Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

Έστω (X, ρ) και (Y, σ) δύο μετρικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$:

Ορισμός Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Παρατήρηση. Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι η εξής:
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακτίνα $\delta > 0$ ώστε η μπάλα (του X) με κέντρο το x_0 και ακτίνα δ να απεικονίζεται, μέσω της f, μέσα στη μπάλα (του Y) με κέντρο το $f(x_0)$ και ακτίνα ε.

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Ξεκινώντας από την προηγουμενη παρατήρηση οδηγούμαστε στον εξής χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$ μέσω των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων των X και Y.

Πρόταση Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(γ) Αν F είναι κλειστό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του Y. Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αν το $f^{-1}(G)$ είναι κενό τότε το συμπέρασμα ισχύει. Αν όχι, έστω $x \in f^{-1}(G)$. Τότε, $f(x) \in G$ και το G είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(f(x), \varepsilon) \subseteq G$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq G$, δηλαδή $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Συνεπώς, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.

(β) $\Rightarrow$ (α) Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη μπάλα $B = B(f(x), \varepsilon)$. Το B είναι ανοικτό σύνολο, άρα, σύμφωνα με την υπόθεσή μας το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό. Επιπλέον, $x \in f^{-1}(B)$ διότι $f(x) \in B$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$. Ισοδύναμα, $f(B(x, \delta)) \subseteq B = B(f(x), \varepsilon)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Είναι άμεσο από τη σχέση $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$: έστω F κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε, το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Από την υπόθεσή μας, το $f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως, $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$. Αφού το $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

(γ) $\Rightarrow$ (β) Αποδεικνύεται όμοια με την αντίστροφη συνεπαγωγή, με βάση τον δυϊσμό μεταξύ ανοικτών και κλειστών συνόλων.

Στην επόμενη πρόταση δίνουμε και έναν χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$ μέσω της κλειστής θήκης:

Πρόταση Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $A \subseteq X$ και $y \in f(\overline{A})$. Τότε, υπάρχει $x \in \overline{A}$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα $f(x_n) \to f(x) = y$. Όμως, $f(x_n) \in f(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $y \in \overline{f(A)}$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Έστω $K \subseteq Y$ κλειστό και θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\overline{f^{-1}(K)} \subseteq f^{-1}(K).$$

Σύμφωνα με το (β) - με $A = f^{-1}(K)$ - έχουμε:

$$f(\overline{f^{-1}(K)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(K))} \subseteq \overline{K} = K.$$

Ο δεύτερος εγκλεισμός προκύπτει από την $f(f^{-1}(K)) \subseteq K$ που ισχύει για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $K \subseteq Y$.

Έπεται ότι

$$\overline{f^{-1}(K)} \subseteq f^{-1}(K),$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$:*

(α) Τα σύνολα

$$A_1 = \{x \in X |\ f(x) > a\} \quad \textit{και} \ \ A_2 = \{x \in X |\ f(x) < a\}$$

είναι ανοικτά.

(β) Τα σύνολα

$$B_1 = \{x \in X |\ f(x) \geq a\},\ B_2 = \{x \in X |\ f(x) \leq a\} \ \ \textit{και}\ B_3 = \{x \in X |\ f(x) = a\}$$

είναι κλειστά.

Απόδειξη (α) Είναι $A_1 = f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ και $A_2 = f^{-1}\big((\infty, a)\big)$, οπότε είναι ανοικτά ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης f.

(β) Είναι $B_1 = f^{-1}\big([a, +\infty)\big)$, $B_2 = f^{-1}\big((\infty, a]\big)$ και $B_3 = f^{-1}\big(\{a\}\big)$ οπότε είναι κλειστά ως αντίστροφες εικόνες κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης f.

Άσκηση 4.22. *Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x \in X : f(x) < a\}$ και $\{x \in X : f(x) > b\}$ είναι ανοικτά.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση αποδείχθηκε στην προηγούμενη άσκηση.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση,υποθέτουμε ότι, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $f^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \{x \in X : f(x) < a\}$ και $f^{-1}\big((b, +\infty)\big) = \{x \in X : f(x) > b\}$ είναι ανοικτά. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, και θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x_0, \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $a = f(x_0) + \varepsilon$ και $b = f(x_0) - \varepsilon$, έχουμε ότι το σύνολο

$$A = f^{-1}\big((f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)\big) = f^{-1}\big((-\infty, f(x_0)+\varepsilon)\big) \cap f^{-1}\big((f(x_0)-\varepsilon, +\infty)\big)$$

είναι ανοικτό και $x_0 \in A$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq A$.

Άλλη απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η f αντιστρέφει ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ σε ανοικτά υποσύνολα του X.
Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής (a,b) $(a < b \in \mathbb{R})$, έχουμε ότι το $f^{-1}\big((a,b)\big) = f^{-1}\big((a,+\infty)\big) \cap f^{-1}\big((-\infty,b)\big)$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών.
Αν τώρα το $G \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό, τότε το G γράφεται ως ένωση - και μάλιστα αριθμήσιμη - ανοικτών διαστημάτων, δηλαδή $G = \bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$, οπότε το

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\big((a_i,b_i)\big)$$

είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων.

4.1. *Έστω $f,g : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ δυο συνεχείς συναρτήσεις και D πυκνό υποσύνολο του (X,ρ). Δείξτε ότι:*
(α) *Το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.*
(β) *Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, τότε $f \equiv g$.*

Απόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στο E με $x_n \to x \in X$. Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x, έχουμε $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ και $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Όμως, $x_n \in E$ άρα $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Άρα, $x \in E$.

(β) Από το (α), το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό. Από την $D \subseteq E$ έπεται ότι $X = \overline{D} \subseteq E$, δηλαδή $E = X$. Άρα, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

4.2. *Έστω* $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ *και* $x_0 \in X$. *Δείξτε ότι η* f *είναι συνεχής στο* x_0 *αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε αν* $x, y \in X$ *και* $\rho(x, x_0) < \delta$, $\rho(y, x_0) < \delta$ *τότε* $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2$. Τότε, αν τα $x, y \in X$ ικανοποιούν τις $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\rho(y, x_0) < \delta$ έχουμε

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \sigma(f(x), f(x_0)) + \sigma(f(x_0), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\rho(y, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Θέτοντας $y = x_0$ (παρατηρήστε ότι $\rho(x_0, x_0) < \delta$) βλέπουμε ότι αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

3.43. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):*

(α) *Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geqslant 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. (α) Σωστό. Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $D \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, άρα $x_0 \in D$ (ένα πυκνό σύνολο τέμνει κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο).

(β) Σωστό. Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία (y_m) στοιχείων του A που συγκλίνει, το όριό της ανήκει στο A.

Πράγματι: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (y_m) σημείων του A είναι βασική, άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y_m, y_{m_0}) < 1/2$ για κάθε $m \geqslant m_0$. Αφού οι y_m, y_{m_0} είναι όροι της (x_n), αναγκαστικά έχουμε $y_m = y_{m_0}$, δηλαδή η (y_m) είναι τελικά σταθερή και συγκλίνει στο $y_{m_0} \in A$.

3.45. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \in A$ και (x_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,*

$$B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A.$$

Απόδειξη. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

(α) $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και

(β) για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A$.

Έστω $z \in B(x_n, 1/n)$. Τότε,

$$d(z,x) \leqslant d(z,x_n) + d(x_n,x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, $z \in B(x,\varepsilon) \Longrightarrow z \in A$.

3.51. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

(β) *Αν S είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X, τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δυο στοιχείων του S, η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.*

Απόδειξη. (α) Έστω M το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι: αν $x \in M$ τότε υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_x) = \{x\}$. Αφού $B(x,\varepsilon_x) \cap D \neq \emptyset$, έπεται ότι $x \in D$. Δηλαδή, το M είναι υποσύνολο του D. Αφού το D είναι αριθμήσιμο, έπεται ότι το M είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω S υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X. Θεωρούμε τον υπόχωρο (S,ρ_S) του (X,ρ). Αν ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος τότε, όπως έχουμε δει, ο (S,ρ_S) είναι επίσης διαχωρίσιμος. Από το (α) έπεται ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του (S,ρ_S) είναι το πολύ αριθμήσιμο. Άρα, υπάρχει $x \in S$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του (S,ρ_S). Από τον χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο S με όρους διαφορετικούς ανά δύο και διαφορετικούς από το x ώστε $x_n \to x$ με τη ρ_S, δηλαδή $x_n \to x$ με τη ρ.

3.18. *Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα.*

Απόδειξη. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος, ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \ \text{ ή } \ G = \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n),$$

όπου ενδέχεται κάποιο από τα a_n να είναι το $-\infty$ και κάποιο από τα b_n να είναι το $+\infty$. Για κάθε n μπορούμε να βρούμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(a_{n,k})$ ρητών και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(b_{n,k})$ ρητών στο (a_n, b_n) με $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k} = a_n$ και $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n,k} = b_n$ (από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$). Τότε,

$$(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{n,k}, b_{n,k})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$G = \bigcup_{n,k}(a_{n,k}, b_{n,k}),$$

κάθε διάστημα $(a_{n,k}, b_{n,k})$ έχει ρητά άκρα και τα διαστήματα αυτά είναι αριθμήσιμα το πλήθος.

3.19. *Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα (δηλάδή διαφορετικά από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) τα οποία να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ (διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Αφού $A \neq \mathbb{R}$, υπάρχει $x \notin A$.

Το A είναι μη κενό, συνεπώς υπάρχει $y \in A$. Προφανώς $y \neq x$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $y > x$. Ορίζουμε

$$B = \{t \in A : t > x\} = A \cap (x, +\infty).$$

Αφού το A είναι ανοικτό, το B είναι και αυτό ανοικτό (ως τομή δύο ανοικτών). Επίσης το B είναι μη κενό (διότι $y \in B$) και κάτω φραγμένο από το x. Άρα, υπάρχει το $s = \inf B$ και $s \geqslant x$.

Αφού $s = \inf B$, υπάρχει ακολουθία στοιχείων του B που συγκλίνει στο s. Άρα, $s \in \overline{B} \subseteq \overline{A} = A$ διότι το A είναι κλειστό.

Είναι $s \in A$, $x \notin A$ και $s \geqslant x$, άρα $s > x$. Αφού $s \in A$ και $s > x$, παίρνουμε $s = \inf B \in B$.

Όμως το B είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ με $(s - \delta, s + \delta) \subseteq B$, δηλαδή το B περιέχει στοιχεία μικρότερα του $s = \inf B$, άτοπο.

3.20. (α) *Για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *έστω* F_n *κλειστό υποσύνολο του* $(n, n+1)$. *Θέτουμε* $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. *Αποδείξτε ότι το* F *είναι κλειστό στο* $\mathbb{R}$.

(β) *Βρείτε μια ακολουθία ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *της οποίας η ένωση δεν είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότ, αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο F η οποία συγκλίνει σε ένα $x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in F$. Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία (x_n) στοιχείων του F η οποία συγκλίνει. Τότε η (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $-m \leq x_n \leq m$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο σύνολο

$$K = \bigcup_{k=-m}^{m-1} F_k,$$

το οποίο είναι κλειστό ως ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων. Συμπεραίνουμε ότι $x \in K$, δηλαδή $x \in F$, άρα το F είναι κλειστό.

(β) Θέτουμε $F_n = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα F_n είναι κλειστά, ξένα ανά δύο, και

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \left\{ \frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το F δεν είναι κλειστό σύνολο: αφού $\frac{1}{n} \to 0$, έχουμε $0 \in \overline{F}$. Όμως, $0 \notin F$.