

Μαθηματικά Έργα και Μαθηματική Δραστηριότητα στο Πρόγραμμα Σπουδών

Βασικές αρχές ανάπτυξης μαθηματικών έργων και δραστηριοτήτων

Βασική επιδίωξη της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι οι μαθητές να αναπτύξουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, να καταστούν ικανοί στη διαχείριση μαθηματικών διεργασιών και πρακτικών και ικανοί και πρόθυμοι να επιλέγουν, να προσαρμόζουν και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε ποικιλία γνωστών και άγνωστων καταστάσεων και πλαισίων. Κρίσιμη παράμετρος επιτυχίας σε αυτήν την προσπάθεια είναι τα (μαθηματικά) έργα στα οποία καλούνται να εμπλακούν στο πλαίσιο της μαθηματικής εμπειρίας που προσφέρεται στην τάξη.

Στο πλαίσιο του Προγράμματος Σπουδών ο όρος 'μαθηματικό έργο' αφορά την εργασία που καλούνται να φέρουν σε πέρας οι μαθητές. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι μία άσκηση, ένα μικροπείραμα που υλοποιείται με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας, μία κατασκευή ενός μαθηματικού αντικειμένου (π.χ. γεωμετρική κατασκευή ενός παραλληλογράμμου), η επίλυση ενός προβλήματος. Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη των μαθηματικών έργων περιλαμβάνουν το εκπαιδευτικό υλικό (κείμενο, ψηφιακό δόμημα, κλπ), τις ενδεχόμενες διαφορετικές πορείες υλοποίησης του έργου, τις δυνατότητες διαφοροποίησης του έργου ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες όλων των μαθητών της τάξης, τις ενδεχόμενες διδακτικές παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού (π.χ. ερωτήσεις), τις πιθανές παρανοήσεις και δυσκολίες των μαθητών καθώς και τις επεκτάσεις του έργου (Margolinas, 2013).

Η υλοποίηση του μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη διαμορφώνει την συνθήκη και το πλαίσιο μέσα στο οποίο ο μαθητής ενεργοποιείται και, κατά συνέπεια, αναπτύσσει δράση που φέρει ή επιδιώκεται να φέρει τα χαρακτηριστικά της 'μαθηματικής δραστηριότητας'. Ο όρος έχει χρησιμοποιηθεί με πολλούς τρόπους στην βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Τζεκάκη, 2011). Κατά κανόνα συνδέεται με την ανάπτυξη από τους μαθητές συνηθειών σκέψης και μιας προδιάθεσης που υποδηλώνουν υψηλό επίπεδο σκέψης και περιλαμβάνουν: την αναζήτηση κανονικοτήτων, την κατανόηση δομών, την δημιουργία συνδέσεων, την γενίκευση, την ανάπτυξη δυναμικών συλλογισμών και αναστοχασμού, την διατύπωση εικασιών, τις διαδικασίες τεκμηρίωσης, επιχειρηματολογίας και απόδειξης, την κατάλληλη αξιοποίηση πόρων (συμβατικών και άλλων), τις διαδικασίες μοντελοποίησης, συμβολισμού και επικοινωνίας και την μεταγνωστική δράση (Radford, 2010, 2016). Η ανωτέρω οριοθέτηση του όρου προσδιορίζει την μαθηματική δραστηριότητα ως ένα σύνολο μαθηματικών δράσεων που δρομολογούνται μέσα από κατάλληλα έργα και προσφέρει ένα πρώτο λειτουργικό πλαίσιο αξιοποίησής του στην πράξη.

Με βάση τα ανωτέρω, η μαθηματική δραστηριότητα αφορά στις δράσεις (γνωστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές) που προκύπτουν στο πλαίσιο εμπλοκής και αλληλεπίδρασης των μαθητών με τον εκπαιδευτικό της τάξης, τα εργαλεία και το μαθησιακό περιβάλλον, με στόχο την διεκπεραίωση του μαθηματικού έργου που τους έχει ανατεθεί. Η υλοποίηση της μαθηματικής δραστηριότητας στη σχολική τάξη δεν αποτελεί μια προκαθορισμένη πορεία διδασκαλίας αλλά μια δυναμική πορεία προς τη μάθηση. Έτσι, ο εκπαιδευτικός καλείται να διαχειριστεί με δυναμικό τρόπο εκείνα τα στοιχεία του έργου που κρίνει ως αναγκαία, καθώς εξελίσσεται η δραστηριότητα στην τάξη. Καλείται, για παράδειγμα, να είναι προετοιμασμένος να διευκολύνει τους μαθητές να ξεπεράσουν μία ενδεχόμενη παρανόηση που αφορά το έργο ή να διαχειριστεί με γόνιμο τρόπο ένα λάθος τους. Για αυτό και είναι πολύ σημαντικό το στάδιο του σχεδιασμού και της διαχείρισης του έργου στην τάξη, ώστε ο εκπαιδευτικός να είναι σε θέση να ανταποκριθεί σε αυτές τις διδακτικές προκλήσεις. Σε κάθε περίπτωση, ο εκπαιδευτικός δεν παρατηρεί απλώς την εργασία των μαθητών, αλλά συμμετέχει και διευκολύνει διακριτικά, χωρίς να καθοδηγεί ασφυκτικά.

Κριτήρια ταξινόμησης μαθηματικών έργων

Ένα έργο αφορά συνήθως σε κείμενο που προορίζεται να προκαλέσει μαθηματική δραστηριότητα/ δράση μέσα από έτοιμες γραπτές και οπτικές εικόνες σε φύλλα εργασίας, βιβλία, οθόνες, βίντεο, μέσα αξιολόγησης, ψηφιακά διαδραστικά βιβλία και άλλες ψηφιακές τεχνολογίες. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα αδρανές, στατικό σημείο αναφοράς, με το οποίο καλούνται να αλληλεπιδράσουν οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός. Η αλληλεπίδραση αυτή καθορίζεται από τέσσερις παραμέτρους:

- Τα έργα συνδέονται με το ΠΣ και έχουν σχεδιαστεί για να διαρκέσουν συγκεκριμένο διδακτικό χρόνο (στην τάξη ή εκτός τάξης)
- Περιλαμβάνουν μια σαφώς διατυπωμένη εισαγωγή που ακολουθείται από σύντομες ερωτήσεις ή οδηγίες εργασίας με στόχο:
 - (i) την μαθηματική εξερεύνηση που υποστηρίζει τις πτυχές της μαθηματικής σκέψης που τα επιδιωκόμενα ΠΜΑ επιδιώκουν να αναπτύξουν
 - (ii) τον μαθηματικό λόγο (mathematical discourse) που αναδεικνύει και επικοινωνεί τα μαθηματικά νοήματα και τις μαθηματικές αξίες και πρακτικές που είναι σημαντικό να καλλιεργηθούν
- Επιδιώκουν τον περιορισμό των ενδεχόμενων (μαθησιακών) εμποδίων.
- Υποδεικνύουν τρόπους εργασίας των μαθητών (ατομική, ομαδική, συζήτηση κ.ά.)

Στόχος των μαθηματικών έργων και δη αυτών που βασίζονται σε κείμενο (text-based tasks) είναι η προώθηση της μαθηματικής δραστηριότητας. Η μαθηματική δραστηριότητα διαφοροποιείται με βάση τα χαρακτηριστικά των έργων και την διδακτική τους αξιοποίηση. Ακολουθεί μία πρόταση κατηγοριοποίησης των στοιχείων των μαθηματικών δραστηριοτήτων με στόχο να γίνουν ορατά τα χαρακτηριστικά τους και διακριτές οι δυνατότητες που παρέχουν στους διδάσκοντες. Η κατηγοριοποίηση αποτυπώνεται στον παρακάτω πίνακα:

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
<i>Πεδίο</i>		<i>Ειδικά</i>		<i>Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</i>	
<i>Ενότητα</i>					
<i>Μεγάλες Ιδέες</i>					
<i>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</i>		<i>Γενικά</i>		<i>Προτεινόμενοι πόροι</i>	
<i>Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</i>		<i>Συγκεκριμένο</i>			

Το **Πεδίο** αφορά το αντίστοιχο με το μαθηματικό περιεχόμενο θεματικό πεδίο: Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση, Γεωμετρία, Μέτρηση & Αναλυτική Γεωμετρία και Στατιστική & Πιθανότητες.

Η **Ενότητα** αφορά τη θεματική ενότητα στην οποία εντάσσεται η δραστηριότητα, π.χ. Αλγεβρικές Σχέσεις.

Οι **Μεγάλες Ιδέες, Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές** αφορούν τα αντίστοιχα θέματα όπως αυτά αναλύονται στο κείμενο της φιλοσοφίας του ΠΣ. Για παράδειγμα, ένα ενδεικτικό έργο της Β΄ Γυμνασίου αφορά τη χρονολογική εξέλιξη των γεννήσεων και θανάτων στη χώρα μας από το 1932 έως το 2016. Προέρχεται από το θεματικό πεδίο Στατιστική & Πιθανότητες και τη θεματική ενότητα Διαχείριση δεδομένων. Επίσης, πραγματεύεται την ιδέα της συμμεταβολής δύο μεγεθών (γεννήσεις, θάνατοι) και οι μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές που αξιοποιούνται στη σχολική τάξη κατά την υλοποίηση του έργου είναι η μαθηματική επικοινωνία, μέσω του ερωτήματος «Συζητήστε, μεταξύ σας, πιθανές αιτίες στις οποίες οφείλονται οι απαντήσεις που δώσατε στα προηγούμενα ερωτήματα» και η οπτικοποίηση μέσω του δοθέντος χρονογράμματος. Τέλος, το έργο είναι κατάλληλο για την ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο των μαθητών, την προαγωγή του μαθηματικού γραμματισμού, την απόδοση αξίας στις ιδέες των άλλων και στα επιχειρήματά τους και τη λήψη αποφάσεων με διάλογο.

Τα **Ειδικά χαρακτηριστικά** αφορούν σε δράσεις που συνδέονται με συγκεκριμένη μαθηματική συνιστώσα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα όπου περιγράφονται πέντε επίπεδα εστίασης με τις αντίστοιχες δράσεις που μπορούν να αναπτυχθούν στο πλαίσιο μιας μαθηματικής δραστηριότητας (Watson & Thompson, 2015):

Επίπεδο	Εστίαση	Επίπεδα πρόκλησης/ απαίτησης (ενδεικτικές δράσεις)
1	Βασικές δράσεις (basics)	Υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης, δήλωση γεγονότων/διαπιστώσεων
2	Μετασχηματιστικές δράσεις	Οργάνωση, αναδιάταξη, συστηματοποίηση, οπτικοποίηση, αναπαράσταση
3	Δράσεις οικοδόμησης έννοιας	Ομαδοποίηση, σύγκριση, ταξινόμηση, γενίκευση, δομή, μεταβολή, επέκταση, περιορισμός, ορισμός, εξειδίκευση, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες
4	Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή	Διατύπωση εικασίας, υπόθεση, συμβολισμός, μοντελοποίηση, πρόβλεψη, εξήγηση, επαλήθευση, τεκμηρίωση, αμφισβήτηση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων
5	Διεπιστημονική προσέγγιση	Ενσωμάτωση άλλων επιστημολογιών, προσδιορισμός/ αναγνώριση μεταβλητών και δομών, αναγνώριση ομοιοτήτων, σύγκριση οικείων και μη γνώσεων.

Τα **Γενικά χαρακτηριστικά** αφορούν σημαντικές πτυχές της μαθηματικής εμπειρίας που είναι επιθυμητό να αναπτύξουν οι μαθητές. Ενδεικτικά, προτείνονται οι εξής:

- Να μιλούν, να γράφουν και να ακούν μαθηματικά (Μαθηματική επικοινωνία)
- Να συλλογίζονται διαφορετικούς σκοπούς, π.χ. για να εικάσουν, να πείσουν, να αποδείξουν (Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού/ flexible modality of reasoning)
- Να χρησιμοποιούν μαθηματική ανατροφοδότηση, όπως αυτο-διόρθωση, διαχείριση μιας 'συνολικής αίσθησης', κατανόηση σχολίων που διατυπώνονται από άλλους και εκτίμηση της ανάγκης για συνέπεια (Τα μαθηματικά ως συλλογικό προϊόν ανθρώπινης δράσης)
- Να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως μέρος της πολιτεότητας (citizenship) – πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου (τα μαθηματικά ως εργαλείο ανάπτυξης ισχύος/ μέσο διασφάλισης ίσων ευκαιριών/ δημοκρατικό δικαίωμα)
- Να συσχετίζουν την μαθηματική εργασία με άλλες ανθρώπινες αξίες (τα μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία/ κουλτούρα/ πολιτισμικό διακύβευμα)

Το **Συγκεκριμένο** αναφέρεται στο 'περιβάλλον'/θεματική όπου 'τοποθετείται' το έργο, την 'περίσταση' (situation) που το έργο επικαλείται για να δραστηριοποιηθεί ο μαθητής. Στην βιβλιογραφία υποδεικνύονται συχνά πέντε κατηγορίες τέτοιων συγκεκριμένων: το Προσωπικό, το Κοινωνικό, το Οικονομικό, το Επαγγελματικό και το Επιστημονικό.

Το τελευταίο μέρος της κατηγοριοποίησης αφορά τη **Διδακτική διαχείριση του έργου**. Ενδεικτικά αναφέρονται κάποια από τα στοιχεία που την χαρακτηρίζουν: διερευνητική (inquiry based), βασισμένη στην διαδικασία επίλυσης προβλήματος (problem solving based), πολιτισμικά ευαίσθητοποιημένη/πολλαπλά σημεία 'εισόδου' (culturally responsive), συμμετοχική, βασισμένη στην έννοια της μαθητείας (apprentice based).

Τέλος, η αξιοποίηση πόρων σχετίζεται κυρίως με χειραπτικά (π.χ. γεωπίνακας, κανόνας και διαβήτη) ή ψηφιακά εργαλεία, όπως η πλοήγηση στο internet, τα υπολογιστικά φύλλα και τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας ή δημιουργίας γραφικών αναπαραστάσεων.

Διαχείριση/ προσανατολισμός της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη

Το μαθηματικό έργο που υλοποιείται στη σχολική τάξη μετατρέπεται πλέον σε μαθηματική δραστηριότητα. Η διαδικασία μετάβασης περιλαμβάνει τρία βασικά στάδια (Trevisan, Ribeiro, & da Ponte, 2020). Στο πρώτο στάδιο ο εκπαιδευτικός συζητά με τους μαθητές το μαθηματικό περιεχόμενο του έργου, αποσαφηνίζει σημεία του έργου που ενδεχομένως δυσκολεύουν τους μαθητές χωρίς να τους υποδεικνύει τον τρόπο που θα το προσεγγίσουν και γενικότερα βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το μαθηματικό έργο. Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή ομαδικά, αλληλεπιδρούν με τον εκπαιδευτικό αλλά και μεταξύ τους, επιλέγουν και αξιοποιούν τα κατάλληλα εργαλεία (χειραπτικά ή ψηφιακά) και αποφασίζουν τον τρόπο δράσης τους. Το τρίτο στάδιο αφορά τη συζήτηση και την μαθηματική επικοινωνία σχετικά με τον τρόπο εργασίας των μαθητών, τις διαφορετικές προσεγγίσεις και στρατηγικές επίλυσης και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν.

Τα μαθηματικά έργα που προτείνονται δίνουν στους μαθητές πολλές δυνατότητες εμπλοκής και ευκαιρίες ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης κατά το δεύτερο και τρίτο στάδιο εφαρμογής τους στη σχολική τάξη. Αφορούν σε καταστάσεις και ερωτήματα που χαρακτηρίζονται από πρωτοτυπία ώστε να εγείρουν το ενδιαφέρον τους. Αποθαρρύνουν την κυριαρχία της απομνημόνευσης και των διαδικασιών ρουτίνας. Αντίθετα, πολύ συχνά περιλαμβάνουν διαφορετικές προσεγγίσεις και στρατηγικές επίλυσης, όπως, για παράδειγμα, την αξιοποίηση διαφορετικών προσεγγίσεων (αλγεβρικής, γραφικής) για την επίλυση μιας ανίσωσης. Σε ορισμένα από αυτά τα έργα είναι δυνατές ακόμα και διαφορετικές λύσεις. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορεί να είναι η προσαρμογή ενός γραμμικού ή μη γραμμικού μοντέλου σε πραγματικά δεδομένα. Σημαντικός αριθμός από τα έργα του ΠΣ αφορούν καταστάσεις και φαινόμενα από την πραγματική ζωή και συνήθως βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα, όπως, για παράδειγμα, τα δεδομένα που προέρχονται από την ΕΛΣΤΑΤ, η κάλυψη επιφανειών με γεωμετρικά σχήματα, η αναζήτηση γεωμετρικών μετασχηματισμών ή μοτίβων σε γνωστά έργα τέχνης με επαναλαμβανόμενα γεωμετρικά σχήματα (π.χ. του Ολλανδού ζωγράφου Escher).

Τα μαθηματικά έργα του ΠΣ είναι επιπλέον επιδιώκουν την ανάπτυξη κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών από τους μαθητές. Προσφέρουν, δηλαδή, ευκαιρίες να αναπτύξουν κριτική επίγνωση για την αξιοποίηση των μαθηματικών στις κοινωνικές, οικονομικές και γενικότερα θετικές επιστήμες αλλά και

να αναγνωρίσουν την αξία των μαθηματικών γενικότερα στο πολιτισμό. Να αναπτύξουν ικανότητες και δεξιότητες μαθηματικού γραμματισμού, δηλαδή να καταστούν ικανοί να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για την ανάλυση, την ερμηνεία και την κριτική θεώρηση του κοινωνικού περιβάλλοντός τους.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που συναντάται, σε ορισμένα τουλάχιστον, από τα μαθηματικά έργα, είναι τα πολλαπλά σημεία 'εισόδου', που αναφέρονται στον κλιμακούμενο βαθμό δυσκολίας των ερωτημάτων ενός έργου και στις διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές στο ίδιο έργο (π.χ. πίνακας τιμών, γράφημα, ψηφιακά εργαλεία, κλπ). Έτσι, οι δραστηριότητες απευθύνονται σε όλους τους μαθητές και ταυτόχρονα τους δίνουν δυνατότητες να επιτύχουν σε μικρό ή μεγάλο βαθμό τους στόχους της μαθηματικής δραστηριότητας.

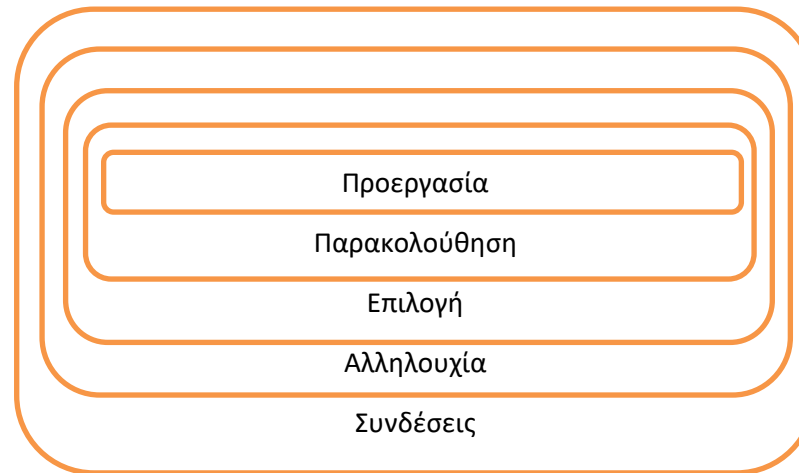
Κατά το τρίτο στάδιο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας οι μαθητές παρουσιάζουν τα ευρήματά τους και επιχειρηματολογούν για την ορθότητά τους, περιγράφουν τις δυσκολίες τους και συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους. Είναι το στάδιο το οποίο ενδεχομένως δεν είναι πολύ ανεπτυγμένο στη σύγχρονη πραγματικότητα της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Επιδίωξη των προτεινόμενων μαθηματικών έργων είναι η ενίσχυση αυτού του πολύ σημαντικού σταδίου ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας. Μια ενδιαφέρουσα και λειτουργική πρόταση οργάνωσης αυτού του σταδίου από τον εκπαιδευτικό κατά τους Stein et al. (2008) περιλαμβάνει τις ακόλουθες φάσεις:

- Προεργασία και πρόβλεψη των πιθανών απαντήσεων των μαθητών, εκ των προτέρων εντοπισμός των δυσκολιών και των ενδεχόμενων παρανοήσεων που μπορούν να προκύψουν κατά την επεξεργασία του έργου. Η καλή προετοιμασία του εκπαιδευτικού σε αυτήν τη φάση θα του επιτρέψει να κάνει τις κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις κατά την υλοποίηση του έργου στην σχολική αίθουσα
- Παρακολούθηση και καταγραφή των απαντήσεων και δυσκολιών κατά τη διάρκεια των δράσεων των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός, καταγράφοντας τη δράση των μαθητών, μπορεί αφενός να τους βοηθήσει ατομικά ή ομαδικά και να παρέχει εξατομικευμένη ή διαφοροποιημένη υποστήριξη και, επιπλέον, να αξιοποιήσει τις απόψεις τους σε επόμενες φάσεις, προτρέποντας κάποιους από τους μαθητές να τις εξηγήσουν στην ολομέλεια της τάξης
- Επιλογή μαθητών για παρουσίαση, εξήγηση και επιχειρηματολογία των απόψεων και δράσεων τους στην τάξη. Η φάση αυτή υποστηρίζει την αλληλεπίδραση των μαθητών με τους συμμαθητές τους στην αντιμετώπιση μαθηματικών έργων και τον σεβασμό παράλληλα των απόψεων των άλλων. Επίσης, οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες επιχειρηματολογίας και μαθαίνουν να επιμένουν στην αντιμετώπιση μαθηματικών καταστάσεων
- Αλληλουχία κατάλληλα επιλεγμένων μαθητών ή ομάδων που θα παρουσιάσουν τις απαντήσεις και τις δράσεις τους. Η συγκεκριμένη σειρά παρουσίασης των δράσεων των μαθητών μεγιστοποιεί το όφελός τους συγκριτικά με την προηγούμενη φάση. Σε αυτή τη φάση ο εκπαιδευτικός έχει αρκετές επιλογές. Ενδεικτικά, μπορεί να επιλέξει αρχικά την παρουσίαση μαθητών με ημιτελείς ή πιο εμπειρικές απαντήσεις και προοδευτικά να κατευθυνθεί σε πιο τυπικές και τεκμηριωμένες απαντήσεις μαθητών. Εναλλακτικά, μπορεί να ξεκινήσει από την παρουσίαση των δράσεων ή της στρατηγικής που ακολουθήθηκε από την πλειοψηφία των μαθητών ή ομάδων και μετά να

παρουσιαστούν εναλλακτικές στρατηγικές, παρανοήσεις που δημιούργησαν εμπόδια στη μαθησιακή διαδικασία ή συνηθισμένα λάθη που δεν επέτρεψαν την επιτυχή ολοκλήρωση της δραστηριότητας.

- Στην τελευταία φάση πραγματοποιούνται συνδέσεις μεταξύ των απαντήσεων και απόψεων που έχουν καταγραφεί ή επεκτάσεις των ιδεών και των στρατηγικών επίλυσης που μπορεί να αφορούν διαφορετικές ή παρόμοιες προσεγγίσεις που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια υλοποίησης της δραστηριότητας. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να σχολιάσουν τις παρουσιάσεις δύο διαφορετικών ομάδων. Ακόμα, στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, που αφορά για παράδειγμα την ομοιότητα τριγώνων, μπορεί να ζητηθεί να σχολιαστεί η σύνδεση που υπάρχει με την ισότητα των τριγώνων, μία έννοια που έχει απασχολήσει τους μαθητές σε προγενέστερο χρόνο. Επίσης, να διατυπωθούν ερωτήματα σε νέες κατευθύνσεις, όπως μια ενδεχόμενη επέκταση της έννοιας της ομοιότητας σε πολύγωνα.

Οι φάσεις οι οποίες αναπτύχθηκαν παραπάνω παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα ως πλαίσια τα οποία επικαλύπτονται διαδοχικά, από την πρώτη έως την τελευταία φάση (Stein et al., 2008).



Σε πολλά έργα του ΠΣ υπάρχει αυτός ο προσανατολισμός στη διδακτική διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας που εκφράζονται με ερωτήματα. Ενδεικτικά αναφέρονται ορισμένα από αυτά:

«Ποιο άλλο γράφημα θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε για να παρουσιάσετε τις τιμές του χρόνου μελέτης των μαθημάτων στο σπίτι, κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας, για τους/τις μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου; Συζητήστε μεταξύ σας πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των δύο αναπαραστάσεων»

«Να γράψετε δύο επιχειρήματα για να υποστηρίξετε την απάντησή σας»

«Συζητήστε στην τάξη για το σημείο στο οποίο ισορροπεί μία τριγωνική ομοιογενής πλάκα. Διατυπώστε με μαθηματικούς όρους την υπόθεσή σας με τη βοήθεια του καθηγητή σας και προσπαθήστε να αποδείξετε την μαθηματική πρόταση που διατυπώσατε»

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός θα περιορίσει τη μαθηματική επικοινωνία και επιχειρηματολογία μόνο στα ερωτήματα που συνοδεύουν τα αντίστοιχα μαθηματικά έργα αλλά μπορεί και προτείνεται να επεκταθεί με ανάλογο τρόπο σε όλες τις φάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται.

Τα μαθηματικά έργα και η μαθηματική δραστηριότητα που πυροδοτούν διαμορφώνουν την 'αρένα' στην οποία αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη κάθε μαθητή και συγκροτείται το συλλογικό μαθηματικό νόημα στην τάξη των μαθηματικών. Συνιστούν, λοιπόν, εξαιρετικά κρίσιμα πεδία δράσης για μαθητές και εκπαιδευτικούς. Τα χαρακτηριστικά τους επιδιώκουν να προσφέρουν δυνατότητες για την δημιουργία ενός σύγχρονου μαθησιακού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο όλοι οι μαθητές θα έχουν δυνατότητες και την ευκαιρίες να εμπλακούν σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Ωστόσο, δεν καλύπτουν όλο το φάσμα των ενδεχόμενων μορφών ούτε όλες τις περιοχές του Προγράμματος Σπουδών, καθώς φιλοδοξούν να αποτελέσουν ενδεικτικές προτάσεις που θα βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό να αναπτύξει την δική του τυπολογία και να διαμορφώσει την δική του διδακτική προσέγγιση στην προτεινόμενη κατεύθυνση. Επομένως, η συμβολή του εκπαιδευτικού είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον μετασχηματισμό της διδασκαλίας προς την κατεύθυνση που προτείνει το Πρόγραμμα Σπουδών.

Αναφορές

Margolinas, C. (Ed.) (2013) Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7. Retrieved July 9, 2021, from <http://www.jstor.org/stable/20749442>

Radford, L. (2016). Mathematics and Mathematics classroom activity through the lens of a metaphor. In M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica/ Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore* (pp. 439-446). Bologna: Pitagora Editrice.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008) Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. D. (2020) Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2).

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). Πρακτικά από το 4ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, 51-66. Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ -Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Watson, A. & Thompson, D. R. (2015) Design Issues Related to Text-Based Tasks. *New ICMI Study Series*, 143–190.