

Νέες προοπτικές στη διδασκαλία της γεωμετρίας: Η περίπτωση του εμβαδού πολυγώνων

Πιττάλης Μ., Μουσουλίδης Ν., & Χρίστου Κ.
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
m.pittalis@ucy.ac.cy, n.mousoulides@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται μερικές ιδέες για τη διδασκαλία του εμβαδού πολυγώνων με τη χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας EucliDraw Jr και του ψηφιακού διαδραστικού πίνακα (Interactive Whiteboard). Το περιβάλλον αυτό προσφέρει σε εκπαιδευτικούς και μαθητές ένα νέο, δυναμικό και αλληλεπιδραστικό πλαίσιο εργασίας στο οποίο κατασκευάζουν σχήματα, διατυπώνουν και ελέγχουν υποθέσεις, για να διερευνήσουν το εμβαδόν πολυγώνων. Η χρήση αισθησιοκινητικών ενεργειών με τη βοήθεια του πίνακα και οι δυνατότητες του λογισμικού για διαχωρισμό και ένωση πολυγώνων, βοηθούν τους μαθητές να δομήσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας διατήρησης του εμβαδού και στη συνέχεια να ανακαλύψουν τρόπους υπολογισμού του εμβαδού πολυγώνων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: δυναμική γεωμετρία, διατήρηση εμβαδού, ψηφιακός διαδραστικός πίνακας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας EucliDraw Jr, επιπρόσθετα από τα συνηθισμένα εργαλεία που προσφέρουν άλλα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, παρέχει στο μαθητή δύο ακόμη σημαντικά εργαλεία: τα εργαλεία διαχωρισμού και ένωσης πολυγώνων (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004). Τα εργαλεία αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στη διδασκαλία του υπολογισμού του εμβαδού πολυγώνων με βάση την αρχή της διατήρησης του εμβαδού, που αποτελεί θεμελιώδη και ουσιαστική προεργασία για την κατανόηση της έννοιας και της μέτρησης του εμβαδού (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981; Maher & Beattys, 1986). Τα εργαλεία αυτά σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας, όπως η δυνατότητα που παρέχουν στο μαθητή να κατασκευάζει γεωμετρικά αντικείμενα διατηρώντας τις μεταξύ τους σχέσεις, αναπτύσσουν ένα πλούσιο περιβάλλον μάθησης (Jones, 2000). Επιπλέον, η μετακίνηση και ο μετασχηματισμός των αντικειμένων με τη βοήθεια του ποντικιού, τα εργαλεία, οι ορισμοί, οι τεχνικές διερεύνησης και οι οπτικές αναπαραστάσεις που προσφέρονται, οικοδομούν ένα δυναμικό περιβάλλον μάθησης, ιδανικό για τη διδασκαλία του υπολογισμού εμβαδού πολυγώνων.

Στο θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας παρουσιάζονται οι δυνατότητες των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας με έμφαση στο λογισμικό EucliDraw Jr και η σημασία της αρχής της διατήρησης του εμβαδού για τη διδασκαλία της έννοιας του υπολογισμού του εμβαδού. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση εναλλακτικών διδακτικών σεναρίων διδασκαλίας του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού παραλληλογράμμου και τριγώνου. Τα σεναρία αυτά υιοθετούν διερευνητικές διαδικασίες υπολογισμού του εμβαδού και στηρίζονται στην αρχή της διατήρησης του εμβαδού. Το πλαίσιο στο οποίο υλοποιούνται τα διδακτικά σεναρία ενσωματώνει τη χρήση του ψηφιακού διαδραστικού πίνακα, ώστε το εικονικό περιβάλλον που δημιουργεί το λογισμικό EucliDraw Jr να εμπλουτιστεί με αισθησιοκινητικές δραστηριότητες (Miller & Glover, 2002).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Προγράμματα Δυναμικής Γεωμετρίας

Η εξάπλωση των σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων, όπως των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να βελτιώσουν τη διδασκαλία τους και τους μαθητές να εμπλουτίσουν τις εμπειρίες τους. Η κατάλληλη χρήση της δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να αναπτύξει την ανώτερη μαθηματική σκέψη των παιδιών (NCTM, 2000). Τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας παρέχουν την ευκαιρία στους μαθητές να διερευνήσουν, να κάνουν εικασίες, να αναπτύξουν την ικανότητα αιτιολόγησης, να επινοήσουν και να κάνουν γενικεύσεις. Ο Papert (1996) χαρακτήρισε τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας ως μικρόκοσμοις οι οποίοι προσφέρουν τη δυνατότητα στο μαθητή να μάθει με φυσικό, ευχάριστο και συνεργατικό τρόπο. Οι μαθητές μπορούν να παίζουν ελεύθερα, να κατασκευάζουν τα δικά τους αντικείμενα και να συζητήσουν τις κατασκευές τους με τους συμμαθητές τους.

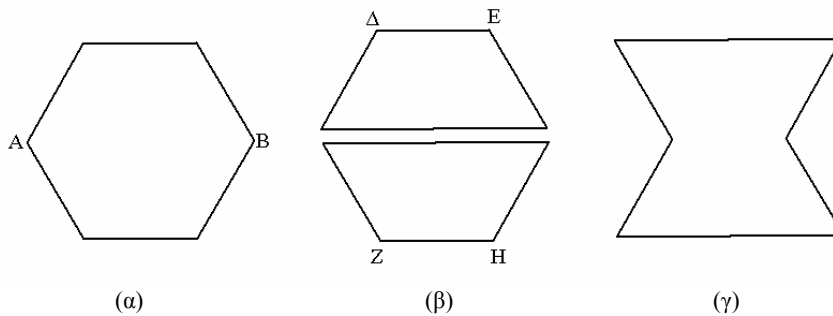
Ο Jones (2000) εξέτασε τη συμβολή των προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας στην ανάπτυξη του παραγωγικού συλλογισμού και των διαδικασιών απόδειξης. Υποστηρίζει ότι η χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας δεν διευκολύνει απλώς τις νοητικές διαδικασίες των μαθητών κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αλλά τις διαμορφώνει και τις μετασχηματίζει. Η χρήση κατάλληλα δομημένων δραστηριοτήτων, η παροχή ανατροφοδότησης από τον εκπαιδευτικό και η ανάπτυξη μαθησιακού περιβάλλοντος που ευνοεί τη διατύπωση υποθέσεων ενισχύουν την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διαμορφώνουν μαθηματικές αιτιολογήσεις και αποδείξεις που συμβάλουν στην ενίσχυση του παραγωγικού συλλογισμού (Jones, 2000). Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας ενισχύουν την ικανότητα μαθηματικής αιτιολόγησης και απόδειξης των μαθητών και τους βοηθούν να διαχωρίσουν το τι φαίνεται (πραγματιστική αντίληψη) από τις ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων (εννοιολογική αντίληψη) (Laborde, 1998). Η ανάπτυξη κατάλληλων διδακτικών δραστηριοτήτων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ του επαγωγικού χαρακτήρα του λογισμικού και του παραγωγικού χαρακτήρα της διαδικασίας της απόδειξης, ώστε να βοηθηθούν να αξιοποιήσουν τα εργαλεία του λογισμικού και τη δυνατότητα για εξερεύνηση, επιβεβαίωση και επαλήθευση για μετάβαση στην τυπική μαθηματική απόδειξη (Christou, et al., 2004).

Κάθε πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας αναπτύσσει μαζί με το μαθητή ένα δυναμικό σύστημα συνεχούς αλληλεπίδρασης (Brousseau, 1997). Κάθε ενέργεια του μαθητή ακολουθείται από μια αντίδραση του προγράμματος και κάθε ενέργεια του προγράμματος ακολουθείται από μια αντίδραση του μαθητή. Αυτό το σύστημα συνεχούς αλληλεπίδρασης προγράμματος – μαθητή παρέχει στο μαθητή συνεχή ανατροφοδότηση. Η ανατροφοδότηση αυτή καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την επιλογή των γνωστικών στρατηγικών που θα χρησιμοποιήσει ο μαθητής στη διαδικασία λύσης προβλήματος (Laborde, 1998). Σημαντικό στοιχείο του συστήματος αλληλεπίδρασης λογισμικού – μαθητή είναι το εργαλείο μετακίνησης αντικειμένων το οποίο προσφέρει τη δυνατότητα μεγέθυνσης, σμίκρυνσης, μετατοπισμού και περιστροφής των κατασκευών χωρίς να μεταβάλλονται τα δομικά χαρακτηριστικά και οι ιδιότητές τους (Botana & Valcarce, 2002).

Λογισμικό EucliDraw Jr

Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας EucliDraw Jr παρέχει όλα τα εργαλεία και δυνατότητες που προσφέρουν άλλα ευρέως γνωστά λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας όπως το Geometer's Sketchpad και το Cabri. Επιπλέον, παρέχει εργαλεία όπως ο διαχωρισμός και η ένωση πολυγώνων, η διαίρεση κύκλου σε τομείς, η εύκολη κατασκευή οποιουδήποτε κανονικού πολυγώνου και άλλα ειδικά εργαλεία, απαραίτητα και χρήσιμα στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Το εργαλείο διαχωρισμού και ένωσης πολυγώνων στηρίζεται στην αρχή της διατήρησης του εμβαδού και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία του υπολογισμού εμβαδού πολυγώνων.

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται η διαδικασία διαχωρισμού ενός κανονικού εξαγώνου σε δύο ισοσκελή τραπέζια και στη συνέχεια η ένωση των δύο τραπέζιων σε ένα μη-κυρτό εξαγώνο. Στο Σχήμα 1(α) παρουσιάζεται ένα κανονικό εξαγώνο το οποίο θέλουμε να διαχωρίσουμε κατά μήκος του ΑΒ. Ο διαχωρισμός του εξαγώνου μπορεί να γίνει με τη χρήση του εργαλείου «Διαχωρισμός Πολυγώνου» σε τρία βήματα. Αφού επιλεγθεί το εργαλείο, επιλέγεται το πολύγωνο πατώντας σε ένα σημείο της περιφέρειάς του και στη συνέχεια επιλέγονται διαδοχικά τη σημεία Α και Β κατά μήκος των οποίων θα διαχωριστεί το πολύγωνο. Το λογισμικό αυτόματα διαχωρίζει το πολύγωνο διατηρώντας στην οθόνη το αρχικό πολύγωνο και τα δύο που έχουν δημιουργηθεί. Στο Σχήμα 1(β) παρουσιάζονται τα δύο ισοσκελή τραπέζια που έχουν προκύψει από το διαχωρισμό του αρχικού πολυγώνου. Τα δύο αυτά τραπέζια μπορούν να ενωθούν με οποιοδήποτε τρόπο θέλει ο μαθητής. Αν, για παράδειγμα, ο μαθητής θέλει να ενώσει τα δύο τραπέζια κατά μήκος των μικρών βάσεων ΔΕ και ΖΗ, μπορεί να επιλέξει το εργαλείο «Ένωση Πολυγώνου» και στη συνέχεια τα σημεία Δ, Ε και Ζ, Η. Το σημείο Δ θα ταυτιστεί με το σημείο Ζ και το σημείο Ε θα ταυτιστεί με το σημείο Η, σχηματίζοντας το μη-κυρτό εξαγώνο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1(γ).



Σχήμα 1: Διαχωρισμός και ένωση πολυγώνου

Ο χρήστης μπορεί να μετρήσει το εμβαδόν του αρχικού κανονικού εξαγώνου και του τελικού πολυγώνου που σχηματίστηκε, για να διαπιστώσει ότι τα δύο αυτά σχήματα είναι ισοβαδικά. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το εργαλείο μετακίνησης αντικειμένων του λογισμικού (dragging), ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει το μέγεθος του αρχικού πολυγώνου και να παρατηρήσει ότι μεταβάλλονται ταυτόχρονα τα δύο ισοσκελή τραπέζια και το νέο πολύγωνο που έχει σχηματιστεί. Μεταβάλλεται, όμως, ταυτόχρονα και η μέτρηση του εμβαδού του αρχικού και τελικού πολυγώνου, δίνοντας τη δυνατότητα στο χρήστη να διαπιστώσει ότι τα πολύγωνα παραμένουν ισοβαδικά.

Αρχή διατήρησης εμβαδού

Η διατήρηση εμβαδού ορίζεται ως η διαδικασία κατά την οποία η αριθμητική τιμή μέτρησης του εμβαδού μιας επιφάνειας παραμένει αναλλοίωτη, όταν το σχήμα που ορίζει την επιφάνεια μετασχηματίζεται και παίρνει διαφορετική ποιοτική μορφή (Piaget et al., 1981). Δηλαδή, μια επιφάνεια που αποτελείται από επιμέρους τμήματα παραμένει αναλλοίωτη έστω και αν τα επιμέρους τμήματα αναδιοργανωθούν. Η κατανόηση της αρχής της αμεταβλητότητας της επιφάνειας ενός σχήματος καθώς αυτό μετασχηματίζεται συνεπάγεται ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια διαφορετική αντίληψη για την έννοια του εμβαδού, αποκτώντας ένα δυναμικό χαρακτήρα. Η ανάπτυξη από μέρος των μαθητών της αρχής αυτής θεωρείται ως πρωταρχική διαδικασία για την κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού.

Η Kordaki (2003) αναφέρει ότι τα εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε δραστηριότητες που αναφέρονται στην αρχή της διατήρησης διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Ερευνητές υποστηρίζουν τη χρήση χαρτιού και ψαλιδιού που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να κόψουν, να μετακινήσουν και να επανασυγκολλήσουν τα κομμάτια ενός σχήματος, για να κατασκευάσουν ένα καινούριο ισοδύναμο σχήμα (Rahim & Sawada, 1990). Η ενέργεια της αποκοπής, το κόψιμο με το ψαλίδι, υλοποιείται στο περιβάλλον του λογισμικού EuclidDraw με το εργαλείο «Διαχωρισμός Πολυγώνου». Η ενεργή βοήθεια του λογισμικού καθοδηγεί το χρήστη για τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει. Η ενέργεια της μετακίνησης υλοποιείται με το εργαλείο «μετακίνησης αντικειμένων» (dragging), το οποίο δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να επαναδιατάξει τα τμήματα του πολυγώνου που έχει διαχωριστεί. Τέλος, η ενέργεια της επανασυγκόλλησης υλοποιείται με το εργαλείο «Ένωση Πολυγώνων» το οποίο προσφέρει τη δυνατότητα στο χρήστη να ενώσει δύο πολύγωνα με όποιο τρόπο θέλει.

Το λογισμικό δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να προσεγγίσουν την αρχή της διατήρησης του εμβαδού με ένα διερευνητικό και δυναμικό τρόπο αφού έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών ισεμβαδικών σχημάτων που μπορούν να κατασκευάσουν στην οθόνη του υπολογιστή με πολύ μικρό κόπο. Δίνεται, επίσης, η ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν, για παράδειγμα, κλάσεις παραλληλογράμμων που μετασχηματίζονται στο ίδιο ορθογώνιο ή κλάσεις τριγώνων (ίδιο ύψος και βάση) που μπορούν να μετασχηματιστούν στο ίδιο και πάλι ορθογώνιο.

Ψηφιακός Διαδραστικός Πίνακας (Interactive Whiteboard)

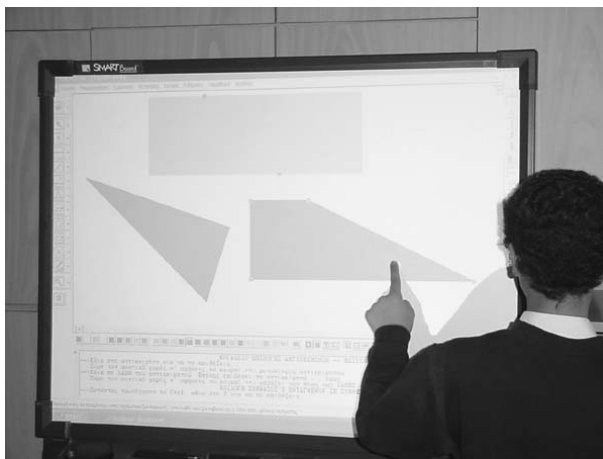
Οι ψηφιακοί διαδραστικοί πίνακες έχουν εισαχθεί τα τελευταία χρόνια στην εκπαιδευτική πράξη, ενώ έρευνες που έχουν διεξαχθεί κυρίως στο Ηνωμένο Βασίλειο (Miller & Glover, 2002) αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές έχουν επιδείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό στο νέο αυτό τεχνολογικό μέσο. Μαθητές και εκπαιδευτικοί που έχουν εργαστεί με τον ψηφιακό πίνακα έχουν δηλώσει ότι δεν μπορούν να φανταστούν τον εαυτό τους να επιστρέφουν στην παραδοσιακή διδασκαλία χωρίς τον ψηφιακό πίνακα (Miller & Glover, 2002). Οι ψηφιακοί πίνακες προάγουν την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διδακτική πράξη και δικαιολογημένα έχουν χαρακτηριστεί ως ένα από τα πιο επαναστατικά και δυναμικά σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία που έχουν εισαχθεί στην εκπαιδευτική πρακτική (Weiser, 2001). Ο ψηφιακός πίνακας συνδέεται με ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή και οι μαθητές αλληλεπιδρούν με τον πίνακα αντί με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Οι μαθητές μπορούν ακόμη να γράψουν πάνω στον πίνακα με τον ειδικό μαρκαδόρο και να μετατρέψουν τη γραφή τους σε ηλεκτρονικές εικόνες. Η επαφή των μαθητών με τον ψηφιακό πίνακα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ασκήσουν αισθησιοκινητικές ενέργειες στην οθόνη. Με τη χρήση του ψηφιακού πίνακα μειώνεται η ανάγκη εξοικείωσης των μαθητών με τους Η/Υ και το ποντίκι, καθώς οι μαθητές αλληλεπιδρούν με ένα οικείο μέσο, χρησιμοποιώντας τα δάκτυλα τους, για να δείξουν και να μετακινήσουν σχήματα και να ορίσουν τομές σε πολύγωνα. Η λειτουργία του ψηφιακού πίνακα βασίζεται σε ένα μοντέλο άμεσης μετάδοσης πληροφοριών και αναδιάρθρωσης του μοντέλου επικοινωνίας, όπως είχε προταθεί από τον Vygotsky (1978). Το τρίγωνο της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθητή, μέσου και εκπαιδευτικού αποκτά νέα δυναμική, καθώς η σύγχρονη και με πολλαπλές αναπαραστάσεις διαλεκτική που αναπτύσσεται επιτρέπει στους μαθητές να έχουν μια πιο ενεργή και εποικοδομητική συμμετοχή στη διδασκαλία και μάθηση.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΣΕΝΑΡΙΑ

Στόχος των δύο διδακτικών σεναρίων είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να ανακαλύψουν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού του παραλληλογράμμου και του τριγώνου με τη βοήθεια του λογισμικού EuclidDraw Jr. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν τα εργαλεία του λογισμικού και κυρίως τα εργαλεία διαχωρισμού και ένωσης πολυγώνου. Η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων

στηρίζεται στο ότι οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν υφιστάμενες γνώσεις, όπως ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού ορθογωνίου, για να ανακαλύψουν τον τρόπο υπολογισμού εμβαδού του παραλληλογράμμου και του τριγώνου. Η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων λαμβάνει υπόψη τις δυνατότητες για διερεύνηση και μελέτη ειδικών και γενικών περιπτώσεων κατά την επίλυση προβλήματος που προσφέρει το λογισμικό (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2003) και θεμελιώνονται εννοιολογικά στην αρχή της διατήρησης του εμβαδού (Kordaki & Potari, 2002).

Ομάδες μαθητών εκτελούν τις δραστηριότητες στον ψηφιακό πίνακα εκμεταλλευόμενοι όχι μόνο τις δυνατότητες του λογισμικού, αλλά και τη δυνατότητα για εξάσκηση αισθησιοκινητικών ενεργειών στην οθόνη του πίνακα. Η διαδικασία αυτή δίνει εντελώς νέα προοπτική στην αξιοποίηση και χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας και απελευθερώνει τη μάθηση από τους περιορισμούς της οπτικής αναπαράστασης που επιβάλλει η φύση των ηλεκτρονικών υπολογιστών.



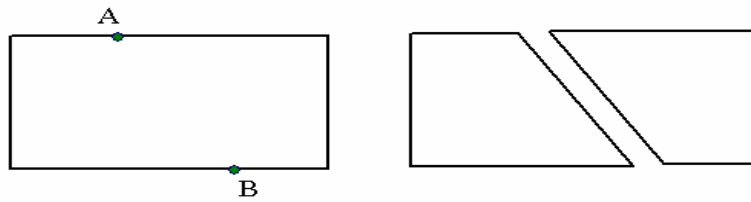
Εικόνα1: Μαθητής εργάζεται για την κατασκευή ορθογωνίου

Υπολογισμός Εμβαδού Παραλληλογράμμου

Δραστηριότητα 1: Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες και κατασκευάζουν στον πίνακα ένα ορθογώνιο χρησιμοποιώντας το εργαλείο «Κατασκευή ορθογωνίου οθόνης» (δείτε Εικόνα 1) και ακουμπώντας με τα δάκτυλα τους στην οθόνη ορίζουν το ορθογώνιο, ενώ στη συνέχεια μετρούν το εμβαδόν του χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο εργαλείο μέτρησης. Ακολούθως καλούνται να τοποθετήσουν δύο σημεία A, B σε δύο απέναντι πλευρές του ορθογωνίου και χρησιμοποιώντας το εργαλείο «Διαχωρισμός Πολυγώνου» να διαχωρίσουν το ορθογώνιο (δείτε Σχήμα 2). Η δραστηριότητα αυτή γίνεται πολύ εύκολα, αφού οι μαθητές χρησιμοποιούν τα δάκτυλά τους, αντί χάρακα και μολύβι για την κατασκευή του ορθογωνίου. Υπάρχει, επίσης, πλήρης αληθοφάνεια καθώς οι μαθητές «κόβουν» το σχήμα «από εδώ μέχρι εδώ» ($A \Rightarrow B$), όπως θα έκαναν με το ψαλίδι, αλλά με μεγαλύτερη ακρίβεια, ταχύτητα και αποτελεσματικότητα.

Αφού διαχωριστεί το ορθογώνιο οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν τα δύο τραπέζια που έχουν σχηματιστεί και να διερευνήσουν με ποιο τρόπο μπορούν να τα ενώσουν, για να σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμα. Αφού οι μαθητές μετακινήσουν τα δύο τραπέζια που έχουν σχηματιστεί μπορούν να ανακαλύψουν με ποιο τρόπο πρέπει να ενωθούν, για να σχηματιστεί ένα

παραλληλόγραμμο. Διαφορετικές ομάδες μαθητών μπορούν ενώσουν τα πολύγωνα με διαφορετικό τρόπο, ενώ με τη μετακίνηση και περιστροφή των αντικειμένων, οι μαθητές θα έχουν πλήρη αντίληψη των αντικειμένων με τις διαστάσεις τους. Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο εργαλείο μπορούν να ενώσουν τα δύο τραπέζια και να σχηματίσουν ένα παραλληλόγραμμο, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3. Οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν μεταξύ τους τον τρόπο με τον οποίο διαχώρισαν το ορθογώνιο και τον τρόπο με τον οποίο ένωσαν τα τραπέζια που σχηματίστηκαν, για να σχηματίσουν το παραλληλόγραμμο. Αφού σχηματιστεί το παραλληλόγραμμο, οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχημάτισαν και να το συγκρίνουν με το εμβαδόν του αρχικού τους ορθογώνιου, επιλέγοντας τα σχήματα και ζητώντας το εμβαδόν. Αφού οι μαθητές διαπιστώσουν ότι τα δύο σχήματα είναι ισεμβαδικά, μπορούν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι για να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου μπορούν να το μετασχηματίσουν σε ένα ισεμβαδικό ορθογώνιο, του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν. Για να επαληθεύσουν το συμπέρασμά τους, οι μαθητές μπορούν να τροποποιήσουν το αρχικό τους ορθογώνιο σύροντας με τα δάκτυλά τους μια από τις κορυφές του και να παρατηρήσουν ότι μεταβάλλεται ανάλογα και το παραλληλόγραμμο, το οποίο παραμένει ισεμβαδικό με το ορθογώνιο.



Σχήμα 2: Διαχωρισμός ορθογώνιου



Σχήμα 3: Ένωση πολυγώνων

Δραστηριότητα 2: Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα προσπαθήσουν να μετασχηματίσουν ένα παραλληλόγραμμο σε ένα ισεμβαδικό ορθογώνιο. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο εργαλείο του λογισμικού και να σκεφτούν τρόπους με τους οποίους μπορούν να διαχωρίσουν το παραλληλόγραμμο, για να το μετασχηματίσουν σε ένα ορθογώνιο. Οι μαθητές εργάζονται και δοκιμάζουν διαφορετικούς τρόπους. Ένας από τους στόχους της δραστηριότητας είναι να ανακαλύψουν ότι το παραλληλόγραμμο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο με πολλούς τρόπους. Αναμένεται οι περισσότεροι μαθητές να εφαρμόσουν τον τρόπο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4, να διαχωρίσουν δηλαδή το παραλληλόγραμμο σε ένα ορθογώνιο τραπέζιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Για να μπορέσουν να το επιτύχουν αυτό θα πρέπει να φέρουν ένα ύψος του παραλληλογράμμου από την κατάλληλη κορυφή. Η ολιστική εικόνα που προσφέρει ο πίνακας με το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν, για να καταλήξουν σε κάποιο ικανοποιητικό διαχωρισμό. Στη συνέχεια, οι μαθητές μπορούν με ευκολία να μετακινήσουν το τραπέζιο και το τρίγωνο και να αντιληφθούν με ποιο τρόπο θα πρέπει να γίνει η ένωσή τους.



Σχήμα 4: Μετασχηματισμός παραλληλογράμμου σε ορθογώνιο

Οι μαθητές ανακαλύπτουν και άλλους τρόπους διαχωρισμού του παραλληλογράμμου. Ο παραδοσιακός τρόπος ανακάλυψης του τρόπου υπολογισμού του παραλληλογράμμου, που εφαρμόζεται στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια και εκτελείται με χαρτί και ψαλίδι (όπως φαίνεται στο Σχήμα 4), ενέχει τον κίνδυνο οι μαθητές να αντιληφθούν ότι είναι ο μοναδικός. Αντίθετα, με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν ότι το παραλληλόγραμμο μπορεί να διαχωριστεί κατά μήκος οποιουδήποτε ύψους του. Σημαντικό στοιχείο της όλης διαδικασίας είναι οι μαθητές να αντιληφθούν ότι για να κατασκευαστεί ορθογώνιο θα πρέπει κατά το διαχωρισμό του παραλληλογράμμου να δημιουργηθούν ορθές γωνίες και συνεπώς μια καλή στρατηγική είναι να διαχωρίσουν το παραλληλόγραμμο κατά μήκος ενός ύψους του.

Όταν οι μαθητές μετασχηματίσουν το παραλληλόγραμμο σε ένα ισεμβιακό ορθογώνιο του οποίου γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού θα πρέπει να αντιστοιχίσουν τις δύο διαστάσεις του ορθογώνιου με τα στοιχεία του παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα, έχοντας ως δεδομένο ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο «μήκος x πλάτος», οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλύψουν πώς «μετασχηματίζεται» ο τύπος αυτός στην περίπτωση του παραλληλογράμμου. Παρατηρώντας την πορεία μετασχηματισμού του παραλληλογράμμου σε ορθογώνιο και χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού, για να πραγματοποιήσουν τις μετρήσεις που χρειάζονται, οι μαθητές εύκολα μπορούν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι το «μήκος» του ορθογωνίου που σχηματίστηκε προήλθε από τη βάση του παραλληλογράμμου, ενώ το «πλάτος» του προήλθε από το ύψος που έφεραν στο παραλληλόγραμμο. Ο μετασχηματισμός και η αντιστοίχιση των δύο σχημάτων είναι διαρκής, καθώς οι μαθητές μεταφέρουν τα σχήματα με τα δάκτυλά τους, τοποθετώντας το ένα πάνω στο άλλο, χρωματίζουν το εμβαδόν, κάνουν υποθέσεις τις οποίες επαληθεύουν ή τροποποιούν. Στη συνέχεια, οι μαθητές μπορούν χρησιμοποιώντας το εργαλείο «μετακίνησης» αντικειμένων του λογισμικού να μεταβάλλουν τις διαστάσεις του αρχικού παραλληλογράμμου, για να επιβεβαιώσουν την ορθότητά του συμπεράσματός τους. Με τη διαδικασία αυτή οι μαθητές αποκτούν μια δυναμική διάσταση για την αρχή της διατήρησης του εμβαδού και τη σχέση μεταξύ των δύο ισεμβιακών σχημάτων που κατασκεύασαν. Η δυναμική αυτή διάσταση έγκειται και στο γεγονός ότι στην πραγματικότητα οι μαθητές μελετούν κλάσεις παραλληλογράμμων (ίδιο μέγεθος βάσης και ύψος) τα οποία μπορούν να μετασχηματιστούν στο ίδιο ακριβώς ορθογώνιο ή και αντίστροφα.

Υπολογισμός Εμβαδού Τριγώνου

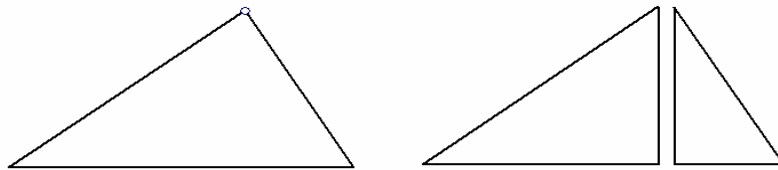
Δραστηριότητα 1: Οι μαθητές κατασκευάζουν στον ψηφιακό πίνακα με τη βοήθεια του λογισμικού ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Στη συνέχεια οι μαθητές, χρησιμοποιώντας το εργαλείο δημιουργίας σταθερού αντίγραφου, κατασκευάζουν ένα σταθερό αντίγραφο του αρχικού ορθογωνίου τριγώνου. Η ύπαρξη σταθερού αντίγραφου συνεπάγεται ότι το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει κατασκευαστεί θα μεταβάλλεται πάντα ανάλογα με τις αλλαγές που γίνονται στο αρχικό τρίγωνο (δείτε Σχήμα 5α). Στη συνέχεια, οι μαθητές μπορούν να μετακινήσουν τα δύο τρίγωνα και να προσπαθήσουν να ανακαλύψουν με ποιο τρόπο μπορούν να ενωθούν τα δύο τρίγωνα για να κατασκευαστεί ένα σχήμα του οποίου μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5(β), οι μαθητές μπορούν εύκολα να ενώσουν τα δύο ορθογώνια τρίγωνα για να

κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το εργαλείο υπολογισμού εμβαδού μπορούν να ανακαλύψουν ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου. Μελετώντας τη διαδικασία κατασκευής του ορθογωνίου οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου μπορεί να υπολογιστεί, όταν πολλαπλασιάσουμε τις δύο κάθετες πλευρές του (που αντιστοιχούν στο μήκος και πλάτος του ορθογωνίου) και διαιρέσουμε το γινόμενο διά δύο.

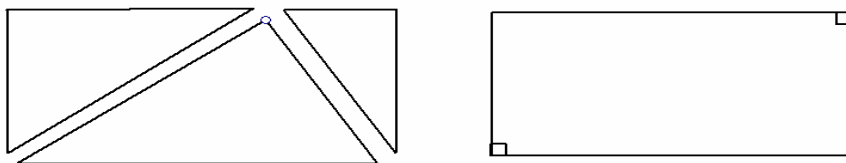


Σχήμα 5: Μετασχηματισμός ορθογωνίου τριγώνου σε ορθογώνιο

Δραστηριότητα 2: Οι μαθητές εξετάζουν αν ισχύει το συμπέρασμά τους σε οποιοδήποτε τρίγωνο. Για αυτό, στη δραστηριότητα αυτή, οι μαθητές θα ασχοληθούν με τυχαίο τρίγωνο. Οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν οποιοδήποτε τρίγωνο στο ψηφιακό πίνακα και η όλη δραστηριότητα αποκτά παιγνιώδη χαρακτήρα καθώς οι μαθητές πειραματίζονται με τυχαία τρίγωνα (π.χ. αμβλυγώνια). Οι μαθητές κατασκευάζουν στον πίνακα ένα τυχαίο τρίγωνο και στη συνέχεια καλούνται να δημιουργήσουν ένα σταθερό αντίγραφο του τριγώνου τους και να φέρουν σε ένα από τα δύο τρίγωνα ένα από τα ύψη του. Οι μαθητές θα πρέπει να διαχωρίσουν το ένα τρίγωνο κατά μήκος ενός από τα ύψη του. Η ανάγκη για διαχωρισμό ενός από τα δύο τρίγωνα κατά μήκος ενός από τα ύψη του (δείτε Σχήμα 6) μπορεί να προκύψει μέσα από συζήτηση με τους μαθητές οι οποίοι μπορούν να εφαρμόσουν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν στον υπολογισμό του εμβαδού παραλληλογράμμου, δηλαδή, να διαχωρίσουν το ένα τρίγωνο κατά μήκος ενός από τα ύψη του για να σχηματιστούν ορθές γωνίες. Στη συνέχεια οι μαθητές μπορούν να μετακινήσουν τα τρία σχήματα που υπάρχουν στην οθόνη (δύο ορθογώνια τρίγωνα και το αρχικό τρίγωνο) και να προσπαθήσουν να ανακαλύψουν με ποιο τρόπο μπορούν να ενωθούν, για να σχηματίσουν ένα σχήμα του οποίου μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδόν (πιθανότατα ένα ορθογώνιο), όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.

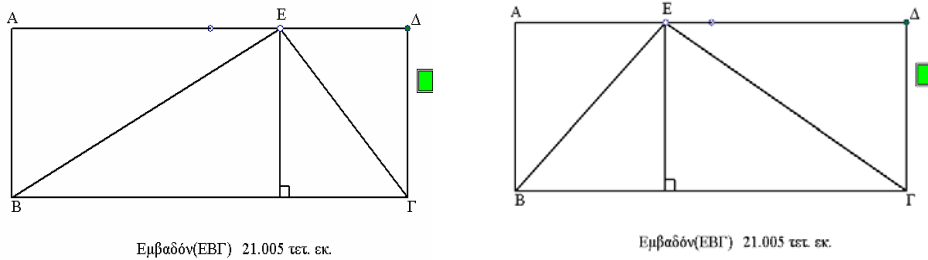


Σχήμα 6: Διαχωρισμός ενός τριγώνου κατά μήκος ενός από τα ύψη του



Σχήμα 7: Ένωση τριών τριγώνων για σχηματισμό ενός ορθογωνίου

Μετά το σχηματισμό του ορθογωνίου οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το εργαλείο μέτρησης εμβαδού, για να διαπιστώσουν ότι το αρχικό τους τυχαίο τρίγωνο είναι ισεμβαδικό με το μισό του ορθογωνίου που κατασκεύασαν. Μελετώντας την πορεία εργασίας τους και συγκρίνοντας με την περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου οι μαθητές θα κάνουν τις απαραίτητες αντιστοιχίσεις, για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι μια πλευρά του αρχικού τριγώνου έγινε μήκος του ορθογωνίου, ενώ το ύψος που αντιστοιχούσε στη βάση αυτή έγινε πλάτος του ορθογωνίου. Επομένως, και στο τυχαίο τρίγωνο το εμβαδόν του είναι το μισό του γινομένου μιας βάσης του επί το ύψος σε αυτή. Μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να διαχωρίσουν το τυχαίο τρίγωνο κατά μήκος άλλου ύψους του τριγώνου, για να διερευνήσουν κατά πόσο το συμπέρασμά τους ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι πλευράς και αντίστοιχου ύψους του τριγώνου. Οι μαθητές τροποποιώντας τις διαστάσεις του τυχαίου τριγώνου μπορούν και πάλι να εξετάσουν την ορθότητά του συμπεράσματός τους παρατηρώντας πλήθος περιπτώσεων.



Σχήμα 8: Τρίγωνο με κινούμενη κορυφή

Εναλλακτική δραστηριότητα: Οι μαθητές κατασκευάζουν στον ψηφιακό πίνακα ένα ορθογώνιο και στη συνέχεια ένα τυχαίο τρίγωνο του οποίου η μια πλευρά ταυτίζεται με μια από τις πλευρές του ορθογωνίου ενώ η τρίτη του κορυφή βρίσκεται στην απέναντι πλευρά του ορθογωνίου. Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 8, η τρίτη κορυφή του τριγώνου E, κινείται κατά μήκος της πλευράς AD του τριγώνου. Η κίνηση αυτή μπορεί να γίνει χειρωνακτικά από τους μαθητές πάνω στον πίνακα χρησιμοποιώντας το δάκτυλό τους και μετακινώντας το σημείο E από το A στο Δ και αντίστροφα. Η κίνηση αυτή μπορεί να γίνει, επίσης, με τη βοήθεια του κινητήρα που προσφέρει το λογισμικό. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σημείου E κατά μήκος της πλευράς AD, οι μαθητές παρατηρούν άμεσα ότι το εμβαδόν του τριγώνου BEC παραμένει σταθερό και ότι είναι πάντα ίσο με το μισό εμβαδόν του ορθογωνίου. Η δραστηριότητα αυτή δείχνει τη δυναμική διάσταση της αρχής της διατήρησης του εμβαδού και δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ανακαλύψουν μια κλάση τριγώνων που έχουν σταθερό εμβαδόν.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σε ένα πρακτικό επίπεδο, η παρούσα εργασία έδειξε ότι η μάθηση στη γεωμετρία με τη βοήθεια του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και του ψηφιακού πίνακα μπορεί να οικοδομήσει ένα πλούσιο και δυναμικό περιβάλλον μάθησης που θα έχει σημαντικά οφέλη τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς, γιατί δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν οι ίδιοι τη μαθηματική γνώση μέσα από διερεύνηση και πειραματισμό. Οι εκπαιδευτικοί, οι οποίοι έχουν συνήθως στη διάθεσή τους περιορισμένο χρόνο, μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα διδακτικά σενάρια που παρουσιάστηκαν, για να αναγνωρίσουν χρήσιμες ιδέες για τη διδασκαλία του εμβαδού πολυγώνων και την αποτελεσματική ενσωμάτωση των λογισμικών δυναμικής

γεωμετρίας στη διδασκαλία των μαθηματικών λαμβάνοντας υπόψη τις δυνατότητες του ψηφιακού πίνακα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Botana, F., & Valcarce, J. (2002). A dynamic-symbolic interface for geometric theorem Discovery. *Computers and Education*, 38, 21-35.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des Mathematiques 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. (2003). Problem Solving and Posing in a Dynamic Geometry Environment. In T. Triandafillidis & K.Hatzikiriakou (Eds.) *Proceedings of the 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 125-132). Volos, Greece: University of Thessaly.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norway.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic Geometry software and their evolving Mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55–85.
- Kordaki, M. & Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: the role of a computer microworld. *International Journal of Computers forMathematical Learning* 7(1), 1–36.
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 177-209.
- Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In C. Mammama & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, 113-121. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Maher, C. A., & Beattys, C. B. (1986). Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old students. In E. Lansing, G. Lappan and R. Even (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference, Psychology of Mathematics Education*, N.A., pp. 163–168.
- Miller, D., & Glover, D. (2002). The Interactive Whiteboard as a force for pedagogic change: The experience of five elementary schools in as English education authority. *Information Technology in Childhood Education Annual*, 5-19.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Papert, S. (1996). An exploration in the space of mathematics educations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1, 95-123.
- Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*. Norton and Company, N.Y.
- Rahim, M. H., & Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(2), 303–308.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Weiser, C. (2001). Electronic Whiteboards: A comparison. *Media And Methods*, 6, 78-91.

