ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

Ξένια Βαμβακούση
Πέτρος Βερύκιος
Κώστας Γαβρίλης
Γιάννης Θωμαΐδης
Στέφανος Κεΐσογλου
Νίκος Κλαουδάτος
Παναγιώτης Κυλάφης
Αραξή Ναζαριάν
Χαράλαμπος Σακονίδης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΩΣΗ
για τη Διδακτική των Μαθηματικών

# Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

Ξένια Βαμβακούση, Πέτρος Βερύκιος
Κώστας Γαβρίλης, Γιάννης Θωμαΐδης
Στέφανος Κεΐσογλου, Νίκος Κλαουδάτος
Παναγιώτης Κυλάφης, Αραξή Ναζαριάν
Χαράλαμπος Σακονίδης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# Σχολική Άλγεβρα: επιστημολογικές, γνωστικές και διδακτικές αναζητήσεις

**Χαράλαμπος Σακονίδης**

## Εισαγωγή

Η σχολική άλγεβρα έχει παραδοσιακά προσεγγιστεί ως ένα σύνολο διαδικασιών, συχνά ασύνδετων με την υπόλοιπη μαθηματική γνώση, αλλά και με τις ζωές των μαθητών. Έτσι, οι ευκαιρίες σχετικών εμπειριών στη σχολική τάξη περιορίζονται σε ασκήσεις που απαιτούν την απομνημόνευση διαδικασιών και την επίλυση τεχνητών προβλημάτων και δεν επενδύουν στην εννοιολογική κατανόηση και στο συλλογισμό, αλλά στην παραγωγή της σωστής σειράς συμβόλων, χωρίς την ανάγκη αναστοχασμού. Οι εμπειρίες αυτές, όπως είναι αυτονόητο, απομακρύνουν την πλειοψηφία των μαθητών από τα μαθηματικά, πριν ακόμη δοκιμάσουν την ικανότητά τους να δομήσουν και να ιδιοποιηθούν τη μαθηματική γνώση και, το πιο σημαντικό, τους εμποδίζουν να κατανοήσουν τη σημασία και τη χρησιμότητά της στη ζωή τους.

Έτσι, παρά το σημαντικό ρόλο της άλγεβρας στην εισαγωγή των μαθητών στα ανώτερα μαθηματικά, οι σχετικές εμπειρίες τους, κυρίως στον 'τυφλό' χειρισμό συμβόλων, είναι δυσάρεστες και αποξενώνουν από το αντικείμενο ακόμη και αυτούς που τελικά επιτυγχάνουν. Ωστόσο, ο αλγεβρικός συλλογισμός και η χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων (όπως, για παράδειγμα, οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες τιμών, τα λογιστικά φύλλα και οι αλγεβρικοί τύποι) ανήκουν στα πλέον ισχυρά νοητικά εργαλεία που ανέπτυξε ο πολιτισμός μας. Χωρίς κάποια μορφή συμβολικής άλγεβρας, ο τεχνολογικός μας πολιτισμός θα ήταν αδύνατος. Αποτελεί, λοιπόν, πρόκληση να καταστεί η ισχύς της άλγεβρας προσβάσιμη σε όλους τους μαθητές.

Στις ενότητες που ακολουθούν επιχειρείται, αρχικά, η οριοθέτηση των επιστημολογικών και γνωστικών χαρακτηριστικών της σχολικής άλγεβρας. Στη συνέχεια, συζητιούνται ορισμένα κρίσιμα ζητήματα σχετικά με τον τρόπο που προσεγγίζεται η αλγεβρική σκέψη στο σχολείο, όπως η κατάλληλη στιγμή εισαγωγής της, τόσο αναφορικά με τις προαπαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις όσο και με την ηλικία τους. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα για τη μάθηση και τη διδασκαλία της άλγεβρας κυρίως στην υποχρεωτική εκπαίδευσης και διατυπώνονται κάποια πρώτα βασικά συμπεράσματα αναφορικά με τις συνιστώσες του θέματος.

## 1. Σχολική άλγεβρα: επιστημολογικά και γνωστικά χαρακτηριστικά

Η άλγεβρα, ένα από τα σημαντικότερα πεδία γνώσης των μαθηματικών, εστιάζεται στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, τις οποίες αναπαριστά, χρησιμοποιώντας συμβολική γλώσσα, που διευκολύνει την αλγεβρική σκέψη αλλά δεν την εξασφαλίζει ούτε την εγγυάται (Malisani & Spagnolo, 2009).

Η γενίκευση και η αφαίρεση αποτελούν τα δυο πυρηνικά συστατικά της άλγεβρας (Kaput, 1999). Η γενίκευση αναφέρεται στη σκόπιμη επέκταση του εύρους του συλλογισμού και της επικοινωνίας πέρα από την περίπτωση ή τις περιπτώσεις που βρίσκονται υπό εξέταση, αναγνωρίζοντας και εκθέτοντας με ρητό τρόπο κοινά στοιχεία μεταξύ των περιπτώσεων ή ανυψώνοντας το συλλογισμό ή την επικοινωνία σε τέτοιο επίπεδο, ώστε η εστίαση να μη βρίσκεται πλέον στις περιπτώσεις ή στις περιστάσεις αυτές καθαυτές, αλλά κυρίως στα μοτίβα, τις διαδικασίες και τις υφιστάμενες δομές και σχέσεις (που με τη σειρά τους συνιστούν νέα, υψηλότερου επιπέδου αντικείμενα συλλογισμού ή επικοινωνίας). Όμως, η έκφραση μιας γενίκευσης απαιτεί την απόδοσή της σε κάποια γλώσσα, τυπική ή άλλη (π.χ., χειρονομίες). Η αφαίρεση από την άλλη, αφορά στην επικέντρωση της σκέψης κάθε φορά σε μια συγκεκριμένη ιδιότητα σε βάρος άλλων και συνδέεται άμεσα με τη γενίκευση. Τα δυο αυτά συστατικά της άλγεβρας εκφράζονται συμβολικά, καθιστώντας την ευχέρεια στη συμβολική διαχείριση αναπόσπαστο κομμάτι της αλγεβρικής ικανότητας.

Βασικές πηγές της αφαίρεσης και της γενίκευσης αποτελούν ο συλλογισμός και η επικοινωνία σε μαθηματικές αλλά και σε μη μαθηματικές περιστάσεις που, όμως, υπόκεινται σε μαθηματικοποίηση. Η διάκριση μεταξύ των δύο αυτών πηγών είναι ιδιαίτερα προβληματική στα πρώτα χρόνια του σχολείου, όπου η μαθηματική δραστηριότητα λαμβάνει συγκεκριμένες φόρμες και είναι συχνά άρρηκτα συνδεδεμένη με τις περιστάσεις μέσα στις οποίες αναπτύσσεται.

Η αλγεβρική σκέψη, πέρα από πράξεις σκόπιμης γενίκευσης και συμβολικής έκφρασής της, εμπεριέχει πάνω απ' όλα συλλογισμό, ο οποίος στηρίζεται στις μορφές δομημένων συντακτικά γενικεύσεων, συμπεριλαμβανομένων ενεργειών που καθοδηγούνται από συντακτική και σημασιολογική άποψη. Ο Kaput (1998) υποδεικνύει πέντε αλληλένδετες μορφές αλγεβρικού συλλογισμού:

- γενίκευση και αφαίρεση μοτίβων και κανονικοτήτων,
- διαχείριση συμβόλων που καθοδηγείται συντακτικά,
- μελέτη δομής και συστημάτων που αποτελούν αφαιρέσεις υπολογισμών και σχέσεων,
- μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και συν- μεταβολών,
- μοντελοποίηση.

Ο Radford (2011) υποστηρίζει ότι η αλγεβρική σκέψη συνδέεται με το συλλογισμό με συγκεκριμένους τρόπους. Διακρίνει την αριθμητική από την αλγεβρική σκέψη από επιστημολογική άποψη, με βάση το γεγονός ότι στην τελευταία, απροσδιόριστες ποσότητες αντιμετωπίζονται με αναλυτικό τρόπο. Επιπλέον, ισχυρίζεται ότι, από σημειωτική άποψη, υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι σκέψης και έκφρασης της απροσδιοριστίας, με σύμβολα που δεν περιορίζονται σε αριθμούς και γράμματα. Ο ισχυρισμός αυτός είναι συμβατός με την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας και, επιπλέον, επιτρέπει τη διερεύνηση μη συμβολικών μορφών αλγεβρικής σκέψης, δραστηριότητα που αναγνωρίζει, σέβεται και δίνει τη δυνατότητα αξιοποίησης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών.

Υιοθετώντας το παραπάνω πλαίσιο, ο Radford (2011) μελέτησε την προσπάθεια μαθητών ηλικίας 7-8 ετών να γενικεύσουν γεωμετρικά μοτίβα. Η ανάλυση της μαθηματικής τους δραστηριότητας έδειξε ότι η πλέον στοιχειώδης μορφή αλγεβρικής σκέψης που προκύπτει είναι αυτή στην οποία η απροσδιοριστία παραμένει εγκλωβισμένη σε συγκεκριμένα σχήματα. Η απροσδιοριστία εμφανίζεται εδώ σε μια διαισθητική μορφή: εκφράζεται μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων της μεταβλητής, με τη μορφή ενός συγκεκριμένου κανόνα ή τύπου (π.χ., «2 και 2 και 1»). Απροσδιοριστία και αναλυτικότητα παραμένουν προσκολλημένες στο επίπεδο των συγκεκριμένων σχημάτων και αριθμητικών γεγονότων. Αυτή η μορφή αλγεβρικής σκέψης αποκαλείται «πραγματική» και φαίνεται να είναι προσβάσιμη από νεαρούς μαθητές. Ωστόσο, η ανάλυση της μαθηματικής δράσης των μαθητών έδειξε, επιπλέον, ότι είναι σε θέση να εμπλακούν και σε ανώτερες μορφές αλγεβρικής σκέψης, όπου η απροσδιοριστία και η αναλυτικότητα αντιμετωπίζονται με πιο ρητό/ κατηγορηματικό τρόπο. Η αλγεβρική σκέψη που αναπτύσσεται σε αυτήν την περίπτωση αποκαλείται «συν-κειμενική», για να δηλωθεί το γεγονός ότι το νόημα που αποδίδεται σε αλγεβρικούς τύπους είναι στενά συνδεδεμένο με χωρικά ή άλλα χαρακτηριστικά των περιστάσεων που αφορά η γενίκευση.

Ο Radford (2011) καταλήγει με τον ισχυρισμό ότι η αλγεβρική σκέψη δεν είναι κάτι «φυσικό», κάτι που προκύπτει με την ωρίμανση. Η αλγεβρική σκέψη είναι ένας πολύ επεξεργασμένος πολιτισμικός τύπος αναστοχασμού και δράσης, ένας τρόπος σκέψης που έχει εκλεπτυνθεί ξανά και ξανά στο πέρασμα του χρόνου, προτού καταλήξει στην παρούσα μορφή. Αυτός είναι ο λόγος που η απόκτησή του παρουσιάζει τόσες δυσκολίες. Η ανάλυση της δραστηριότητας των μαθητών στην τάξη σκιαγραφεί το παιδαγωγικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναδεικνύεται η αλγεβρική σκέψη, καθιστώντας σαφές ότι το είδος της προσδιορίζεται από την αναπτυσσόμενη κατανόηση των μαθητών, τις ερωτήσεις που θέτουν, την αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές τους, τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού και την ιστορική ευφυΐα που είναι ενσωματωμένη στη γλώσσα και στα εργαλεία που είναι διαθέσιμα στους μαθητές.

## 2. Η προσέγγιση της άλγεβρας στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης

Η άλγεβρα αντιμετωπίζεται στο σχολείο ακόμη και σήμερα ως γενίκευση της αριθμητικής, με αποτέλεσμα να διδάσκεται μετά από αυτήν. Ο λόγος θα πρέπει να αναζητηθεί, ανάμεσα σε άλλα, στην κυριαρχία της κονστρουκτιβιστικής θεώρησης της μάθησης, όπως αυτή ερμηνεύτηκε και υιοθετήθηκε στο επίπεδο της πράξης, σύμφωνα με την οποία η αλγεβρική σκέψη προϋποθέτει αναπτυγμένη ικανότητα φορμαλιστικής σκέψης, ενώ η αριθμητική όχι, επομένως, η διδασκαλία της άλγεβρας ενδείκνυται να ακολουθεί αυτήν της αριθμητικής. Ωστόσο, η θεώρηση της άλγεβρας ως «γενικευμένης αριθμητικής» είναι πολύ περιοριστική, καθώς τείνει να αγνοεί το γεγονός ότι ο αλγεβρικός συμβολισμός δεν συνιστά το μόνο εργαλείο διεκπεραίωσης διαδικασιών γενίκευσης. Η άλγεβρα δεν χρησιμοποιεί μόνο γράμματα και αριθμούς αλλά και άλλα σύμβολα, προκειμένου να ενεργοποιήσει τη σκέψη με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Η αλγεβρική σκέψη ξεκινά πριν από το συμβολισμό (Malisani & Spagnolo, 2009). Ο προβληματισμός αυτός αναδεικνύει δύο σημαντικά ζητήματα: ποιές είναι οι προαπαιτούμενες γνώσεις και ποια η κατάλληλη ηλικία των μαθητών για την εισαγωγή τους στην άλγεβρα; Το πρώτο από αυτά συνδέεται με τη σχέση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας και το δεύτερο με την πρώιμη έναρξη της αλγεβρικής εκπαίδευσης των μαθητών, θέματα που συζητιούνται στη συνέχεια.

## 2.1. Από την αριθμητική στην άλγεβρα

Αν θεωρήσει κανείς την αριθμητική και την άλγεβρα ως δυο διακριτά θεματικά πεδία των μαθηματικών, δεν θα πρέπει να εκπλαγεί από την ένταση που παρατηρείται στη διδασκαλία και μάθηση στα μεταξύ τους σύνορα. Η ένταση αυτή έλκυσε από νωρίς το ερευνητικό και εκπαιδευτικό ενδιαφέρον για την αποκαλούμενη «μετάβαση» από την αριθμητική στην άλγεβρα, μια φάση που τοποθετείται στο σημείο που υποθετικά «τελειώνει» η αριθμητική και «αρχίζει» η άλγεβρα και χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση αριθμών και μαθηματικών διαδικασιών.

Οι παρεμβατικές προσπάθειες που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο αυτού του ενδιαφέροντος επιχείρησαν να μειώσουν αυτήν την ένταση αλλά συχνά με τρόπο που αποδυνάμωνε τη θέση της άλγεβρας στη στοιχειώδη εκπαίδευση, καθώς ενθάρρυναν την αναβολή της μύησης στη μαθηματική γενίκευση μέχρι την έναρξη της διδασκαλίας της άλγεβρας (συνήθως στην ηλικία των 12-13 χρόνων). Ωστόσο, η έρευνα δείχνει πως πολλές από τις σχετικές δυσκολίες των μαθητών προέρχονται από χαμένες ευκαιρίες στις αρχικές σχολικές, μαθηματικές εμπειρίες τους, που, στη συνέχεια, χρειάζεται να ανασκευαστούν (π.χ. ότι το σύμβολο της ισότητας σημαίνει «κάνει», Kieran (1981)).

Η Warren (2003) υποστηρίζει πως η επιτυχία της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα εξαρτάται από τη γνώση της μαθηματικής δομής και την ανάπτυξη μιας αίσθησης των πράξεων από τους μαθητές. Η γνώση της μαθηματικής δομής αναφέρεται στη γνώση των μαθηματικών αντικειμένων, της μεταξύ τους σχέσης, καθώς και των ιδιοτήτων αυτών των σχέσεων. Συγκεκριμένα, αφορά

**i)** τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (ισοδύναμες, μεγαλύτερη, μικρότερη),
**ii)** τις ιδιότητες πράξεων (αντιμεταθετική, μεταβατική, προσεταιριστική, την ύπαρξη αντιστρόφου και ουδέτερου στοιχείου),
**iii)** τις ιδιότητες μεταξύ πράξεων (επιμεριστικότητα) και
**iv)** τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (μεταβατικότητα ισότητας και ανισότητας).

Στην παραδοσιακή προσέγγιση της άλγεβρας γίνεται σιωπηρώς η υπόθεση ότι οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με αυτές τις έννοιες από την αριθμητική τους εμπειρία. Δηλαδή, ότι φθάνουν σε μια κατανόηση της αριθμητικής δομής μέσω επαγωγικής γενίκευσης.

Σε ότι αφορά στην αίσθηση των πράξεων που αναπτύσσουν οι μαθητές, την οποία ο Slavitt (1999) ορίζει ως το σύνολο των αντιλήψεων που σχετίζονται με τη βαθύτερη δομή της πράξης, τη χρήση και τις σχέσεις της με άλλες μαθηματικές πράξεις, δομές και εν δυνάμει γενικεύσεις, η βιβλιογραφία υποδεικνύει τρεις κατηγορίες στοιχείων που την απαρτίζουν και αποκαλύπτουν τις απαρχές της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών: ιδιότητες (π.χ. γνώση αριθμητικών γεγονότων, ιδιότητες πράξεων), εφαρμογές (π.χ. αξιοποίηση πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια) και συσχετισμούς (π.χ. σχέση μεταξύ πράξεων και μεταξύ αναπαραστάσεων μιας πράξης σε διαφορετικά σύνολα αριθμών).

Με βάση την παραπάνω οπτική, η προετοιμασία για την άλγεβρα απαιτεί περισσότερα από την απλή αφαίρεση των αριθμητικών ιδιοτήτων. Προϋποθέτει την κατανόηση της γενίκευσης των πράξεων, για παράδειγμα την ικανότητα αναγνώρισης καταστάσεων διαίρεσης και χρήσης της πράξης για παραγωγή λύσεων. Οι μαθητές επιβάλλεται να διαπιστώνουν την ουσία των πράξεων και να την αναπαριστούν σε ένα συμβολικό σύστημα.

Οι σύγχρονες θεωρήσεις, λοιπόν, αναγνωρίζουν ότι η αριθμητική έχει εγγενώς αλγεβρικό χαρακτήρα, με την έννοια ότι αφορά σε γενικές περιπτώσεις και δομές, που μπορεί να εκφραστούν περιεκτικά με αλγεβρικό συμβολισμό. Δηλαδή, ότι το αλγεβρικό νόημα των αριθμητικών πράξεων είναι δεδομένο και, κατά συνέπεια, θα έπρεπε να θεωρείται αναπόσπαστο κομμάτι των στοιχειωδών μαθηματικών (Carraher et al, 2006). Μερικοί ερευνητές, προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα, υποστηρίζουν ότι η μάθηση της άλγεβρας δεν έχει ως προ-απαιτούμενο τη μάθηση της αριθμητικής και, κατά συνέπεια, οι νεαροί μαθητές μπορεί να εισαχθούν στην άλγεβρα από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου (π.χ. Radford, 2011).

## 2.2. Πρώιμη άλγεβρα και μάθηση

Ο όρος «πρώιμη άλγεβρα» αναφέρεται στην ενθάρρυνση της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης και την υποστήριξή της και όχι στη μάθηση συγκεκριμένων αλγεβρικών περιεχομένων. Ουσιαστικά, αναφέρεται σε μεγαλύτερη εστίαση στις σχέσεις μεταξύ των αριθμών παρά στους αριθμούς αυτούς καθαυτούς.

Αρκετοί ερευνητές, ακόμη από τη δεκαετία του 1980, πρότειναν την εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να διαχειριστούν αργότερα με πιο αποτελεσματικό τρόπο τα επιστημολογικά ζητήματα που εμπλέκονται στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Ο Kaput (1995) ιδιαίτερα, πρότεινε την ένταξη της άλγεβρας σε όλες τις τάξεις ως το κλειδί για την αύξηση συνάφειας, βάθους και ισχύος στα σχολικά μαθηματικά, υποστηρίζοντας πως ένα αλγεβροποιημένο αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών για την υποχρεωτική εκπαίδευση θα βοηθούσε στον εκδημοκρατισμό της πρόσβασης σε ισχυρές ιδέες. Αυτή η αλγεβροποίηση θα μπορούσε να προχωρήσει με δυο τρόπους, όχι απαραίτητα αντικρουόμενους.

Ο πρώτος υποστηρίζει την οικοδόμηση σε ό,τι είναι ήδη αλγεβρικό στη σκέψη των μικρών παιδιών, ειδικά αναφορικά με τον αριθμητικό συλλογισμό. Ο δεύτερος πρεσβεύει ότι οι αλλαγές στη σκέψη των μαθητών προωθούνται καλύτερα, αν τους προσφερθούν εργαλεία, όπως σύμβολα και διαγράμματα, που τους επιτρέπουν να λειτουργούν σε υψηλότερα επίπεδα γενίκευσης (Confrey, 1991).

Αρκετές εργασίες εστίασαν στα στοιχεία της αριθμητικής που μπορούν να αξιοποιηθούν ως βάση για την ανάπτυξη της αλγεβρικής κατανόησης των μαθητών. Για παράδειγμα, ο Fujii (2003) μελέτησε τις καλούμενες «ημι-μεταβλητές» (πρόκειται για αριθμούς σε μια αριθμητική παράσταση που δηλώνουν σχέση η οποία παραμένει εν ισχύ, ανεξάρτητα των εμπλεκόμενων αριθμών, π.χ. 20–16+16 = 20 και στοχεύουν στο να βοηθήσουν το μαθητή να συνειδητοποιήσει την ιδιαιτερότητά τους και όχι τη σχέση α–β+β=α), οι Blanton και Kaput (2004) τις αριθμητικές προτάσεις που δεν υπολογίζονται και άλλοι ερευνητές σχέσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης ή πολλαπλασιασμού εκφρασμένες σε πίνακα, ισότητες, ανισότητες και δραστηριότητες εύρεσης του κανόνα. Οι παραπάνω αναζητήσεις αντανακλούν την αντίληψη ότι η ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αντικατοπτρίζεται στην ικανότητά τους να παράγουν και να τεκμηριώνουν γενικεύσεις για δομικές ιδιότητες της αριθμητικής (Carpenter και Franke, 2001).

Η Kieran (2007) ισχυρίζεται ότι «η πρώιμη αλγεβρική σκέψη αφορά στην ανάπτυξη των τρόπων σκέψης σε δραστηριότητες … (που) δεν είναι αποκλειστικά αλγεβρικές …, όπως είναι η ανάλυση ποσοτικών σχέσεων, η παρατήρηση δομής, η μελέτη της αλλαγής, η γενίκευση, η επίλυση προβλήματος, η μοντελοποίηση, η τεκμηρίωση, η απόδειξη και η πρόβλεψη» (σελίδα 151). Στην ίδια κατεύθυνση οι Carraher et al (2006) προτείνουν την εισαγωγή της άλγεβρας στη στοιχειώδη εκπαίδευση στη βάση τριών αρχών: η γενίκευση συνιστά κεντρική συνιστώσα του αλγεβρικού συλλογισμού, οι αριθμητικές πράξεις μπορεί να προσεγγιστούν ως συναρτήσεις και ο αλγεβρικός συμβολισμός μπορεί να δράσει υποστηρικτικά για το μαθηματικό συλλογισμό των μικρών μαθητών. Ουσιαστικά, προτείνουν την αντιμετώπιση της πρώιμης άλγεβρας ως γενικευμένης αριθμητικής, όπου η έννοια της συνάρτησης έχει κεντρικό ρόλο και ο αλγεβρικός συμβολισμός αξιοποιείται υποστηρικτικά στη μάθηση των μαθηματικών.

Η θέση πως η άλγεβρα θα πρέπει να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι των στοιχειωδών μαθηματικών εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία στα τέλη της δεκαετίας του 1980, με τον Davis (1989) να επιχειρηματολογεί υπέρ της εισαγωγής της άλγεβρας στη δευτέρα ή την τρίτη τάξη, τον Vergnaud (1988) να υποστηρίζει την ανάγκη της διδασκαλίας της σε όλο το Δημοτικό Σχολείο για την καλύτερη αντιμετώπιση από τους μαθητές των επιστημολογικών θεμάτων της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα και, αργότερα, τον Kaput (1998) να υπερθεματίζει για την αντικατάσταση των αργοπορημένων, απότομων, απομονωμένων, τεχνητών αλγεβρικών προγραμμάτων από την επιδίωξη της καλλιέργειας του αλγεβρικού συλλογισμού σε όλη την εκπαίδευση, ως συνδετικού κρίκου όλου του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών και ως ενός τρόπου ανάδειξης της συνοχής, του βάθους και της ισχύος των σχολικών μαθηματικών.

Είναι, όμως, σε θέση οι μαθητές να ανταποκριθούν στη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών; Οι λόγοι για τους οποίους οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη μάθηση της άλγεβρας μπορεί να αναζητηθούν είτε στην ύπαρξη αναπτυξιακών περιορισμών είτε στην ελλιπή προετοιμασία. Οι αναπτυξιακοί περιορισμοί αφορούν σε περιορισμούς της γνωστικής ικανότητας των μαθητών, στη μη ετοιμότητα των νοητικών τους σχημάτων να ανταποκριθούν σε συγκεκριμένες λειτουργίες, όπως αυτές που διέπουν την άλγεβρα. Πολλοί ερευνητές έχουν εντοπίσει τέτοιους περιορισμούς. Για παράδειγμα, οι Filloy και Rojano (1989) υποστήριξαν ότι η αριθμητική σκέψη εξελίσσεται πολύ αργά από συγκεκριμένες σε πιο αφηρημένες διεργασίες, δηλαδή σε αλγεβρική σκέψη, και ότι υπάρχει ένα σημείο τομής που διαχωρίζει τα δυο είδη σκέψης, το οποίο ονομάζουν «ρήξη στην ανάπτυξη λειτουργίας με τον άγνωστο». Ομοίως, οι Herscovics και Linchevski (1994) προτείνουν την ύπαρξη ενός γνωστικού διάκενου ανάμεσα στην αριθμητική και την άλγεβρα, το οποίο χαρακτηρίζουν ως «την αδυναμία των μαθητών να λειτουργήσουν αυθόρμητα με ή πάνω στον άγνωστο». Ωστόσο, παλαιότερες (π.χ., Booth, 1988) αλλά και πρόσφατες μελέτες (π.χ., Carraher et all, 2006) τείνουν να συνηγορούν στην άποψη ότι οι δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα είναι αποτέλεσμα των περιορισμένων τρόπων με τους οποίους διδάχτηκαν αριθμητική και, γενικά, στοιχειώδη μαθηματικά. Έτσι, οι μελέτες τάξης της ομάδας του Davydov (Bodanskii, 1969/1991, Davydov, 1969/1991) έδειξαν ότι μαθητές της πρώτης έως της τετάρτης τάξης, οι οποίοι διδάχτηκαν σχετικά με την αλγεβρική αναπαράσταση λεκτικών προβλημάτων, είχαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου στα επόμενα σχολικά χρόνια, αλλά και από μαθητές που διδάχτηκαν με παραδοσιακό τρόπο αριθμητική στις πέντε πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου και εισάχθηκαν στην άλγεβρα στην έκτη τάξη. Ομοίως, οι Brito Lima & da Rocha Falcao (1997) διαπίστωσαν ότι μαθητές της πρώτης έως και της έκτης τάξης είναι σε θέση να αναπτύξουν γραπτές αναπαραστάσεις για αλγεβρικά προβλήματα και, με τη βοήθεια ενός ενήλικα, να επιλύσουν προβλήματα γραμμικών εξισώσεων με διαφορετικούς τρόπους, ενώ οι Schliemann et al (2007) διαπίστωσαν ότι ακόμη και επτάχρονοι μαθητές μπορούν να διαχειριστούν τη βασική λογική που διέπει τους γραμμικούς μετασχηματισμούς στις εξισώσεις. Στις Η.Π.Α., οι Carpenter και Franke (2001) έδειξαν ότι νεαροί μαθητές που συμμετείχαν σε δραστηριότητες αναζήτησης μαθηματικών σχέσεων μπορούσαν να κατανοήσουν ότι α+β = β+α για κάθε αριθμό α και β, ο Schifter (1999) παρουσίασε αποκαλυπτικά παραδείγματα υπονοούμενου αλγεβρικού συλλογισμού και γενικεύσεων από μαθητές Δημοτικού Σχολείου σε τάξεις με έμφαση τη διδασκαλία στο συλλογισμό μαθηματικών σχέσεων, ενώ ο Kaput (1998) βρήκε ότι μαθητές της τρίτης τάξης του δημοτικού σχολείου είναι σε θέση να προχωρήσουν σε γόνιμες γενικεύσεις. Ακόμη, βρέθηκε ότι μαθητές ακόμη και της δευτέρας τάξης του δημοτικού σχολείου είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε ορισμένες δραστηριότητες που αφορούν τις έννοιες της μεταβλητής και της συνάρτησης (Davis, 1972), ενώ μαθητές της τρίτης τάξης, αν τους δοθεί η κατάλληλη ενθάρρυνση, μπορούν να εμπλακούν με ικανοποιητικό τρόπο σε αλγεβρικό συλλογισμό και να εργαστούν με πίνακες τιμών, χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό για να αναπαραστήσουν συναρτησιακές σχέσεις (π.χ., Brizuela, 2004). Τέλος, οι Carraher et al (2006) ανέδειξαν ότι μαθητές ηλικίας 8 – 10 ετών ήταν σε θέση να εντάξουν αλγεβρικές έννοιες και αναπαραστάσεις στη σκέψη τους, εργαζόμενοι με κατάλληλες δραστηριότητες, όπως ορισμένες που αναδείκνυαν με ρητό τρόπο το συναρτησιακό χαρακτήρα της πράξης της πρόσθεσης.

Οι παραπάνω μελέτες φανερώνουν ότι η εισαγωγή των μαθητών στην αλγεβρική δραστηριότητα από μικρή ηλικία είναι δυνατή και καρποφόρα. Η συνύφανση του συγκεκριμένου και του αφηρημένου, αντί της πριμοδότησης αρχικά του πρώτου και στη συνέχεια του δεύτερου, εμποδίζει την υπερβολική προβολή του συγκεκριμένου χαρακτήρα της αριθμητικής που αποθαρρύνει τις προσπάθειες γενίκευσης των μαθητών. Η υπολογιστική ικανότητα είναι κρίσιμη για τον αλγεβρικό συλλογισμό των μαθητών αλλά δεν εξασφαλίζει την ανίχνευση των κανονικοτήτων που διέπουν τις αριθμητικές σχέσεις. Ο αλγεβρικός συμβολισμός προσφέρει ένα μέσο σαφούς και περιεκτικής έκφρασης αυτών των κανονικοτήτων που, αν εισαχθεί με τρόπους που έχουν νόημα για τους μαθητές, ενοποιεί ιδέες που διαφορετικά παραμένουν αποσπασματικές και απομονωμένες. Η αναφορά, επομένως, σε «μεταβατική» περίοδο μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας δεν έχει νόημα, καθώς υπάρχουν πολλές ευκαιρίες εισαγωγής των αλγεβρικών εννοιών στο αναλυτικό πρόγραμμα από τα πρώτα κιόλας χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η θέση ότι ο αλγεβρικός χαρακτήρας της αριθμητικής αξίζει μια θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών από τα πρώτα κιόλας χρόνια δεν αρνείται την αναπτυξιακή φύση των μαθηματικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων: η ικανότητα χρήσης αλγεβρικού συμβολισμού, ερμηνείας γραφικών παραστάσεων, μοντελοποίησης κ.ά., αναπτύσσεται με το χρόνο. Εκείνο που υποστηρίζεται είναι απλώς ότι, αν επιτραπεί και ενθαρρυνθεί να αναπτυχθούν από νωρίς τα κατάλληλα νοητικά σχήματα, θα διευκολυνθεί αργότερα σημαντικά η μύηση στην αλγεβρική σκέψη.

## 3. Μάθηση των αλγεβρικών ιδεών

Καθώς το περιεχόμενο της σχολικής άλγεβρας διευρύνθηκε με το χρόνο, μετακινούμενο από την έμφαση στους συμβολικούς χειρισμούς στο να συμπεριλάβει πολλαπλές αναπαραστάσεις, ρεαλιστικά προβλήματα και την αξιοποίηση της τεχνολογίας, διευρύνθηκε και η αντίληψη του πώς μαθαίνεται η άλγεβρα. Εκείνο που γίνεται σαφές από το σώμα των σύγχρονων ερευνών είναι ότι το αλγεβρικό νόημα που συγκροτούν οι μαθητές προέρχεται από πολλές πηγές και ότι η σχετική οικοδόμηση ενεργοποιεί μια σύνθετη αλληλεπίδραση μεταξύ συμβολικών και γραφικών μορφών, προβληματικών καταστάσεων, γλωσσολογικής δραστηριότητας και δραστηριότητας χειρονομιών, καθώς και προηγούμενων εμπειριών.

Η έρευνα κατά τις δεκαετίες του 1970 και του 1980 έδειξε ένα πλήθος δυσκολιών που αντιμετώπιζαν οι μαθητές στην αρχή της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Οι λόγοι αυτών των δυσκολιών αναζητήθηκαν, ανάμεσα σε άλλα, στον προσανατολισμό της αριθμητικής της στοιχειώδους εκπαίδευσης στην εκτέλεση των πράξεων και στην εύρεση μιας απάντησης και όχι στην αναπαράσταση, καταρχήν, των διεργασιών ή σχέσεων. Έτσι, τα ευρήματα της έρευνας αυτής της εποχής, που έδειχναν ότι η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα δεν ήταν εύκολη για την πλειοψηφία των μαθητών, οδήγησαν τους ερευνητές στη σκέψη ότι ενδεχομένως χρειαζόταν περισσότερος χρόνος για τη νοηματοδότηση από τους μαθητές των αλγεβρικών οντοτήτων (Filloy, Rojano & Puig, 2008).

Στα τέλη της δεκαετίας του 1980 και κατά τη δεκαετία του 1990, η σχετική έρευνα στρέφεται σε άλλες κατευθύνσεις, όπως είναι η αξιοποίηση της ιστορίας και η προσεκτικότερη αναζήτηση των βαθύτερων επιστημολογικών αιτιών για την καλύτερη κατανόηση των δυσκολιών των μαθητών στην άλγεβρα (π.χ., Radford, 1995), καθώς και η αξιοποίηση της τεχνολογίας για τη διερεύνηση των αλγεβρικών ιδεών σε ποικίλα περιβάλλοντα. Για παράδειγμα, οι Sfard & Linchevski (1994) υποστηρίζουν ότι από ιστορική και οντολογική άποψη η άλγεβρα γίνεται αρχικά αντιληπτή από τους μαθητές ως προσανατολισμένη στη διεργασία και μόνο αργότερα ότι αφορά σε αντικείμενα ή δομές. Σε αυτό το πλαίσιο, οι δυσκολίες των μαθητών με την απόδοση «υπόστασης» (reification) στην άλγεβρα συνδέεται με το γεγονός ότι η διδασκαλία υιοθετεί τη δομική προσέγγιση από την αρχή, όταν οι μαθητές δεν μπορούν ακόμη να διακρίνουν τη δυαδικότητα διαδικασία-αντικείμενο που είναι εγγενής στην άλγεβρα, ούτε να ανταποκριθούν στις προκλήσεις που θέτει η έννοια της συνάρτησης. Ωστόσο, οι Carraher, Schliemann & Brizuela (2000), αν και συμφωνούν ότι υπάρχει μια φυσική εξέλιξη από την κατανόηση των μαθηματικών ως διεργασία προς την κατανόησή τους ως δομή, υποστηρίζουν ότι οι αντίστοιχες δυσκολίες των μαθητών οφείλονται, επιπλέον, σε χαρακτηριστικά των πρώτων σταδίων της διδασκαλίας των μαθηματικών και, συγκεκριμένα στην επιμονή σε περιορισμένης εμβέλειας τύπους προβλημάτων, στο συμβολισμό ως μέσου καταγραφής υπολογισμών παρά περιγραφής του τι είναι γνωστό σε ένα πρόβλημα και στην εστίαση στον υπολογισμό ενός συγκεκριμένου συνόλου τιμών παρά στις σχέσεις μεταξύ συνόλων. Οι ερευνητές ισχυρίζονται ακόμη ότι η άκαμπτη διάκριση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας επιβαρύνει τις δυσκολίες των μαθητών να μεταβούν ομαλά από την αριθμητική στην άλγεβρα. Ο Kaput (1989) υποστηρίζει ότι τα προβλήματα των μαθητών στην άλγεβρα επιβαρύνονται επιπλέον από τις έμφυτες δυσκολίες διαχείρισης της ιδιαίτερα ακριβούς και υπονοούμενης σύνταξης των τυπικών αλγεβρικών συμβόλων και την απουσία σύνδεσης με άλλες αναπαραστάσεις που είναι πιθανόν να προσφέρουν ανατροφοδότηση σχετικά με την καταλληλότητα δράσης.

Η Kieran (2007) μελέτησε τα ερευνητικά ευρήματα που αφορούν την άλγεβρα κατά την τελευταία εικοσαετία, καταλήγοντας στις παρακάτω διαπιστώσεις:

Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων παραγωγής (κατασκευής αλγεβρικών παραστάσεων και σχέσεων), στις σχετικές μελέτες, οι μαθητές καλούνται να προσφύγουν σε μια ποικιλία από πηγές νοήματος για τα αλγεβρικά σύμβολα, συμπεριλαμβανομένων πολλαπλών αναπαραστάσεων, λεκτικών προβλημάτων, φυσικής και γλωσσικής δραστηριότητας. Εν τούτοις, οι δραστηριότητες μετασχηματισμού που παρεμβαίνουν, περιορίζουν την έμφαση στο συμβολισμό, με αποτέλεσμα να γίνονται γνωστά πολύ λίγα σχετικά με το πώς το νόημα που προέρχεται από πολλαπλές πηγές αναπτύσσεται από τους μαθητές και μεταφέρεται από τα πλαίσια στα οποία είναι ενσωματωμένο σε φορμαλιστικά πλαίσια.

Αναφορικά με τις δραστηριότητες μετασχηματισμού, ενώ στο παρελθόν η συμβολική διαχείριση αντιμετωπιζόταν κυρίως ως κατευθυνόμενη από κανόνες, η πρόσφατη έρευνα εξετάζει τη σημασία της θεώρησής της από τους μαθητές ως καθοδηγούμενης από τη θεωρία, ακόμη και σε υπολογιστικά περιβάλλοντα, όπου η φροντίδα για εννοιολογική προσέγγιση και ανάπτυξη αλγεβρικών τεχνικών συμβαδίζουν. Ωστόσο, περισσότερη έρευνα απαιτείται για τη διερεύνηση της προσφοράς τέτοιων προσεγγίσεων.

Σε σχέση με τη χρήση της τεχνολογίας στη μάθηση της άλγεβρας, η έρευνα υποδεικνύει ότι η εννοιολογική κατανόηση δεν αναπτύσσεται όταν το υπολογιστικό περιβάλλον απαλλάσσει πλήρως το μαθητή από συμβολική εργασία. Η περιορισμένη έστω ανάπτυξη τεχνικών χρήσης του υπολογιστικού περιβάλλοντος, καθώς και εννοιολογικών εργαλείων ερμηνείας των αποτελεσμάτων του, φαίνεται να αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για ουσιαστική μάθηση. Η αποτελεσματική χρήση της τεχνολογίας προϋποθέτει την ανάθεση ποιοτικών εργασιών στους μαθητές, ανάμεσα στις οποίες ακόμη και εργασίες σχετικές με αλγεβρικές τεχνικές με μολύβι-και-χαρτί, αλλά και την ανάπτυξη συζήτησης υψηλού επιπέδου στην τάξη.

Σε ότι αφορά τα λεκτικά προβλήματα, η έρευνα προτείνει ότι, έτσι όπως χρησιμοποιούνται σήμερα, ίσως να μη συνιστούν τον πλέον γόνιμο δρόμο προς την κατασκευή εξισώσεων, ειδικά για τους μικρούς μαθητές. Τα αποτελέσματα για τα οφέλη της αξιοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων και μοντελοποίησης καταστάσεων στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης είναι αντιφατικά, ενώ οι μαθητές συνεχίζουν να παρουσιάζουν τις γνωστές δυσκολίες στη μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικές εξισώσεις (αν και δεν δυσκολεύονται να τα επιλύσουν με αριθμητικές μεθόδους).

Αν και η παραγωγή συμβολικών αναπαραστάσεων από λεκτικά προβλήματα παρουσιάζει δυσκολίες, η χρήση γραφημάτων (σε συμβατικό ή υπολογιστικό περιβάλλον) για την επίλυση προβλημάτων και την ερμηνεία συμβολικών αναπαραστάσεων υποδεικνύεται από αρκετές μελέτες ως πρόσφορη. Η σχετική έρευνα δείχνει ότι συχνά απαιτείται πολύς χρόνος για να μοντελοποιήσει ένας μαθητής μια κατάσταση συμβολικά, αλλά, όταν το καταφέρει, ο εγγράμματος- συμβολικός τρόπος αναπαράστασης είναι προτιμότερος του γραφικού.

Τέλος, η έρευνα της αλγεβρικής δράσης μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου, η οποία εστιάζεται περισσότερο στις μαθηματικές πηγές αλγεβρικού νοήματος από τις οποίες αυτοί αντλούν, φανερώνει πως η πλειοψηφία τους συνεχίζει να δυσκολεύεται στην αναγνώριση δομών. Όπως οι νεότεροι μαθητές δυσκολεύονται και χρειάζονται χρόνο να μοντελοποιήσουν μια κατάσταση με εξισώσεις, έτσι και οι μεγαλύτεροι βιώνουν δυσκολίες με μια άλλη χρονοβόρα πτυχή της συμβολικής μάθησης, την αναγνώριση φόρμας και δομής. Τα ευρήματα προτείνουν ότι οι μαθητές χρειάζονται αρκετό χρόνο για να αποκτήσουν άνεση με τα αλγεβρικά σύμβολα και την ευχέρεια και την ισχύ που τα σύμβολα μπορούν να τους προσφέρουν και, κατά συνέπεια, θα πρέπει να δοθεί η δέουσα προσοχή στην πρόταση για την εισαγωγή των σχετικών διεργασιών σε νεότερη ηλικία, όπως έχει ήδη γίνει σε αρκετές χώρες με επιτυχία.

## 4. Διδακτικές όψεις της σχολικής άλγεβρας

Οι διδακτικές προσεγγίσεις που αξιοποιούνται σήμερα στη σχολική άλγεβρα εντάσσονται σε δυο κατηγορίες (Kieran, 2007):

- **Παραδοσιακές:** εστιάζουν στη μελέτη της μορφής και του μετασχηματισμού (έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συμβολικής διαχείρισης)
- **Εναλλακτικές:** επικεντρώνονται στη μελέτη συναρτήσεων, στην αναπαράσταση συναρτησιακών καταστάσεων, στην επίλυση «ρεαλιστικών» προβλημάτων με μολύβι και χαρτί αλλά και με τη βοήθεια της τεχνολογίας – (περιοριστική / απουσία έμφασης στη φόρμα και αποσπασματική θεώρηση των αλγεβρικών οντοτήτων).

Καθοριστικές συνιστώσες των διδακτικών προσεγγίσεων που υιοθετούνται στην τάξη αποτελούν αφενός οι πηγές/πόροι αλγεβρικού νοήματος που καθίστανται διαθέσιμοι στους μαθητές και αφετέρου οι δραστηριότητες που αξιοποιούνται στην τάξη.

Ο πίνακας 1 παρουσιάζει τρεις αντιπροσωπευτικές ομάδες πόρων αλγεβρικού νοήματος από αυτές που αναφέρονται στη βιβλιογραφία και αξιοποιούνται συχνά στην τάξη.

**Πίνακας 1.** Πηγές αλγεβρικού νοήματος

| **Βιβλιογραφική αναφορά** | **Πηγές νοήματος** |
|---|---|
| Noss & Hoyles (1996) | • *Τα μαθηματικά αντικείμενα*<br>• *Η επίλυση προβλήματος*<br>• *Η προσωπική κατασκευή του μαθητευομένου* |
| Radford (2004) | • *Η αλγεβρική δομή αυτή καθαυτή*<br>• *Το πλαίσιο του προβλήματος*<br>• *Το εξωτερικό του πλαισίου του προβλήματος* |
| Kieran (2007) | • *Η αλγεβρική δομή αυτή καθαυτή, συμπεριλαμβανομένης της εγγράμματης–συμβολικής δομής*<br>• *Άλλες μαθηματικές αναπαραστάσεις*<br>• *Το πλαίσιο του προβλήματος*<br>• *Εξωτερικά στοιχεία του προβλήματος (π.χ. χειρονομίες, μεταφορές, γλώσσα του σώματος)* |

Από τον πίνακα γίνεται φανερό ότι η αλγεβρική δομή και το πλαίσιο δραστηριοποίησης των μαθητών συνιστούν βασικές συνιστώσες των πηγών αλγεβρικού νοήματος.

Αναφορικά με τις διδακτικές προσεγγίσεις που πριμοδοτούνται στην τάξη όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα οδήγησαν τους ερευνητές κατά τις δεκαετίες του 1970 και του 1980 στη σκέψη ότι, ενδεχομένως, χρειαζόταν περισσότερος χρόνος για τη νοηματοδότηση από αυτούς των αλγεβρικών οντοτήτων. Αναζητώντας νέες διαδρομές προς αυτήν την κατεύθυνση, η έρευνα άρχισε να δοκιμάζει νέες διδακτικές προσεγγίσεις με βάση δραστηριότητες παραγωγής, αρχικά σε περιβάλλοντα «ψευδο-μηχανών» (π.χ., Booth, 1984 – απόδοση νοήματος μεταβλητής σε γράμματα μέσω «μαθηματικών μηχανών» που δεχόντουσαν οδηγίες σε μαθηματική γλώσσα, π.χ., «Θέλω να προσθέτει τον αριθμό 1 σε κάθε αριθμό που της δίνω» = (χ+1)) και αργότερα σε υπολογιστικά περιβάλλοντα (π.χ., Sutherland & Rojano, 1993 – χρήση υπολογιστικών φύλλων για το ρόλο των γραμμάτων ως άγνωστων και μεταβλητών, δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων με νόημα, αναπαραστάσεων σχέσεων αλλά και επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων). Η μικρή σχέση αυτής της έρευνας με τις δραστηριότητες μετασχηματισμού και η έμφαση στην επίλυση προβλήματος ανέδειξε μια νέα σημαντική κατεύθυνση εστίασης για τη σχολική άλγεβρα, την άλγεβρα ως εργαλείο επίλυσης προβλήματος. Η προσδοκία ήταν ότι, με τις νέες τεχνολογίες και την εστίαση στην αλγεβρική κατανόηση, οι τεχνικές συμβολικής διαχείρισης θα προέκυπταν αναπόφευκτα. Αυτό, όμως, δε συνέβη, όπως επισημαίνουν οι Artigue et al (1998), καθώς η έρευνα έδειξε πως οι εκπαιδευτικοί τόνιζαν την εννοιολογική διάσταση αλλά αγνοούσαν το ρόλο της τεχνικής εργασίας στη μάθηση της άλγεβρας. Σήμερα οι τεχνικές γίνονται αντιληπτές ως ένας δεσμός μεταξύ έργων και εννοιολογικού αναστοχασμού παρά ως κάτι που πρέπει να περιοριστεί στη μάθηση των μαθηματικών: «Μια τεχνική είναι, γενικά, μια μίξη ρουτίνας και αναστοχασμού. Διαδραματίζει ένα πραγματικό (pragmatic) ρόλο, όταν το σημαντικό είναι να ολοκληρωθεί ένα έργο ή όταν ένα έργο αποτελεί μια ρουτίνα. Μια τεχνική διαδραματίζει έναν επιστημικό ρόλο, συμβάλλοντας σε μια κατανόηση των αντικειμένων που διαχειρίζεται, ειδικά κατά την επεξεργασία της, Επιπλέον, εξυπηρετεί ως αντικείμενο εννοιολογικού αναστοχασμού κατά τη σύγκριση με άλλες τεχνικές και κατά τη συζήτηση σχετικά με τη συνέπεια / συνάφεια / συνοχή. Χωρίς τα συστήματα της υπολογιστικής άλγεβρας, οι τεχνικές με μολύβι και χαρτί δεν μπορούν να αποφευχθούν, εξαιτίας του πραγματικού (pragmatic) τους ρόλου στη μαθηματική εκπαίδευση. Έτσι, εκπαιδευτικοί και ερευνητές τείνουν να θεωρούν μόνο τον πραγματικό τους ρόλο, αγνοώντας την επιστημική συμβολή» (Lagrange, 2003, σελ. 271).

Μέρος της έρευνας αναφορικά με την άλγεβρα στράφηκε τα τελευταία χρόνια στον εκπαιδευτικό και τη διδασκαλία. Ωστόσο, ελάχιστα είναι ακόμη γνωστά για το πώς οι εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν την «τέχνη» τους και σε τι συνίσταται μια αποτελεσματική διδασκαλία της άλγεβρας. Κάποια ευρήματα όμως προσφέρουν ένα πρώτο πλαίσιο περαιτέρω σκέψης και έρευνας σε αυτόν τον τομέα. Για παράδειγμα, έρευνες δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν πολύ περιορισμένη γνώση των αλγεβρικών δυνατοτήτων των μαθητών τους, ενώ ορισμένες φορές η περιορισμένη παιδαγωγική τους γνώση του περιεχομένου, εξισορροπείται από μια ανεπτυγμένη γνώση του αντικειμένου, η οποία, τους οδηγεί να απεικονίσουν, με ακατάλληλο τρόπο, τη δομή του αλγεβρικού πεδίου στις τροχιές μάθησης των μαθητών (Kieran, 2007).

## 5. Συμπερασματικά

Η ισχύς της άλγεβρας βρίσκεται στο γεγονός ότι παρέχει τη δυνατότητα να χειριζόμαστε και να αναπαριστούμε με συντομία, ακρίβεια και σαφήνεια τις μαθηματικές ιδέες και να αναπτύσσουμε αποτελεσματικές διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Παρά την αναγνώριση της αξίας της, ωστόσο, η πλειοψηφία των μαθητών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης συνεχίζει να αντιμετωπίζει δυσκολίες στην ανάπτυξη της αλγεβρική σκέψης. Η έρευνα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, φιλοδοξώντας να κατανοήσει αυτές τις δυσκολίες και να προσφέρει αποτελεσματικούς τρόπους διαχείρισής τους στην τάξη, ασχολήθηκε και συνεχίζει να ασχολείται εκτεταμένα με διάφορες όψεις της εκπαίδευσης στην άλγεβρα. Σε αυτήν την ενασχόληση μπορεί κανείς να διακρίνει τέσσερις βασικές κατευθύνσεις:

- Μετατόπιση από την έμφαση στη συμβολική διαχείριση και τις δυσκολίες των μαθητών στην κατασκευή του αλγεβρικού νοήματος (πριν τη δεκαετία του 1980), μέσω της αξιοποίησης ποικίλων συστημάτων αναπαράστασης και δυναμικών περιβαλλόντων (μετά τη δεκαετία του 1980)
- Ανάδειξη της κοινωνικο-πολιτισμικής θεώρησης της μάθησης (ανάλυση της δράσης των κοινωνικών παραγόντων και των πολιτισμικών εργαλείων)
- Ανάδειξη του ρόλου της «θεωρητικοποίησης» (των ιδιοτήτων και των αξιωμάτων) στο πλαίσιο της διαχειριστικής δραστηριότητας
- Αξιοποίηση των δυναμικών περιβαλλόντων για τη στήριξη της κατανόησης και της οπτικοποίησης, μέσω γραφημάτων, της συμβολικής μορφής των συναρτήσεων από τους μαθητές

Παρατηρείται, λοιπόν, μια επικέντρωση του σύγχρονου ερευνητικού ενδιαφέροντος στις πηγές και στις διαδικασίες συγκρότησης του αλγεβρικού νοήματος.

Μια από τις πλέον ισχυρές πηγές αλγεβρικού νοήματος αποτελεί η αριθμητική, η μελέτη της οποίας προσφέρει σημαντικές ευκαιρίες γενίκευσης στους μαθητές. Οι Blanton και Kaput (2001) προτείνουν την «αλγεβροποίηση της μαθηματικής εμπειρίας στο Δημοτικό Σχολείο» (δηλαδή, την εστίαση στην εξερεύνηση της γενίκευσης μέσω της συγκρότησης και της έκφρασης νέων γενικεύσεων). Θεωρούν πως μια τέτοια προσέγγιση θα βοηθούσε σημαντικά τους μαθητές αργότερα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θα πρόσθετε σαφήνεια και βάθος στη στοιχειώδη μαθηματική εκπαίδευση και θα εκδημοκράτιζε τις υψηλής αξίας ιδέες, καθώς θα τις καθιστούσε εξίσου προσβάσιμες από όλους τους μαθητές. Στην ίδια κατεύθυνση, ο Lins (2001) υποστηρίζει ότι μια πρώιμη εισαγωγή στην άλγεβρα θα «νομιμοποιούσε» με φυσικό τρόπο τον λογισμό με εγγράμματα σύμβολα. Επιπλέον, ισχυρίζεται ότι οι δυσκολίες των μαθητών μπορεί να συνδέονται άμεσα με το γεγονός ότι συχνά οι εκπαιδευτικοί αποτυγχάνουν να αποσαφηνίσουν στους μαθητές τις μικρές μετατοπίσεις στον τύπο παραγωγής νοήματος (π.χ., η εξίσωση ως ζυγαριά και ως αριθμητική πρόταση). Αυτός ο ισχυρισμός είναι συμβατός με το εύρημα ότι οι μαθητές μπορούν να καταφέρουν πολύ περισσότερα πράγματα, αν τους δοθεί η κατάλληλη ευκαιρία και στήριξη.

Ο δρόμος προς τα μπρος στην άλγεβρα είναι η νοηματοδότηση όχι μόνο των αλγεβρικών οντοτήτων, αλλά και των διεργασιών χειρισμού και μάλιστα με τη στήριξη της τεχνολογίας. Η έρευνα υποδεικνύει ότι μια βαθύτερη κατανόηση των αλγεβρικών διεργασιών διαχείρισης μπορεί να επιτευχθεί αν δοθεί έμφαση στα σχετικά από μαθηματική άποψη στοιχεία των τεχνικών διαχείρισης σε τεχνολογικά περιβάλλοντα. Έργα που στοχεύουν σε μια πιο σε βάθος κατανόηση των εννοιών της ισοδυναμίας υποστηρίζονται ως ιδιαίτερα σχετικά.

## Βιβλιογραφία

Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G., & Lagrange, J.-B. (1998). *Intégration de calculatrices complexes dans l' enseignement des mathématiques au lycée*. Paris: Université Denis Didirot Paris 7, Equipe DIDIREM.

Blanton, M., & Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience: transforming practice on a district-wide scale (Part II). In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 87-95). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Design principles for instructional contexts that support students' transition from arithmetic to algebraic reasoning: Elements of task and culture. In R.

Nemirovsky, B. Warren, A. Rosebery, & J. Solomon (Eds.), *Everyday matters in science and mathematics* (pp. 211-234). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bodanskii, F. (1969/1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school children. In V. Davydov (Ed.), *Soviet studies in mathematics education: Vol. 6. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (pp.275-338). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp. 20-32). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Brito Lima, A. P., & da Rocha Falcão, J. T. (1997). Early development of algebraic representation among 6-13 year-old children: The importance of didactic contract. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education, , Vol. 2,* (pp. 201-208). Lahti, Finland.

Brizuela, B. M. (2004). *Mathematical development in young children: Exploring notations*. New York: Teachers College Press.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In M. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-North America*, (Vol 1, pp. 1-26). Tucson, AZ: PME-NA.

Carpenter, T., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 155-162). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Confrey, J. (1991). Steering a course between Vygotsky and Piaget. *Educational Researcher*, 20 (8), 28-32.

Davis, R. (1971-72). Observing children's mathematical behavior as a foundation for curriculum planning. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*(1), 7-59.

Davis, R. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra: Vol.4* (pp. 266-274). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/ Erlbaum.

Davydov, V. (Ed.) (1969/1991). *Soviet studies in mathematics education, Vol. 6. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 49-66). Honolulu, Hawaii: Program Committee.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994) A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59–78.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra: Vol.4* (pp. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/ Erlbaum.

Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. Kendal, & G. Millsaps (EDS.), *Proceedings of the 17th Annula Meeting of PME-NA* (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kaput, J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum*. Washington, DC: National Academy Press.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.

Kieran, C. (2010). The core of algebra: reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal, (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 21-33). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Lagrange, J.-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: a practical and theoretical reflection. In J. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in school mathematics* (pp. 269-284). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lins, R. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 37 – 60). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Lins, R., & Kaput, J. (2010). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal, (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 47-70). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Malisani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: the role of the 'variable'. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 19-41.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: didactic inquirers in the methods and problems of medieval Italian algebra. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 28-38.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 161-166). Bergen, Norway: Program Committee.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Heidelberg: Springer – Verlag.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking, grades K through 6. In L. Stiff & F. Curio, (Eds.), *Mathematical Reasoning, K-12: 1999 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook* (pp. 62–81). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*. Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A., & Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification –The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Slavitt, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebra thought. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 251-274.

Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 353-383.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l' algebre. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l' informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Educational Research Journal*, 15 (2), 122-137.