
Λάμπρου Κατσώνη 53 Αθήνα
keisoglu@otenet.gr
Παναγιώτης Σπύρου
Επίκουρος καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών Παν/μιου Αθηνών
Πανεπιστημιούπολη, Ιλίσια
GR. 157 84
pspirou@math.uoa.gr

«Όποιος θέλει να λύσει επιστημονικά προβλήματα χωρίς την βοήθεια των μαθηματικών επιχειρεί το απραγματοποίητο. Πρέπει να μετρά εκείνο που μπορεί να μετρηθεί και να κάνει να μετράται ότι δεν μπορεί να μετρηθεί». *Γαλιλαίος*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με αφορμή ένα πρόβλημα μέτρησης ύψους το οποίο εμπλέκει την ομοιότητα ορθογωνίων τριγώνων επιχειρούμε να ανιχνεύσουμε την πορεία της μαθηματικοποίησης από τους μαθητές. Μέσα σε ένα πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων, μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου επιχείρησαν να αναδείξουν τις αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται η χρήση ενός αυτοσχέδιου εργαλείου με το οποίο μετρώνται ύψη απομακρυσμένων αντικειμένων. Η χρήση, επεξεργασία και η κατανόηση των εργαλείων και των μαθηματικών αποδόσεων στις οποίες καταλήγουν οι μαθητές αναλύεται μέσω επιλεγμένων επεισοδίων με βάση το υπόδειγμα της SOLO taxonomy.

Εισαγωγή

Η εν γένει ομοιότητα αποτελεί ένα γενικό προσδιορισμό του αντιληπτικού μας συστήματος (Lakoff & Johnson 1980, Gentner & Medina 1998) μέσω του οποίου ταξινομούμε και κατηγοριοποιούμε τα φαινόμενα. Η ομοιότητα δεν είναι πάντα οπτική, μπορεί να αναφέρεται σε άλλες ποιότητες όπως το χρώμα, ο ήχος, κ. ά (Newell & Bulthoff 2002). Ο εντοπισμός ομοιοτήτων είναι σημαντική νοητική δραστηριότητα μέσω της οποίας ταξινομούμε το φυσικό μας περιβάλλον επιβάλλοντας τάξεις ισοδυναμίας στα αντικείμενα και τις καταστάσεις με αποτέλεσμα να ελαττώνεται το γνωστικό φορτίο το οποίο φέρουν ως αταξινόμητες ολότητες. Η ομοιότητα, ως Μαθηματική έννοια θα μπορούσε να θεωρηθεί αποτέλεσμα μιας αφαιρετικής διαδικασίας που έχει την αφετηρία της στην σύγκριση των δομών δυο καταστάσεων. Κατά τους Gentner & Medina (1998) η σύγκριση δομών αποτελεί την γέφυρα μέσω της οποίας μπορούμε να διατυπώσουμε αφηρημένους κανόνες αν αντικαταστήσουμε τα προς σύγκριση αντικείμενα με μεταβλητές.

Εξάλλου, η συγκρότηση της έννοιας της γεωμετρικής ομοιότητας αποτελεί από μόνη της ένα άμεσο υπόδειγμα μαθηματικοποίησης αφού συνδέει την ποιοτική σχέση της ομοιότητας της μορφής με την ποσοτική, αριθμητική σχέση των λόγων των πλευρών.

Η ομοιότητα είναι μία από τις βασικές έννοιες του αναλυτικού προγράμματος στο Γυμνάσιο αλλά η παρουσίασή της περιορίζεται στο κατ' ανάγκη στατικό περιβάλλον του σχολικού βιβλίου. Το μαθησιακό περιβάλλον το οποίο προτείνουμε συνδυάζει δυναμικά γεωμετρικά σχήματα με αντίστοιχους πίνακες τιμών και γραφικές παραστάσεις ενώ συγχρόνως προσφέρει άμεσα την ιδέα της εμπλοκής των μαθηματικών στις αλληλεπιδράσεις μας με τον πραγματικό κόσμο και αποτελεί πρόκληση για να το μελετήσουμε μαζί με τους μαθητές.

Ιστορικές αναφορές για την ομοιότητα

Η ιστορική πορεία μιας έννοιας ενδέχεται να μας προμηθεύσει ιδέες για το ποιο θα μπορούσε να είναι το πλέον κατάλληλο τυπικό παράδειγμα (prototype κατά Schwarz. B, Hershkowitz.R (1999)) που θα αποτελέσει πυρήνα γύρω από τον οποίο θα δομηθεί μια δραστηριότητα μέσω της οποίας ο μαθητής θα εμπλακεί με την έννοια. Π.χ. το σχήμα δυο ορθογωνίων τριγώνων με ίσες γωνίες αποτελεί μια πρωτοτυπική (prototype) εικόνα ομοίων τριγώνων και αυτό ακριβώς το παράδειγμα θα αποτελέσει κεντρικό σημείο της έρευνάς μας.

Η ταξινόμηση μορφών ίσως αποτελεί την πρώτη προσέγγιση της Μαθηματικής ομοιότητας. Ο Vollrath (1977) παρατηρεί ότι η ταξινόμηση σχημάτων με κριτήριο την ομοιότητα από μαθητές ηλικίας 8-19 χρόνων στηρίζεται σχεδόν αποκλειστικά στη μορφή των σχημάτων και ιδιαίτερα στα γωνιακά χαρακτηριστικά τους ενώ η Ευκλείδεια προσέγγιση μέσω αναλογιών φαίνεται να απουσιάζει.

Η ερμηνεία του φαινομένου θα μπορούσε να δοθεί και μέσω της ιστορικής πορείας της συγκρότησης της έννοια της ομοιότητας.

Κατά την Diggins, (1965, σελ. 71.) « Οι Αιγύπτιοι καλλιτέχνες (εικόνα 1) είχαν ένα πολύ απλό τρόπο να μεταφέρουν μικρά σχέδια σε μεγάλους τοίχους. Πρώτα ο καλλιτέχνης κάλυπτε το αρχικό σχέδιο με μικρά τετράγωνα, γέμιζε τον τοίχο με τετράγωνα μεγαλύτερης πλευράς και τέλος μελετούσε που κόβουν οι γραμμές τα μικρά τετράγωνα ώστε να τις μεταφέρει στα μεγάλα».

Εδώ, παρατηρούμε από τη μια την μεταφορά μορφής ενώ συγχρόνως υπάρχει, έστω και άτυπα, μια ποσοτική προσέγγιση αυτής της μεταφοράς η οποία είναι στην ουσία ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός (ομοιοθεσία).

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι δεν είναι βέβαιο πως ο Θαλής είχε αναπτύξει μια Μαθηματική θεωρία ομοιότητας τριγώνων όπως και επίσης είναι αμφίβολο αν χειρίστηκε αναλογίες για την μέτρηση του ύψους πυραμίδας (Heath 1981 σελ 183). Αυτό το οποίο αξιοποίησε ο Θαλής ήταν η μορφική ομοιότητα ισοσκελών ορθογωνίων τριγώνων. Τρεις αιώνες αργότερα ο Ευκλείδης κάνει αποδείξεις οι οποίες σχετίζονται με την ομοιότητα (V I 4 πρόταση 4) αλλά έχοντας ήδη στην διάθεσή του τη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου, μια θεωρία αρκετά αφηρημένη.

Στην ομοιότητα δυο σχημάτων διακρίνουμε δυο είδη λόγων, τον λόγο δυο πλευρών του ενός σχήματος (εσωτερικός λόγος), ο οποίος χαρακτηρίζει άμεσα την μορφή ενός ορθογωνίου τριγώνου, και τον λόγο δυο ομολόγων πλευρών των δυο σχημάτων (λόγος ομοιότητας).

Ο εσωτερικός λόγος φαίνεται να χρησιμοποιείται περισσότερο από τον Ευκλείδη ενώ η διατήρηση του λόγου αυτού αποτέλεσε την αρχή για την κατασκευή εργαλείων μέτρησης αποστάσεων και υψών, τα γνωστά Quadrants (εικόνα 3).

Ο Smith (1958) αναφέρει ότι οι μετρήσεις μέχρι και το 800 μ.χ είχαν εμπειρικό χαρακτήρα και ότι οι Άραβες κατασκεύασαν πρώτοι πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούσαν σε κάθε γωνία τον εσωτερικό λόγο των καθέτων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου. Με τον τρόπο αυτό μεταβαίνουμε από την ομοιότητα στην τριγωνομετρική εφαπτομένη ως συνάρτηση.

Η έννοια της μαθηματικοποίησης (mathematization)

Ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών για **μαθηματικοποίηση**. Κατά την Sfard (1997), οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης δείχνουν όλο και περισσότερο προτίμηση στην ανάπτυξη της μαθηματικοποίησης παρά στην μαθηματική γνώση καθαυτή. Αυτό δίνει μια άλλη κατεύθυνση στην έρευνα αφού την απομακρύνει από την απλή αξιολόγηση της εκτέλεσης πράξεων (performance) από μεριάς των μαθητών.

Οι Freudenthal (1968, 1991), Treffers (1978, 1987) προτείνουν δυο είδη μαθηματικοποίησης, την **οριζόντια** και την **κατακόρυφη** και σημειώνουν ότι μέσω της οριζόντιας πραγματοποιείται μια μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων ενώ με την κατακόρυφη η διεργασία συντελείται εσωτερικά μέσα στον κόσμο των συμβόλων. Δηλαδή, με την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση αναδιοργανώνουμε το ίδιο το μαθηματικό περιεχόμενο ανακαλύπτοντας συνδέσεις μεταξύ των εννοιών και στρατηγικών, ενώ με την οριζόντια επανερχόμαστε με τα μαθηματικά εργαλεία για να οργανώσουμε και να λύσουμε προβλήματα.

Το ερώτημα, που προκύπτει σχετικά με την μαθηματικοποίηση, αφορά στην δυνατότητα περιγραφής της πορείας της. Μια συνήθης περιγραφή εξελίσσεται με αφετηρία μια πραγματική κατάσταση που τίθεται ως πρόβλημα και συνεχίζει με την καταγραφή του σταδιακού μετασχηματισμού της κατάστασης αυτής σε μαθηματικό πρόβλημα. (Mason 1988).

Ένα σημαντικό μεθοδολογικό κριτήριο το οποίο έχουμε χρησιμοποιήσει για την περιγραφή της πορείας της μαθηματικοποίησης μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Τα νοητικά εργαλεία τα οποία διαθέτει ο μαθητής και ιδιαίτερα τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ως ένα σύνολο συνδυαστικών αφαιρέσεων, ως μια δομή την οποία επιχειρεί ο μαθητής να προσαρμόσει πάνω σε μια κατάσταση προβλήματος. Στην άποψη αυτή συγκλίνει και ο ψυχολογικός ορισμός της μαθηματικοποίησης του Wheeler, (1982) που την ορίζει διαδικασία μέσω της οποίας ‘‘τοποθετούμε μια δομή πάνω σε μια άλλη δομή’’. Η μαθηματική δομή πρέπει να προσαρμοστεί στην κατάσταση προβλήματος και κατά συνέπεια θεωρεί την μαθηματικοποίηση ως κατασκευή η οποία μπορεί να ανιχνευθεί κυρίως σε καταστάσεις λύσης προβλήματος, δηλαδή σε καταστάσεις που ανάγουν κάτι το οποίο δεν διαθέτει προφανές μαθηματικό περιεχόμενο σε κάτι το οποίο διαθέτει.

Επεκτείνοντας, την δομική προσέγγιση του Wheeler, θα υποστηρίζαμε ότι η μαθηματική δομή που εφαρμόζεται σε μια πραγματικότητα την μαθηματικοποιεί μετασχηματίζοντάς την, την καθιστά δηλαδή εννοιολογικά άρα και σημασιολογικά διαφορετική από την αρχική κατάσταση ή όπως αναφέρει ο Skovsmose (1994, σελ 102) ¨Σε μια διαδικασία μοντελοποίησης τα μαθηματικά δεν ακουμπούν απλά την πραγματικότητα αλλά την συμπιέζουν και την μετασχηματίζουν …ένα μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να στηρίζεται σε μια συγκεκριμένη ερμηνεία της πραγματικότητας. Άλλες δυνατότητες δεν υπάρχουν. Δεν μπορούμε να έρθουμε σε επαφή με κάποια ‘πραγματικότητα’ αν δεν την δομήσουμε¨.

Τα μαθηματικά καθίστανται μέρος του εννοιολογικού πλαισίου το οποίο χρησιμοποιούμε για να μεταφράσουμε και ξαναμεταφράσουμε την πραγματικότητα ενώ χάρη σε αυτό το πλαίσιο η καθημερινή πραγματικότητα δομείται κατά τρόπο μαθηματικό.

Εξάλλου, η αντίληψη ότι προσεγγίζουμε και συγκροτούμε την πραγματικότητα μέσω των ήδη εγκαταστημένων αφαιρέσεων του νου υποστηρίζεται και στις εργασίες των Ohlsson και Lehtinen (1997) οι οποίοι ισχυρίζονται ότι η άποψη κατά την οποία η αφαιρετική διαδικασία κατευθύνεται από τις συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις προς τις αφαιρέσεις και την γενίκευση δεν ερμηνεύει ικανοποιητικά το φαινόμενο της συγκρότησης της γνώσης. Η αφαίρεση είναι ιδιότητα μιας γνωστικής δομής και αυτή η ιδιότητα δεν σχετίζεται με το πλήθος των επί μέρους περιπτώσεων οι οποίες προσιδιάζουν σε αυτήν, αφού οι περιπτώσεις αυτές είναι ιδιότητα του κόσμου και όχι της γνώσης. Αντίθετα γνωρίζουμε ότι πολλές αφαιρέσεις αποτυγχάνουν να βρουν εφαρμογή στα φαινόμενα.

Θεωρούμε λοιπόν ότι κατά την πορεία της μαθηματικοποίησης, οι αφαιρέσεις δεν προκύπτουν από την φυσική δομή της κατάστασης προβλήματος, αλλά αντίθετα αποτελούν επινοήσεις και εγχειρήματα επιβολής δομής στην κατάσταση ενώ συγχρόνως βρίσκονται σε μια συνεχή αλληλεπίδραση με αυτήν. Αυτή η αμφίδρομη λειτουργία οργανώνει τις ήδη υπάρχουσες αφαιρέσεις σε περισσότερο πολύπλοκες αφηρημένες δομές οι οποίες και αποτελούν νέο γνωστικό υλικό για το υποκείμενο. Ο κύκλος της Μαθηματικοποίησης που προτείνουμε θα μπορούσε να περιγραφεί μέσω του σχήματος (3).

Οι εγκατεστημένες Μαθηματικές αφαιρέσεις αποτελούν τα βασικά νοητικά εργαλεία μέσω των οποίων προσεγγίζουμε καταρχήν μια κατάσταση προβλήματος. Υπάρχουν δυο δυνατότητες:

α) Οι αφαιρέσεις επιβάλλουν στο πρόβλημα δομή τέτοια που ενδεχομένως οδηγεί στην λύση του και με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η γνωστική δομή των εν λόγω αφαιρέσεων (οριζόντια μαθηματικοποίηση)

β) Οι αφαιρέσεις επιχειρούν να επιβάλλουν μια δομή στην κατάσταση αλλά αποτυγχάνουν καθώς η δομή δεν είναι κατάλληλη και το υποκείμενο θα πρέπει να επανασυγκροτήσει το νοητικό του υλικό ώστε να εμπλουτισθούν οι Μαθηματικές του δομές με νέες (οριζόντια; και κάθετη μαθηματικοποίηση).

Μια πιλοτική έρευνα

Η έρευνα που θα περιγράψουμε είναι πιλοτική ενός ερευνητικού project το οποίο έχει στόχο την διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές του Γυμνασίου συγκροτούν και διαχειρίζονται την έννοια της ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων μέσα σε ένα περιβάλλον το οποίο συνδυάζει εργαλεία όπως έναν αυτοσχέδιο μηχανισμό μέτρησης και έναν υπολογιστή εφοδιασμένο με το Γεωμετρικό λογισμικό sketchpad. Η έρευνα είναι διαπιστωτική των υποθέσεων μας για την μαθηματικοποίηση ενώ συγχρόνως διερευνά τα εμπόδια των μαθητών στην συγκρότηση της έννοιας της ομοιότητας. Ο σχεδιασμός της έρευνας έγινε με στόχο τη μελέτη της επίδρασης του μαθησιακού περιβάλλοντος, το οποίο αναφέραμε προηγουμένως, στην πορεία της μαθηματικοποίησης από την πρώτη επαφή με τα εργαλεία μέχρι την ανάδειξη της τριγωνομετρικής συνάρτησης της εφαπτομένης.

Ο μηχανισμός μέτρησης (εικόνα 4) έχει κατασκευαστεί με βάση τα λειτουργικά χαρακτηριστικά του Quadrant και αποτελείται από ένα τετράγωνο. Στην μία του κορυφή (κάτω αριστερά) έχει προσαρμοστεί ένας δείκτης Δ ο οποίος έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται γύρω από τη κορυφή και πάνω στον δείκτη έχουν προσαρμοστεί ένας μετρητής Μ, της κλίσης του δείκτη, και ένα μικρό λέιζερ Λ. Στο πάνω μέρος του τετραγώνου έχουν τοποθετηθεί δύο δείκτες Ι (αλφάδια) οι οποίοι ελέγχουν αν το τετράγωνο διατηρείται απολύτως κατακόρυφο. Ο δείκτης Δ κινείται εμπρός από μία αριθμημένη ράβδο Α.

Αν διατηρήσουμε σταθερή τη γωνία του δείκτη και μετακινήσουμε το εργαλείο ώστε να μετρηθεί κάποιο ύψος τότε δημιουργούνται ορθογώνια τρίγωνα στο χώρο (εικόνα 5) μέσω των οποίων μπορούμε να προσεγγίσουμε το θεώρημα του Θαλή.

Η έρευνα έγινε στο 26^{o} Γυμνάσιο της Αθήνας και συμμετείχαν τέσσερις μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ τάξης οι οποίοι απασχολήθηκαν για οκτώ διδακτικές ώρες εκτός σχολικού προγράμματος.

Η επιλογή των μαθητών έγινε τυχαία και με βάση την εκδήλωση ενδιαφέροντος από τους ίδιους. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι τρεις μαθητές (Χ), (Μ), (Β) είχαν ήδη διδαχθεί μαζί με τους υπολοίπους συμμαθητές τους την έννοια της ομοιότητας τριγώνων, μέσα στο τρέχον ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου, ενώ ο τέταρτος μαθητής (Θ)δήλωσε ότι απουσίαζε από την τάξη κάποιες ώρες στις οποίες έγινε η διδασκαλία από τον καθηγητή.

Τα δεδομένα της έρευνας συγκεντρώθηκαν από βιντεοσκόπηση της οποίας είχε προηγηθεί σύντομη συνέντευξη με τους μαθητές

<u>Η πορεία της έρευνας</u>

¨Η έρευνα είχε την μορφή μιας ημιδομημένης και κατευθυνόμενης πορείας στην οποία συμμετείχε ο ερευνητής.

Οι μαθητές είχαν χωριστεί σε δυο ομάδες (Χ), (Θ) (πρώτη ομάδα) και (Μ), (Β) (δεύτερη ομάδα). Κάθε ομάδα απασχολήθηκε για 4 ώρες ανεξάρτητα η μια ομάδα από την άλλη.

Σε πρώτη φάση οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με το εργαλείο περιεργάστηκαν τα μέρη του και στη συνέχεια τους ζητήθηκε να σκεφτούν με ποιόν τρόπο το εργαλείο θα μπορούσε να μετρήσει το ύψος ενός απομακρυσμένου αντικειμένου. Στη συνέχεια οι μαθητές κατασκεύασαν ένα γεωμετρικό σχήμα το οποίο να αναπαριστά την δεδομένη κατάσταση του προβλήματος ενώ τους ζητήθηκε να εντοπίσουν τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη τα οποία υπεισέρχονται στο πρόβλημα.

Ακολούθως ζητήθηκε από τους μαθητές να αποφασίσουν για το αν υπάρχει κάποια Μαθηματική έννοια η οποία είναι κατάλληλη για την δεδομένη κατάσταση του προβλήματος.

Στην επόμενη φάση οι μαθητές ασχολήθηκαν με μια αναπαράσταση του εργαλείου στον υπολογιστή για την κατασκευή της οποίας χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό sketchpad. Εδώ οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να μεταβάλουν δυναμικά το σχήμα να πραγματοποιήσουν μετρήσεις των μεγεθών τα οποία μεταβάλλονται και να κατασκευάσουν πίνακα τιμών και μέσω αυτού τη γραφική παράσταση των σημείων σε ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Η διάταξη των σημείων υπήρξε αντικείμενο διαπραγμάτευσης με τους μαθητές.

Τέλος διερευνήθηκε η δυνατότητα να συγκροτηθεί από τους μαθητές μια έννοια συνάρτησης η οποία θα συνοψίζει τις μετρήσεις που προκύπτουν από το λογισμικό σε έναν μαθηματικό τύπο θεωρώντας ότι η μετάβαση σε τυπικές συμβολικές αποδώσεις αποτελεί ένα υψηλό επίπεδο αφαίρεσης και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί τελικός στόχος μιας πορείας μαθηματικοποίησης.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Η ποιοτική ανάλυση των δεδομένων της έρευνας έγινε μέσω της ταξινομίας SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome (Biggs J.1999(εικόνα 7), Μπαρκάτσας, Α 1999) σε συνδυασμό με τον προτεινόμενο κύκλο της μαθηματικοποίησης (εικόνα 3).

<u>Φάση πρώτη: Προ-δομική</u>

Οι μαθητές περιγράφουν τα διάφορα μέρη του εργαλείου αλλά αυτά παραμένουν ασύνδετα μεταξύ τους και μάλιστα εκλαμβάνουν το εργαλείο ως μέσον για την μέτρηση ‘‘της ευθύτητας του χώρου’’(πρώτη ομάδα), σε αυτό το συμπέρασμα οδηγήθηκαν ίσως από το αλφάδι το οποίο υπήρχε στην κορυφή του εργαλείου. Οι μαθητές αυτοί πέρασαν στην επόμενη φάση από τη στιγμή που ενεργοποίησαν το λέιζερ και παρατήρησαν το σημείο στο οποίο εστίασε στον απέναντι τοίχο. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας παρέμειναν σε όλη τη διάρκεια της πρώτης ώρας στο επίπεδο αυτό.

<u>Φάση δεύτερη: Μονο-δομική</u>

Εδώ το ενδιαφέρον εστιάζεται στις προσεγγίσεις του προβλήματος της μέτρησης ενός ύψους με τη βοήθεια του εργαλείου από τον μαθητή (Μ), ο οποίος έχει παρακολουθήσει τις παραδόσεις για τα όμοια τρίγωνα, και από τον μαθητή (Θ) ο οποίος είχε σημειώσει απουσίες (πρώτη ομάδα).

Επεισόδιο

Οι μαθητές μόλις έχουν ενεργοποιήσει το λέιζερ και ο ερευνητής (Ε) ρωτά:

Ε Βλέπετε τι είναι;

Θ: Αυτό είναι από στυλό, αυτό είναι μια κεραία αυτοκινήτου….(δείχνει τον δείκτη του εργαλείου)(<u>*καμία επαφή με το θέμα)*</u>

Μ: Αυτό είναι σαν μια γωνία (δείχνει τον δείκτη του εργαλείου), σαν μια ευθεία <u>*(προσδιορίζει)*</u>

Θ: Α ναι σα γωνία είναι

……….

Ε: Προσέξτε την αρίθμηση εδώ (εννοεί την αριθμημένη ράβδο Α)

Θ: Δείχνει το μέγεθος

Μ: Δείχνει την μια κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου<u>*(προσδιορίζει μια σύνδεση)*</u>

……..

Ε: Επίσης το εργαλείο μπορεί να μετακινείται μπρος πίσω αφού διαθέτει ρόδες

Θ: Αυτοσχέδιο είναι;(<u>*καμία επαφή με το θέμα*</u>)

Μ: (σκέφτεται) Μας χρειάζεται να ξέρουμε τη μια κάθετη μεριά δε… θα χρειαζόμαστε δυο πλευρές ή μία;(μονολογεί) (*Επιχειρεί και άλλες συνδέσεις)*

Εδώ η ενεργοποίηση του λέιζερ και η μετακίνηση του εργαλείου παράγουν τις εποπτείες πάνω στις οποίες ο (Μ) προσαρμόζει το σχήμα του ορθογωνίου τριγώνου και περνά στο επόμενο στάδιο της απλής σύνδεσης. Ο (Θ) παραμένει εγκλωβισμένος στα εξωτερικά χαρακτηριστικά του εργαλείου και φαίνεται να περνά στο επόμενο στάδιο μέσω της λεκτικής επικοινωνίας με τον (Μ).

Φάση τρίτη: Πολυδομική

Επεισόδιο

Οι μαθητές έχουν κατασκευάσει στα τετράδιά τους από ένα γεωμετρικό σχήμα και τότε:

Μ: Το βρήκα! Αυτό (δείχνει το μικρό τρίγωνο) και αυτό (δείχνει το μεγάλο τρίγωνο) είναι ανάλογα…. Επειδή έχουν μια πλευρά κοινή, έχουν δυο γωνίες… μάλλον δεν έχουν μια πλευρά κοινή έχουν δυο γωνίες που είναι ίσες εκ κατασκευής και μια γωνία κοινή *(συνδυάζει ανοργάνωτα)*

Ε: Λοιπόν περιγράψτε έναν πρακτικό τρόπο να υπολογίσουμε το ύψος της αίθουσας

Θ Ξέρουμε πόσο μακριά φτάνει το λέιζερ;

Ε: Γιατί το ρωτάς αυτό;

Θ: Γιατί αν το βάλουμε ας πούμε εκεί πέρα(δείχνει πίσω) και μας πείτε ας πούμε ότι το λέιζερ έχει 10 μέτρα(εννοεί εμβέλεια) και δούμε ότι το λέιζερ ίσα ίσα που φτάνει τότε υπολογίζουμε ότι είναι γύρω στα 10 μέτρα η υποτείνουσα και γνωρίζοντας το πάτωμα πόσο μήκος έχει μπορούμε χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας να βρούμε το ύψος *(Εστίαση μόνο σε ένα σημείο)*

Εδώ οι μαθητές ακλουθούν διαφορετική προσέγγιση στον υπολογισμό του ύψους μέσω ορθογωνίων τριγώνων. Ο (Μ) έχει πραγματοποιήσει κατάλληλες συνδέσεις μεταξύ των στοιχείων του εργαλείου και των γεωμετρικών οντοτήτων και έτσι εργάζεται με δυο τρίγωνα οπότε επιλέγει να προσαρμόσει το μοντέλο της ομοιότητας των ορθογωνίων τριγώνων πάνω στη δομή του προβλήματος.

Για τον (Θ) φαίνεται πως το μικρό τρίγωνο δεν συσχετίζεται ποσοτικά με το μεγάλο οπότε επιλέγει την τριγωνομετρική προσέγγιση στο ένα ορθογώνιο τρίγωνο και επιμένει να προσαρμόσει το πρόβλημα στο μοντέλο του ενός ορθογωνίου τριγώνου υποστηρίζοντας ότι θα ήταν χρήσιμο να υπολογιστεί η υποτείνουσά του. Ο (Μ) τότε του απαντά ότι αυτό θα απαιτούσε επιπλέον «πολύτιμο χρόνο» πράγμα που αποτελεί ένδειξη της σημασίας που αποδίδει ο μαθητής στην καθολική απαίτηση για ελαχιστοποίηση των βημάτων για την λύση ενός προβλήματος. Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι ο (Θ) παραμένει κοντά στο μονοδομικό επίπεδο της ταξινομίας SOLO έχοντας πραγματοποιήσει μόνο μια προφανή σύνδεση του εργαλείου με το ορθογώνιο τρίγωνο.

Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας έφτασαν στη φάση αυτή μέσω των γεωμετρικών σχημάτων τα οποία κατασκεύασαν στα τετράδιά τους όμως δεν αναγνωρίζουν όμοια τρίγωνα αφού φαίνεται πως δεν έχουν συγκροτήσει καμία έννοια ομοιότητας.

Φάση τέταρτη: Συσχέτιση

Οι μαθητές στη συνέχεια χειρίστηκαν την αναπαράσταση του εργαλείου στον υπολογιστή (εικόνα 6), εντόπισαν τα μεταβαλλόμενα μεγέθη και κατασκεύασαν έναν πίνακα τιμών για τα δυο βασικά ποσά του προβλήματος την απόσταση d και το ύψος h. Όταν οι μαθητές απεικόνισαν μέσω του λογισμικού τα ζεύγη τιμών σε άξονες εμφανίστηκαν σημεία τα οποία βρίσκονταν σε μια ευθεία και οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν την συγγραμμικότητα των σημείων.

Επεισόδιο

- *Πρώτη ομάδα:*

Ε: Το περιμέναμε αυτό;

Μ:Ναι αφού τα ποσά είναι ανάλογα *(Εξηγεί, συσχετίζει)*

Ε: Τι εννοείς;

Μ: Όσο μεταβάλλεται το ένα το ίδιο θα μεταβάλλεται και το άλλο….μάλλον.. δεν είμαι σίγουρος αλλά για να βγαίνει η συνάρτηση ευθεία είναι κάτι που γίνεται μόνο στα ανάλογα ποσά.

Θ:Ναι το θυμάμαι από τον καθηγητή της Φυσικής που μας είχε δείξει γραφικές παραστάσεις *(συνδυάζει).*

…………..

Ε:Αφού είναι ανάλογα ποια σχέση τα συνδέει;

(Οι μαθητές βρίσκονται σε αδιέξοδο ο (Μ) κοιτάζει τον πίνακα τιμών και στη συνέχεια υποστηρίζει ότι τα ποσά δεν είναι ανάλογα γιατί οι διαφορές των τιμών δεν είναι σταθερές!)

Ε:Να βρούμε τότε ποια σχέση τα συνδέει

Μ: Να πάρουμε καλύτερα τον λόγο τους;

Ε:Πως το σκέφτηκες;

Μ:Αφού δεν είναι η διαφορά τους θα είναι ο λόγος τους *(αντιπαραθέτει)*

Ε: Υπάρχει περίπτωση να μην τα συνδέει ο λόγος;

Μ: (Σκέφτεται και κινεί την προσομοίωση του εργαλείου στον υπολογιστή) …. Όχι γιατί όπως κινούνται τα τρίγωνα….. παραμένουν όμοια άρα έχουν τον ίδιο λόγο.*(Εξηγεί τις αιτίες)*

Εδώ οι μαθητές βρίσκονται μπροστά σε πολλαπλές αναπαραστάσεις της λειτουργίας του εργαλείου(εικονική, πίνακας τιμών, γράφημα) και η αναδιοργάνωση των εννοιών ομοιότητα, λόγος, αναλογίες ήταν απαραίτητη ώστε να προσαρμοστούν στο νέο περιβάλλον. Είναι χαρακτηριστική η αδυναμία του (Μ) να συνδέσει τον πίνακα τιμών με τα ανάλογα ποσά και τον σταθερό λόγο και αυτό συνέβη μόλις χειρίστηκε δυναμικά την προσομοίωση του εργαλείου με αποτέλεσμα να γίνει δυνατή η σύνδεση μέσω των ομοίων τριγώνων. Εδώ, όπως και στο επεισόδιο της δεύτερης φάσης, φαίνεται να ενεργοποιείται ένας εννοιολογικός πυρήνας μεγέθυνσης.

Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι ο (Μ) μεταβαίνει στο επόμενο στάδιο της ταξινομίας SOLO αφού οι έννοιες τις οποίες διαχειρίστηκε στα προηγούμενα στάδια έχουν πλέον συνδεθεί και με τις συναρτησιακές αναπαραστάσεις της λειτουργίας του εργαλείου (πίνακας γράφημα). Η μετάβαση στο στάδιο αυτό του (Μ) υποδεικνύεται και από το γεγονός της κατασκευής ενός τύπου ο οποίος συνδέει το ύψος h με την απόσταση d δηλαδή στο τέλος της φάσης αυτής ο (Μ) σημειώνει : $h=\frac{\gamma}{\beta}d$ (γ, β οι πλευρές του μικρού τριγώνου που σχηματίζεται από το εργαλείο). Ο τύπος αυτός θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι συνοψίζει τις τιμές των ποσοτήτων τις οποίες διαχειρίστηκε ο μαθητής σε μια συναρτησιακή έκφραση η οποία λύνει το πρόβλημα του τρόπου λειτουργίας του εργαλείου ενοποιώντας τις εννοιολογικές του συνιστώσες.

- Δεύτερη ομάδα:

Το ενδιαφέρον στην ομάδα αυτή εστιάζεται στο γεγονός της σταδιακής συγκρότησης εκ μέρους των μαθητών της έννοιας της ομοιότητας των ορθογωνίων τριγώνων σε συνδυασμό με την έννοια της αναλογίας και των ιδιοτήτων της. Εδώ ενώ οι μαθητές χαρακτήρισαν τα ποσά ανάλογα, όταν τα σημεία στον υπολογιστή προέκυψαν συνευθειακά, εν τούτοις δεν κατάφεραν να εφαρμόσουν, για αρκετό χρονικό διάστημα, αναλογίες ώστε να περιγράψουν την ιδιότητα αυτή. Όταν πλέον είχε πραγματοποιηθεί η σύνδεση των αναλογιών με την συγκεκριμένη πραγματική κατάσταση ο ερευνητής επιχειρεί να εκμαιεύσει τον ορισμό των ομοίων τριγώνων από τους μαθητές.

Ε: Πόσα τρίγωνα έχουμε;

Β: Δύο

Ε: Τι χαρακτηριστικό έχουν;

Β: Έχουν ίδιες γωνίες.

Ε: Και τι αποτέλεσμα είχε αυτό;

Μ:Ο λόγος των δυο καθέτων προσκείμενων πλευρών είναι ίδιος.

Ε: Ξέρετε πως τα λένε αυτά τα τρίγωνα;

Β: Όμοια

Ε: Πιστεύεται ότι είναι σωστό να τα λέμε όμοια;

Β: Από τη στιγμή που έχουν ίσες γωνίες και παράλληλες πλευρές

Ε: Σκεφτείτε και γενικότερα

Β: Το ένα είναι σε σμίκρυνση του άλλου.

Ε: Τι σημαίνει όμοιος;

Μ: Ίδιος.

Ε: Ακριβώς ίδιος;

Μ: Μοιάζουν πολύ αλλά δεν είναι ακριβώς ίδια.

Εδώ φαίνεται ότι οι μαθητές είχαν συνδέσει τον ορισμό της ομοιότητας με την απλή μορφική ομοιότητα η οποία με τη σειρά της σχετίζεται από τους μαθητές με την έννοια της μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης. Οι έννοιες αυτές θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως πρωτοτυπικές (prototypes) μορφές ομοιότητας των σχημάτων αφού παρατηρούμε ότι ανακαλούνται και στις δυο ομάδες όταν οι μαθητές σκέπτονται έξω από το τυπικό πλαίσιο των αναλογιών. Ακόμη θα πρέπει να υπογραμμιστεί πως οι ενδείξεις μας επιτρέπουν να θεωρήσουμε ότι οι μαθητές δεν διέθεταν, στην αρχή τουλάχιστον, συγκροτημένη έννοια αναλόγων ποσών και μάλλον διέθεταν μια προμαθηματική αντίληψη των αναλόγων ποσών(Stavy& Tirosh 1996) ως ποσά, στα οποία 'όσο μεταβάλλεται το ένα τόσο μεταβάλλεται και το άλλο'.

Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί ότι η δεύτερη ομάδα δεν συγκρότησε την έννοια της συνάρτησης όπως έγινε στην πρώτη ομάδα.

Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας τα ερευνητικά μας δεδομένα μπορούμε να υποστηρίξουμε πως υπήρξαν ενδείξεις ότι το μαθησιακό περιβάλλον του εργαλείου μέτρησης, σε συνδυασμό με τον υπολογιστή, βοήθησε τους μαθητές να συγκροτήσουν μια έννοια ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων ενταγμένη και διασυνδεδεμένη μέσα στο εννοιολογικό δίκτυο τόσο της διαισθητικής όσο και της τυπικής (μαθηματικής) τους γνώσης.

Είναι χαρακτηριστικό ότι στη δεύτερη ομάδα οι μαθητές, παρόλο που είχαν διδαχτεί στο σχολείο την έννοια της ομοιότητας, δεν κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν την έννοια αυτή στην συγκεκριμένη κατάσταση κάτι το οποίο συνέβη και με τον μαθητή που δεν είχε παρακολουθήσει όλες τις ώρες διδασκαλίας.

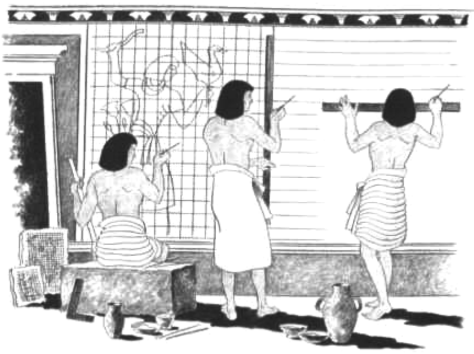
Η καταγραφή των αναλογιών και στις δυο ομάδες είχε αλγοριθμικό χαρακτήρα, οι μαθητές φαίνεται ότι στην αρχή διέθεταν μια προμαθηματική αντίληψη των αναλόγων ποσών (όταν αυξάνεται το ένα αυξάνεται και το άλλο). Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται από τη δυσκολία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν το κριτήριο του λόγου, ή άλλο κριτήριο, για την σύγκριση των μετρήσεων του πίνακα. Το ξεπέρασμα του εμποδίου αυτού οδηγεί τον (Μ) στην σταθερότητα του λόγου και την συνάρτηση

Η χρήση του λογισμικού επέφερε μια ανασυγκρότηση του γνωστικού υλικού των μαθητών και επιτάχυνε, ίσως δε και καθόρισε, το πέρασμα στην υψηλότερη βαθμίδα της SOLO taxonomy και επέτρεψε, έστω και σε έναν μαθητή, να προσεγγίσει έναν συναρτησιακό τύπο ο οποίος συνοψίζει τον συσχετισμό των μετρήσεων του πίνακα κατά συνεχή τρόπο σε μια συνάρτηση.

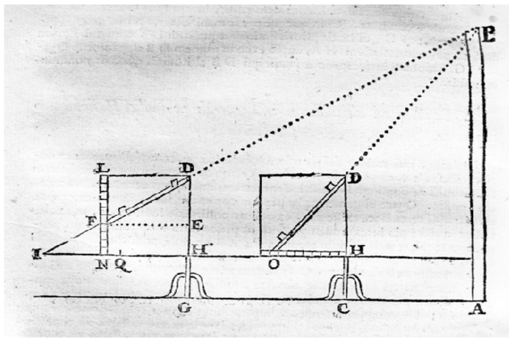
Η ομοιοθεσία ως μεγέθυνση ή σμίκρυνση παρατηρήθηκε και στις δυο ομάδες των μαθητών ως μια άτυπη μορφική αντίληψη της ομοιότητας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το κριτήριο του «πολύτιμου χρόνου», από τον μαθητή της πρώτης ομάδος, στην αναζήτηση της ορθής λύσης

.

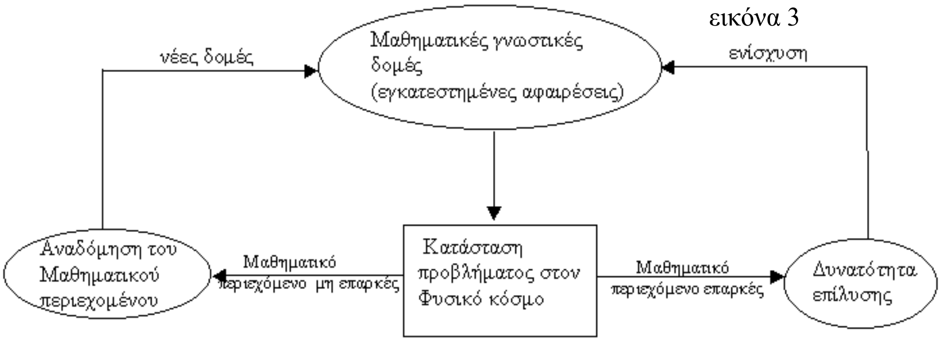
εικόνα 1



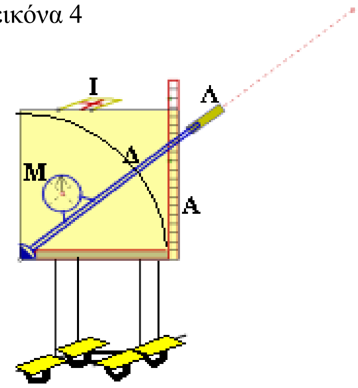
εικόνα 2 **(σχέδιο του 16ου αιώνα)**



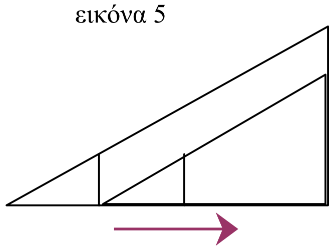
εικόνα 3



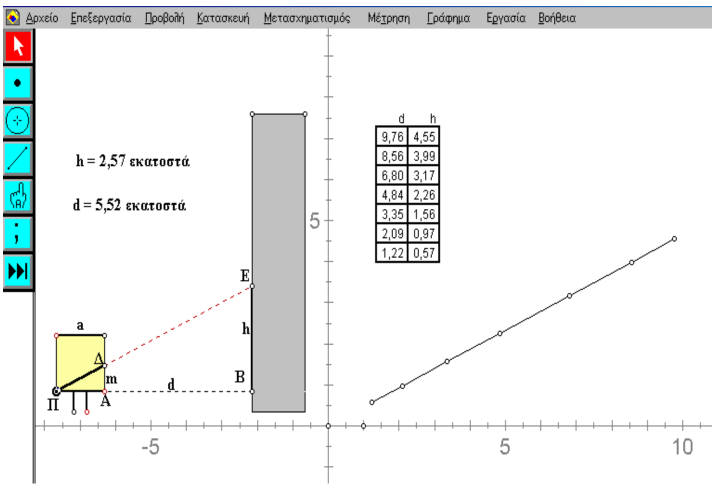
εικόνα 4



εικόνα 5



εικόνα 6



εικόνα 7

Τα επίπεδα κατανόησης κατά την μαθησιακή διαδικασία. (SOLO Taxonomy)	Φάσεις	Ενδεικτικές δράσεις (Σε σχέση με την ταξινομία Bloom)
Επέκτασης των αφαιρέσεων. Οι μαθητές επεκτείνουν τις εννοιολογικές συνδέσεις πέρα από το χώρο στον οποίο εργάστηκαν και πραγματοποιούν γενικεύσεις.	Ποιοτική φάση Τα στοιχεία που χρησιμοποιούν ενσωματώνονται σε μια δομή.	Θεωρητικολογεί Γενικεύει Υποθέτει Στοχάζεται Παράγει
Συσχέτισης Ενδείξεις συσχέτισης- συντονισμού μεταξύ γεγονότων και θεωρίας, δράσης και σκοπού. Κατανοεί μερικά συστατικά τα οποία είναι εννοιολογικά ενσωματωμένα στο θέμα. Μπορεί και εφαρμόζει την ίδια μέθοδο σε οικεία θέματα και καταστάσεις.		Συγκρίνει / Αντιπαραθέτει Εξηγεί τις αιτίες Ενσωματώνει Αναλύει Συσχετίζει Εφαρμόζει
Πολυ δομικό Ενδείξεις κατανόησης των ορίων όχι όμως του συστήματος. Κατανόηση μερικών συστατικών αλλά αυτή παραμένει ασυνεχής. Ανοργάνωτες συλλογές ιδεών και εννοιών που αφορούν στο θέμα. Δεν μπορεί ακόμη να συσχετίσει τα στοιχεία στους πίνακες ταξινόμησης.	Ποσοτική φάση Αυξάνεται το πλήθος των στοιχείων τα οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές.	Απαριθμεί Ταξινομεί Περιγράφει Πινακοποιεί Συνδυάζει Εκτελεί αλγόριθμους
Μονο-δομικό Συγκεκριμένη και περιορισμένη στοιχειώδης κατανόηση μιας περιοχής. Εστίαση μόνο σε ένα σημείο μέσα σε μια σύνθετη κατάσταση.		Προσδιορίζει Θυμάται Εκτελεί απλές διαδικασίες
Προ-δομικό Δεν υπάρχουν ενδείξεις κατανόησης με την έννοια της δημιουργίας συνδέσεων.		Καμία επαφή με το θέμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Biggs J. (1999) ''Teaching for Quality Learning at University Buckingham'': SRHE and Open University Press.

Diggins, J. E. (1965), ''String, Straightedge and Shadow'' Viking Press, New York.

Freudenthal, H. (1968). ''Why to Teach Mathematics so as to Be Useful''. Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1991). ''Revisiting Mathematics Education''. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gentner D. , Medina J. ''Similarity and the development of rules'' Cognition 65 (1998) 263-297.

Heath T.: (1981) "A History of Greek Mathematics" Volume 1 Dover Publications Inc. N.Y

Lakoff G. & Johnson M. (1980), ''Metaphors We Live By'', The university Press. Chicago.

Mason, J. (1988). ''Modeling: what do we really want pupils to learn?'' In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. London: Hodder and Stoughton

Μπαρκάτσας Α : ''Η ταξινομία SOLO και οι εφαρμογές της στην Μαθηματική παιδεία. Μια σύγχρονη θεωρία μάθησης με τεράστιο ερευνητικό και αξιολογικό δυναμικό'' Πρακτικά 16ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας Λάρισα 1999

Newell F. N. - Bulthoff H. H. (2002), ''Categorical Perception of familiar objects'' Cognition 85, 113-143.

Ohlsson, S & Lehtinen, E (1997) ''Abstraction and the acquisition of complex ideas'' International Journal of Educational Research v.27 n.1 p. 37-48

Schwarz. B, Hershkowitz.R (1999) ''Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept?. The role of computer tools '' JRME July 1999.

Sfard, A. (1997). ''The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing?'' In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 2, pp. 491–512). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Skovsmose O. (1994), ''Towards a philosophy of critical mathematics education'' Kluwer academic publishers.

Smith D. E.: "History of Mathematics" " Dover Publications Inc 1958.

Stavy R. & Tirosh D. (1996), ''Intuitive rules in science and mathematics: the case of "more of A more of B" *Int. J. Sci. Educ.* 18 (6), 653-667.

Treffers, A. (1978). ''Wiskobas doelgericht [Wiskobas goal-directed]''. Utrecht: IOWO.

Treffers, A. (1987). ''Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction'' the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Vollrath H. J. (1977), ''The understanding of similarity and shape in classifying tasks'' Education studies in Mathematics 8 , p 211- 224.

Wheeler D. (1982), ''Mathematization Matters'' *For the Learning of Mathematics*, 3,1; 45 -47.

Abstract

Starting with a measuring problem of height that involves the similarity of right angled triangles, we attempt to investigate the process of mathematization obtained by students. In a rich learning environment of multiple representations, the students of the third year high school attempted to present the principles upon which a particular instrument for the measure of the height of distant object is based. The usage, treating and understanding of the instruments and the mathematical attributions to which the students came to are analyzed via selective facts according to SOLO taxonomy.