Κλειστά σύνολα

Ορισμός. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F λέγεται **ρ-κλειστό** (*closed*) αν το συμπλήρωμά του $F^c \equiv X \setminus F$ είναι ρ-ανοικτό.

Οι βασικές ιδιότητες της κλάσης των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων, τις οποίες υπενθυμίζουμε:

Πρόταση. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Τα $X, \emptyset$ είναι ανοικτά.

(β) Αν $(G_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό.

(γ) Αν τα $G_1, G_2, \dots, G_n$ είναι ανοικτά τότε το $\bigcap_{i=1}^n G_i = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

Για την κλάση των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου έχουμε:

Πρόταση. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Τα $X, \emptyset$ είναι κλειστά.

(β) Αν $F_1, F_2, \dots, F_n$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^n F_i$ είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Αν $(E_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η τομή τους $\bigcap_{i\in I} E_i$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. Τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από τους τύπους του De Morgan

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

και από τον ορισμό του κλειστού συνόλου ως συμπληρώματος ανοικτού συνόλου.

Παρατήρηση. Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια κλειστών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο, τότε η ένωσή τους δεν είναι κατ' ανάγκην κλειστό σύνολο. Πράγματι, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε την ακολουθία κλειστών διαστημάτων $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 2, 3, \ldots$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ και το $(0, 1]$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Όπως έχουμε δει, μια άπειρη τομή ανοικτών συνόλων μπορεί να μην είναι ανποκτό σύνολο και, αντίστοιχα, μια άπειρη ένωση κλειστών συνόλων μπορεί να μην είναι κλειστό σύνολο. Ακόμα περισσότερο, είναι εύκολο να δούμε ότι *κάθε* υποσύνολο ενός μετρικού χώρου γράφεται ως ένωση (ενδεχομένως άπειρου πλήθους) κλειστών συνόλων.

Πράγματι: Έχουμε δει ότι τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα. Αν τώρα $A \subseteq X$, μπορούμε να γράψουμε

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\},$$

δηλαδή το A είναι μια ένωση κλειστών συνόλων.

Έπεται ότι κάθε υποσύνολο ενός μετρικού χώρου γράφεται και ως τομή (ενδεχομένως άπειρου πλήθους) ανοικτών συνόλων (Άσκηση).

Ειδικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι κλάσεις των συνόλων G_δ και F_σ σε έναν μετρικό χώρο.

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.
(α) Το A λέγεται σύνολο G_δ αν γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X.
(β) Το A λέγεται σύνολο F_σ αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του X.

Παραδείγματα

(α) Κάθε κλειστό σύνολο είναι προφανώς F_σ. Είναι όμως και G_δ.
Πράγματι: Έστω F ένα κλειστό μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$U_n = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right) = \left\{y \in X \;:\; \exists x \in F \;\text{ με }\; d(y, x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Κάθε U_n είναι ανοικτό σύνολο και ισχύει

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

(Ολοκληρώστε την απόδειξη.)

(β) Κάθε ανοικτό σύνολο είναι προφανώς G_δ. Είναι όμως και F_σ (Άσκηση).

(γ) Ένα σύνολο A είναι G_δ αν και μόνον αν το A^c είναι F_σ.

(δ) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ το διάστημα $(a, b]$ είναι F_σ και G_δ. Πράγματι, αν επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $a + \frac{1}{k} < b$, έχουμε

$$(a, b] = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και F,G υποσύνολα του X. Αν το F είναι κλειστό και το G είναι ανοικτό, δείξτε ότι το $F \setminus G$ είναι κλειστό και το $G \setminus F$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Γράφουμε $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$. Αφού το G είναι ανοικτό, το $X \setminus G$ είναι κλειστό. Τότε, το $F \cap (X \setminus G)$ είναι κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων.

Όμοια, γράφουμε $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$. Αφού το F είναι κλειστό, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Τότε, το $G \cap (X \setminus F)$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων.

Άσκηση 3.2. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του X γράφεται ως τομή ανοικτών υποσυνόλων του (X,ρ).*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε $B \subseteq X$ γράφεται ως ένωση κλειστών συνόλων, γράφοντας

$$B = \bigcup_{x \in B} \{x\}.$$

[Τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα σε κάθε μετρικό χώρο]. Έστω τώρα $A \subseteq X$. Θέτοντας $B = X \setminus A$ έχουμε

$$X \setminus A = \bigcup_{i \in I} F_i$$

όπου $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε,

$$A = (X \setminus A)^c = \bigcap_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcap_{i \in I} G_i,$$

όπου κάθε $G_i = X \setminus F_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Τελικά δηλαδή το A γράφεται ως

$$A = \bigcap_{x \in A^c} (X \setminus \{x\}).$$

Άσκηση 3.3. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το*

$$G=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το

$$F=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $x\in G$. Τότε, $f(x)>0$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon=f(x)/2>0$ βρίσκουμε $\delta>0$ ώστε: αν $y\in(x-\delta,x+\delta)$ τότε $f(y)>f(x)/2>0$. Συνεπώς, $B(x,\delta)\subseteq G$. Έπεται ότι το G είναι ανοικτό.

Έστω (x_n) ακολουθία στο F με $x_n\to x\in\mathbb{R}$. Έχουμε $f(x_n)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και η f είναι συνεχής στο x. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. Συνεπώς, $x\in F$. Έπεται ότι το F είναι κλειστό.

Άσκηση 3.4. *Δείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων και κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.*

Απόδειξη. Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)\quad\text{και}\quad(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{b-a}{3n},b-\frac{b-a}{3n}\right].$$

Για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $[a,b]\subseteq\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)$, άρα

$$[a,b]\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right).$$

Αντίστροφα, αν $x\notin[a,b]$, τότε είτε $x<a$, οπότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ με $x\leq a-\frac{1}{n}$ είτε $x>b$, οπότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ με $x\geq b+\frac{1}{n}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right).\quad\text{Άρα}\quad\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)\subseteq[a,b].$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα.

Άσκηση 3.5. *Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ). Για κάθε $j = 1, \ldots, m$, το μονοσύνολο $\{x_j\}$ είναι κλειστό σύνολο. Γράφουμε

$$F = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_m\}.$$

Αφού η ένωση πεπερασμένων το πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι το F είναι κλειστό.

3.6. *Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό σύνολο. Μπορεί σε έναν μετρικό χώρο μια σφαίρα να είναι το κενό σύνολο;*

Απόδειξη. 1ος τρόπος. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Δείχνουμε ότι η $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο αποδεικνύοντας το εξής: αν $x_n \in S(x_0, \varepsilon)$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε $x \in S(x_0, \varepsilon)$. Πράγματι, $\rho(x_0, x_n) = \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$|\rho(x_0, x) - \rho(x_0, x_n)| \leqslant \rho(x, x_n) \to 0,$$

άρα $\rho(x_0, x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = \varepsilon$. Συνεπώς, $x \in S(x_0, \varepsilon)$.

2ος τρόπος. Χρησιμοποιούμε την Άσκηση 3.1. Είναι

$$S(x_0, \varepsilon) = \widehat{B}(x_0, \varepsilon) \setminus B(x_0, \varepsilon)$$

και, όπως ξέρουμε, το $\widehat{B}(x_0, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο, ενώ το $B(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό.

Υπάρχει περίπτωση μια σφαίρα $S(x_0, \varepsilon)$, σε κάποιον μετρικό χώρο, να είναι το κενό σύνολο. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ τότε, για κάθε $x_0 \in X$, ισχύει $S(x_0, 2) = \emptyset$.

Υπόχωροι μετρικών χώρων
Σχετικώς ανοικτά και κλειστά σύνολα

1. Σχετικώς ανοικτά σύνολα

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της σχετικής μετρικής:
αν A είναι μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ), η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$, $x, y \in A$ είναι μετρική στο A.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τα ανοικτά σύνολα του (A, ρ_A).

Πρόταση. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.
Το $G \subseteq A$ είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο (A, ρ_A) αν και μόνον αν υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $G = A \cap V$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι μια μπάλα σε έναν μετρικό υπόχωρο είναι μια μπάλα που έχει κέντρο σημείο του υποχώρου και περιέχει μόνο σημεία του υποχώρου, οπότε είναι η τομή της αντίστοιχης μπάλας του μεγάλου χώρου με τον υπόχωρο, δηλαδή

$$B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) = B_\rho(x, \varepsilon_x) \cap A.$$

Έτσι, αν $G \subseteq A$ και το G είναι ανοικτό στο μετρικό υπόχωρο (A, ρ_A), τότε γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$G = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) = \bigcup_{x \in G} \left(B_\rho(x, \varepsilon_x) \cap A\right) = A \cap \left(\bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)\right).$$

Θέτοντας $V = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)$ έχουμε ότι το G γράφεται στη μορφή $A \cap V$, όπου V είναι ανοικτό υποσύνολο του X (αφού είναι ένωση από ανοικτές μπάλες του X).

Αντίστροφα, έστω V ανοικτό υποσύνολο του X και $G = A \cap V$. Τότε, για κάθε $x \in G$ ισχύει $x \in V$ άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$. Έπεται ότι $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) = A \cap B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A \cap V$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του G ως προς την μετρική ρ_A. Άρα, το G είναι ανοικτό στο μετρικό υπόχωρο (A, ρ_A).

2. Σχετικώς κλειστά σύνολα

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει τα κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού υποχώρου.

Πρόταση. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω (A,ρ_A) μετρικός υπόχωρός του. Το $F\subseteq A$ είναι κλειστό στο μετρικό χώρο (A,ρ_A) αν και μόνον αν $F=A\cap E$ όπου E κλειστό στον (X,ρ).

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το $F\subseteq A$ είναι κλειστό στο A. Τότε το συμπλήρωμά του στο A είναι ανοικτό, δηλαδή το $A\setminus F=A\cap F^c$ είναι ανοικτό στο A, οπότε υπάρχει G ανοικτό στον X με

$$A\cap F^c=A\cap G.$$

Ισχυρισμός. $F=A\cap G^c$.

Πράγματι: Το A γράφεται ως ξένη ένωση

$$A=F\cup\big(A\cap F^c\big)=F\cup\big(A\cap G\big),$$

αλλά και

$$A=\big(A\cap G^c\big)\cup\big(A\cap G\big),$$

πάλι ως ξένη ένωση. Έπεται ότι $F=A\cap G^c$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $F=A\cap E$ όπου E κλειστό στον (X,ρ). Τότε

$$A\setminus F=A\setminus E=A\cap E^c,$$

όπου το E^c είναι ανοικτό στον X. Έπεται ότι το $A\setminus F$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή το F είναι κλειστό στο A.

Παραδείγματα

1. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε το σύνολο $A=(0,1]\cup\{2\}$. Τότε τα $(0,1],\{2\}$ είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο A.

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3,\|\cdot\|)$ θεωρούμε ως υπόχωρο το xy-επίπεδο H (δηλαδή στοιχεία της μορφής $(x,y,0)$).

(α) Ο ανοικτός δίσκος U του xy-επιπέδου ($U=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1\}$) είναι ανοικτό υποσύνολο του H, αλλά όχι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

(β) Ο κλειστός δίσκος D του xy-επιπέδου ($D=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 1\}$) είναι κλειστό σύνολο στον H. Μάλιστα, κάθε υποσύνολο F του H είναι κλειστό στον H αν και μόνον αν είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$.

Το τελευταίο γενικεύεται για κάθε μετρικο χώρο X: Αν το $H\subseteq X$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε για κάθε $F\subseteq H$ ισχύει:

Το F είναι κλειστό στον H αν και μόνο αν το F είναι κλειστό στον X.

Εσωτερικό και κλειστή θήκη

Εσωτερικό συνόλου

Ορισμός Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ). Το **εσωτερικό** (*interior*) του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A και συμβολίζεται με $\mathrm{int}A$ (ή A°). Δηλαδή,

$$A^\circ \equiv \mathrm{int}A = \{x \in A \mid \exists\, \varepsilon > 0 \ : \ B(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Παρατήρηση Για κάθε $A \subseteq X$ το εσωτερικό A° του A είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, έστω $x \in A^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Αν $y \in B(x, \varepsilon)$ τότε, θέτοντας $\delta = \varepsilon - \rho(x, y) > 0$ έχουμε $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Συνεπώς, κάθε $y \in B(x, \varepsilon)$ είναι εσωτερικό σημείο του A. Δηλαδή, $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$. Άρα, το x είναι εσωτερικό σημείο του A°.

Επιπλέον, το A° είναι *το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο* A, δηλαδή, αν G ανοιχτό με $G \subseteq A$, τότε $G \subseteq A^\circ$.

Πράγματι: Αν $x \in G$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(x, \varepsilon) \subseteq G \subseteq A$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A, οπότε $x \in A^\circ$.

Παραδείγματα

1. Το εσωτερικό του $(a, b]$ στο $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική είναι το (a, b).

2. Το εσωτερικό του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$.

3. Το εσωτερικό ενός ανοικτού υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου είναι το ίδιο το σύνολο.

Οι βασικές ιδιότητες του εσωτερικού περιγράφονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση. Έστω A, B υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ). Τότε, ισχύουν τα εξής:

(α) $A^\circ \subseteq A$.

Απόδειξη. Είναι άμεσο από τον ορισμό.

(β) $A^\circ = \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}$.

Απόδειξη. Είδαμε ότι αν $V \subseteq A$ και το V είναι ανοικτό, τότε $V \subseteq A^\circ$. Άρα

$$\bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\} \subseteq A^\circ.$$

Αντίστροφα, αφού το A° είναι ανοικτό και περιέχεται στο A, είναι ένα από τα V που εμφανίζονται στην ένωση, οπότε

$$A^\circ = \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}.$$

(γ) $A^\circ = A$ αν και μόνον αν το A είναι ανοικτό.

Απόδειξη. Αφού το A° είναι ανοικτό, αν ισχύει $A^\circ = A$, τότε το A είναι ανοικτό.

Αντίστροφα, αν το A είναι ανοικτό, τότε κάθε σημείο του είναι εσωτερικό του σημείο, άρα $A = A^\circ$.

(δ) Αν $A \subseteq B$, τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq B$ και έστω $x \in A^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$. Από τον ορισμό του εσωτερικού σημείου έχουμε ότι $x \in B^\circ$.

(ε) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Απόδειξη. Είναι $A \cap B \subseteq A$, άρα $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ από το (δ). Ομοίως, έχουμε ότι $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Συνεπώς,

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ.$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι το $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ είναι ένα ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $A \cap B$, άρα περιέχεται στο $(A \cap B)^\circ$ - αφού το τελευταίο είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $A \cap B$.

(στ) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Απόδειξη. Ισχύει $A \subseteq A \cup B$, άρα $A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Ομοίως, παίρνουμε $B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, οπότε έχουμε $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Παρατήρηση. Ο τελευταίος εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική για $A = [0, 1]$ και $B = (1, 2)$ έχουμε $A^\circ \cup B^\circ = (0, 1) \cup (1, 2)$ ενώ, $(A \cup B)^\circ = (0, 2)$.

Άλλο παράδειγμα μας δίνουν τα $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στον ίδιο χώρο. Έχουμε $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $A \cup B = \mathbb{R}$. Συνεπώς, $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$, ενώ $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

Κλειστή θήκη συνόλου

Ορισμός 1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Το $x\in X$ λέγεται *σημείο επαφής* (*contact point*) του A αν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $A\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset$ (δηλαδή αν κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει στοιχεία του A).

Παρατήρηση Παρατηρούμε ότι το $x\in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n\xrightarrow{\rho}x$.

Παραδείγματα

1. Στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A=(0,1]$. Το σημείο 0 είναι σημείο επαφής του A.

2. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε $x_n\xrightarrow{\rho}x$, τότε το x είναι σημείο επαφής του συνόλου $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$.

3. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική δ. Αν $A\subseteq(X,\delta)$, τότε ένα $x\in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν $x\in A$.

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Η **κλειστή θήκη** (*closure*) $\overline{A}$ (ή $\mathrm{cl}(A)$) του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του. Δηλαδή,

$$\overline{A}\equiv\mathrm{cl}(A)=\{x\in X:\forall\,\varepsilon>0, A\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset\}.$$

Παρατήρηση Για κάθε $A\subseteq X$ η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία στο $\overline{A}$ με $x_n\xrightarrow{\rho}x$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $a_n\in A$ ώστε $\rho(a_n,x_n)<\frac{1}{n}$, διότι κάθε x_n είναι σημείο επαφής του A. Τότε,

$$\rho(a_n,x)\leqslant\rho(a_n,x_n)+\rho(x_n,x)<\frac{1}{n}+\rho(x_n,x)\to 0,$$

δηλαδή $a_n\xrightarrow{\rho}x$. Η (a_n) είναι ακολουθία στο A και $a_n\xrightarrow{\rho}x$. Συνεπώς, $x\in\overline{A}$.

Επιπλέον, η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι *το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το* A, δηλαδή αν $F \subseteq X$ κλειστό και $A \subseteq F$, τότε $\overline{A} \subseteq F$.

Πράγματι: Αν $x \in \overline{A}$ τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Τότε, $x_n \in F$ και αφού το F είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$. Δηλαδή, $\overline{A} \subseteq F$.

Παραδείγματα

1. Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν οι σχέσεις $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2. Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε $\mathrm{cl}\,(a,b) = \mathrm{cl}\,(a,b] = \mathrm{cl}\,[a,b) = [a,b]$.

3. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική δ. Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A} = A$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες της κλειστής θήκης.

Πρόταση Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(α) $A \subseteq \overline{A}$.

Απόδειξη. Προφανές από τον ορισμό της κλειστής θήκης. Κάθε σημείο του A είναι σημείο επαφής του A.

(β) $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\}$.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό και $A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς,

$$\bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\} \subseteq \overline{A}.$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι κάθε σύνολο F που εμφανίζεται στην τομή του δεξιού μέλους είναι κλειστό και περιέχει το A, άρα, όπως έχουμε δει, περιέχει και το $\overline{A}$. Έπεται ότι

$$\overline{A} \subseteq \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\}.$$

(γ) $A = \overline{A}$ αν και μόνον αν το A είναι κλειστό.

Απόδειξη. Αν $A = \overline{A}$ τότε το A είναι κλειστό διότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό τότε, αφού το A περιέχει τον εαυτό του, είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο που περιέχει το A, άρα $A = \overline{A}$.

(δ) Αν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Απόδειξη. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, δηλαδή $A \subseteq \overline{B}$. Το $\overline{B}$ είναι ένα κλειστό σύνολο που περιέχει το A, άρα περιέχει και το ελάχιστο κλειστό που περιέχει το Α, δηλαδή την κλειστή θήκη του A. Έτσι, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(ε) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το (δ) και τους εγκλεισμούς $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ βλέπουμε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, άρα

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Επιπλέον, είναι $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ άρα

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Αφού το $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό σύνολο, από την ιδιότητα ότι το $\overline{A \cup B}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $A \cup B$, προκύπτει ότι

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη. Ισχύει $A \cap B \subseteq A$, οπότε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$.
Ομοίως, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$, άρα $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Παρατήρηση Ο εγκλεισμός στην τελευταία σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχουμε $\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c} = \emptyset$ ενώ, $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

Η επόμενη Πρόταση δίνει μια πολύ χρήσιμη σχέση δυϊσμού μεταξύ της κλειστής θήκης και του εσωτερικού:

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(α) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(β) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ισοδύναμα, $x \in \overline{A}$.

2. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Ισοδύναμα, $x \in (X \setminus A)^\circ$.

Αυτό αποδεικνύει ότι τα σύνολα $\overline{A}$ και $(X \setminus A)^\circ$ είναι ξένα και έχουν ως ένωση το X. Έπεται ότι $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(β) Εφαρμόζοντας την προηγούμενη ισότητα με το $X \setminus A$ στη θέση του A, παίρνουμε

$$X \setminus \overline{X \setminus A} = (X \setminus (X \setminus A))^\circ = A^\circ.$$

Παίρνοντας συμπληρώματα βλέπουμε ότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

Ασκήσεις

3.7. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εξετάστε, αν ισχύει πάντοτε η ισότητα*

$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Απόδειξη. Ισχύει πάντοτε ο εγκλεισμός

$$\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Πράγματι, αφού το σύνολο $\widehat{B}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό και περιέχει το $B(x,\varepsilon)$, ισχύει $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon)$ - γιατί η $\overline{B(x,\varepsilon)}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $B(x,\varepsilon)$.

Δεν ισχύει πάντοτε ισότητα: αν θεωρήσουμε ένα σύνολο X που έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τη διακριτή μετρική δ, τότε, για κάθε $x \in X$, έχουμε $B(x,1) = \{x\}$ άρα $\overline{B(x,1)} = \{x\}$, ενώ $\widehat{B}(x,1) = X$ (και $X \neq \{x\}$ από την υπόθεση για το πλήθος των στοιχείων του X).

3.10. *Έστω A, B δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,d). Αποδείξτε ότι:*
(α) *Αν $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.*
(β) *Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.*

Απόδειξη. (α) Δείχνουμε ότι: αν $x \in X$ και $x \notin \overline{A}$ τότε $x \in B^\circ$: αφού $x \notin \overline{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Όμως, από την υπόθεση ότι $A \cup B = X$ έχουμε $X \setminus A \subseteq B$. 'ρα, $B(x,\varepsilon) \subseteq B$ και αυτό δείχνει ότι $x \in B^\circ$.

Δείξαμε ότι $X \setminus \overline{A} \subseteq B^\circ$. Άρα, $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

(β) Έστω $x \in \overline{A} \cap B^\circ$. Αφού $x \in B^\circ$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq B$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει $y \in A$ το οποίο ανήκει στην $B(x,\varepsilon) \subseteq B$. Τότε, $y \in A \cap B$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $A \cap B = \emptyset$ από την υπόθεση.

Συμπεραίνουμε ότι $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.

3.12. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$. Ισχύει το αντίστοιχο για το εσωτερικό του A;*

Απόδειξη. Από την $A \subseteq \overline{A}$ και τον ορισμό της διαμέτρου έπεται άμεσα ότι $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(\overline{A})$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, υποθέτουμε ότι $\mathrm{diam}(A) < +\infty$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in \overline{A}$. Υπάρχουν $z, w \in A$ ώστε $\rho(z,x) < \varepsilon$ και $\rho(y,w) < \varepsilon$. Τότε,

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y) < \varepsilon + \mathrm{diam}(A) + \varepsilon.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in \overline{A}\} \leqslant \mathrm{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leqslant \mathrm{diam}(A)$.

Συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$.

Δεν είναι γενικά σωστό ότι $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(A^\circ)$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $A = (0,1) \cup \{2\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε $\mathrm{diam}(A) = 2$ και $A^\circ = (0,1)$, άρα $\mathrm{diam}(A^\circ) = 1$. Φυσικά, ισχύει πάντα η ανισότητα $\mathrm{diam}(A) \geqslant \mathrm{diam}(A^\circ)$ διότι $A^\circ \subseteq A$.