Μετρικοί χώροι - Παραδείγματα

Χώροι με νόρμα πεπερασμένης διάστασης (συνέχεια)

Στον $\mathbb{R}^m$, για οποιοδήποτε p με $1 < p < \infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε την p-**νόρμα**, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Αποδεικνύουμε και σε αυτή την περίπτωση μόνο την τριγωνική ανισότητα η οποία δεν είναι άμεση. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο ενδιάμεσες ανισότητες.

Αν $p, q > 1$ με

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

τότε οι p και q λέγονται *συζυγείς εκθέτες*.
Για τους συζυγείς εκθέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$p + q = pq \ \ , \ \ q = p(q-1) \ \text{ και } \ p = q(p-1).$$

Πρόταση (Ανισότητα Hölder)

Αν $x_1, \dots, x_m$ και $y_1, \dots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και οι $p, q > 1$ είναι συζυγείς εκθέτες (δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), τότε ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα (Ανισότητα Young)

Αν $x, y \geq 0$ και οι $p, q > 1$ είναι συζυγείς εκθέτες, τότε ισχύει η ανισότητα

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ (I διάστημα) λέγεται κοίλη αν, για κάθε $x, y \in I$ και $0 \leqslant \lambda \leq 1$, ισχύει

$$f\big((\lambda x + (1 - \lambda y)\big) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Επιπλέον, αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'' < 0$, τότε η f είναι κοίλη.

Από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, για κάθε $x, y > 0$ έχουμε

$$\log\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\log(x^p) + \frac{1}{q}\log(y^q)$$

ή ισοδύναμα

$$\log x + \log y \leqslant \log\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right),$$

δηλαδή

$$\log(xy) \leqslant \log\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right).$$

Από το γεγονός ότι η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα έπεται ότι

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{για κάθε } x, y \geqslant 0.$$

Απόδειξη της ανισότητας Hölder
Έστω τώρα $x_1, \dots, x_m$ και $y_1, \dots, y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=1}^m |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι
$(|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p} \neq 0$ και $(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q} \neq 0$.
Αλλιώς ισχύει $x_1 = \cdots = x_m = 0$ ή $y_1 = \cdots = y_m = 0$ και αυτό σημαίνει ότι $\sum_{i=1}^m |x_i y_i| = 0$, οπότε η ζητούμενη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.
Θέτουμε

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p} \ \text{ και } \ \|y\|_q = (|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q}$$

και θεωρούμε τους αριθμούς

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad \text{και} \quad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i = 1, \dots, m$$

για τους οποίους ισχύει $a_i, b_i \geqslant 0$ και

$$\sum_{i=1}^m a_i^p = \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^m |x_i|^p = 1$$

και

$$\sum_{i=1}^m b_i^q = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^m |y_i|^q = 1.$$

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε την ανισότητα Young για κάθε ζεύγος a_i, b_i έχουμε ότι

$$a_i b_i \leqslant \frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q}$$

και αθροίζοντας ως προς $i = 1, \dots, m$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m a_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^m b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leqslant 1,$$

δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q,$$

που δίνει το ζητούμενο:

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Παρατήρηση

Η ανισότητα Hölder αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Cauchy–Schwarz: η δεύτερη είναι ειδική περίπτωση της πρώτης για $p = q = 2$.

Προχωράμε στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την p-νόρμα που λέγεται ανισότητα Minkowski.

Πρόταση (Ανισότητα Minkowski)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p > 1$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Έχουμε διαδοχικά

$(\star)$

$$\sum_{i=1}^m |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^m |x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \leqslant \sum_{i=1}^m |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^m |x_i+y_i|^{p-1}|y_i|.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder στο άθροισμα $\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1}|x_i|$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}$$

όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ή $q(p-1) = p$. Άρα, η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Τελικά, από την $(\star)$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

ή
$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i+y_i|^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{1/p}.$$
Το ζητούμενο προκύπτει από την $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.

Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι, για κάθε $p>1$, η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με
$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}$$
ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Επιπλέον, άμεσα βλέπουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι μη αρνητική και θετικά ομογενής, επομένως είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Παρατηρήσεις

1. Παρατηρούμε ότι η 1-νόρμα $\|x\| = \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^m |x_i|$ στον $\mathbb{R}^m$ έχει την ίδια μορφή με τις p-νόρμες (για $p=1$), επομένως μπορούμε να τη θεωρούμε ως μια ειδική περίπτωση p-νόρμας.

2. Για δεδομένο $\vec{x}=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, ισχύει
$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} = \max_{1\le i\le m}|x_i| = \|x\|_\infty.$$
(Απόδειξη: Άσκηση) Αυτή η ιδιότητα δικαιολογεί και τον συμβολισμό για την $\|\cdot\|_\infty$-νόρμα.

3. Όπως είπαμε, κάθε γραμμικός χώρος με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$, είναι και μετρικός χώρος με μετρική την $d: X\times X\to\mathbb{R}$, με $d(x,y)=\|x-y\|$.

Έτσι, για κάθε $m=1,2,\dots$ και για κάθε p με $1\le p\le\infty$, έχουμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^m, d_p)$, όπου $d_p(x,y)=\|x-y\|_p$, δηλαδη
$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^m |x_i-y_i|^p\right)^{1/p}, \quad \text{αν } 1\leqslant p<\infty$$
και
$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i-y_i| : i=1,\dots,m\}.$$
Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, θα συμβολίζουμε με $(\mathbb{R}^m,\|\cdot\|_p)$ το μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^m,d_p)$.

Ασκήσεις

1.2. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) $|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y)$ *για κάθε* $x,y,z \in X$.

(β) $|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,w)$ *για κάθε* $x,y,z,w \in X$.

Απόδειξη. (α) Έστω $x,y,z \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής έχουμε

$$\begin{aligned} \rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z)-\rho(y,z) \leqslant \rho(x,y), \\ \rho(y,z) \leqslant \rho(y,x)+\rho(x,z) \Rightarrow \rho(y,z)-\rho(x,z) \leqslant \rho(y,x). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε

$$|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y).$$

(β) Αν $x,y,z,w \in X$, από την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \leqslant |\rho(x,y)-\rho(z,y)|+|\rho(z,y)-\rho(z,w)|$$

Όμως, από το (α) ισχύει

$$|\rho(x,y)-\rho(z,y)|+|\rho(z,y)-\rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,w).$$

Κατασκευή νέων μετρικών από παλιές

1.4. *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις*

$$(α)\ \rho_1 = \min\{d, 1\}, \quad (β)\ \rho_2 = \frac{d}{1+d} \quad και\ (γ)\ d_\alpha = d^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

είναι μετρικές στο X.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Οι άλλες ιδιότητες ελέγχονται άμεσα.

(α) Έστω $x, y, z \in X$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\rho_1(x,z) \leqslant \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z). \tag{1}$$

Αφού $\rho_1(x,z) \leqslant 1$, αν είτε $\rho_1(x,y) = 1$ είτε $\rho_1(y,z) = 1$, τότε η (1) ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\rho_1(x,y) = d(x,y)$ και $\rho_1(y,z) = d(y,z)$. Τότε έχουμε

$$\rho_1(x,z) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) = \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z),$$

δηλαδή και πάλι ισχύει η (1).

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(t) = \frac{t}{1+t}$ και παρατηρούμε ότι ισχύει $\rho_2 = f \circ d$, δηλαδή $\rho_2(x,y) = f(d(x,y))$. Παρατηρούμε επιπλέον ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα, αφού ισχύει $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$.
Έστω τώρα $x, y, z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, άρα

$$\rho_2(x,z) = f\big(d(x,z)\big) \leq f\big(d(x,y) + d(y,z)\big) = \frac{d(x,y) + d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)},$$

αφού η f είναι αύξουσα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\frac{d(x,y) + d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} \leqslant \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(y,z)}. \tag{2}$$

Το τελευταίο ισχύει γιατί

$$\frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leqslant \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s}$$

για κάθε $t, s \geqslant 0$, δηλαδή $f(t+s) \leq f(t) + f(s)$, για κάθε $t, s \geq 0$.

Συνοψίζοντας την απόδειξη του (β), παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα (Άσκηση 9α):

Παρατήρηση 1 *Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(t) > 0$ για κάθε $t > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι υποπροσθετική, δηλ.*

$$f(t+s) \leqslant f(t) + f(s), \quad \text{για κάθε } t, s \geqslant 0.$$

Τότε ισχύει ότι: αν η d είναι μετρική στο X, τότε και η $f \circ d$ είναι μετρική στο X.

Απόδειξη. (α) Από την υπόθεση έχουμε $f(t) \geqslant 0$ για κάθε $t \geqslant 0$ και $f(t) = 0$ αν και μόνο αν $t = 0$. Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in X$, $(f \circ d)(x,y) = f(d(x,y)) \geqslant 0$ και ισχύει ισότητα αν και μόνο αν $d(x,y) = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$ (διότι η d είναι μετρική).

Η συμμετρική ιδιότητα είναι προφανής: για κάθε $x, y \in X$,

$$(f \circ d)(y,x) = f(d(y,x)) = f(d(x,y)) = (f \circ d)(x,y)$$

όπου η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι $d(y,x) = d(x,y)$.

Για την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για την d, την υπόθεση ότι η f είναι αύξουσα και την υπόθεση ότι η f είναι υποπροσθετική: για κάθε $x, y, z \in X$ έχουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned}(f \circ d)(x,z) &= f(d(x,z)) \leqslant f(d(x,y) + d(y,z)) \\ &\leqslant f(d(x,y)) + f(d(y,z)) = (f \circ d)(x,y) + (f \circ d)(y,z).\end{aligned}$$

Θα εφαρμόσουμε την Παρατήρηση 1 για να αποδείξουμε το (γ), δηλαδή ότι η συνάρτηση $d_\alpha = d^\alpha$ είναι μετρική στο X.

(γ) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1, αρκεί να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση $f(t) = t^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$, είναι γνησίως αύξουσα και υποπροσθετική. Το πρώτο αποδεικνύεται άμεσα. Για το δεύτερο θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(t+s)^\alpha \leq t^\alpha + s^\alpha.$$

Αυτό μπορούμε να το δείξουμε σταθεροποιώντας το $s \geq 0$ και μελετώντας τη συνάρτηση $G : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(t) = t^\alpha + s^\alpha - (t+s)^\alpha.$$

Παρατήρηση 2 (Άσκηση 9β) *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ συνάρτηση. Αν η συνάρτηση $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$, $t > 0$ είναι φθίνουσα, τότε η f είναι υποπροσθετική.*

Απόδειξη: Έστω $t, s \geqslant 0$. Θα δείξουμε ότι $f(t+s) \leqslant f(t) + f(s)$.
Αν $t = 0$ ή $s = 0$, η ανισότητα ελέγχεται εύκολα (χρησιμοποιήστε και το γεγονός ότι $f(0) \geqslant 0$). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $t > 0$ και $s > 0$. Τότε, $t + s > t$ και $t + s > s$, άρα

$$\frac{f(t+s)}{t+s} \leqslant \frac{f(t)}{t} \quad \text{και} \quad \frac{f(t+s)}{t+s} \leqslant \frac{f(s)}{s}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{t}{t+s} f(t+s) \leqslant f(t) \quad \text{και} \quad \frac{s}{t+s} f(t+s) \leqslant f(s).$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες και παρατηρώντας ότι $\frac{t}{t+s} + \frac{s}{t+s} = 1$ βλέπουμε ότι

$$f(t+s) \leqslant f(t) + f(s).$$

Εφαρμογή: Χρησιμοποιώντας την τελευταία παρατήρηση, αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(t) = \frac{t}{1+t}$ και $g(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι υποπροσθετικές.

1.5. *Αν d_1, d_2 είναι μετρικές στο σύνολο X εξετάστε αν οι $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Αν η d είναι μετρική στο X, είναι η d^2 μετρική στο X;*

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι $d_1 + d_2$ και $\max\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Ας δούμε μόνο την τριγωνική ανισότητα για την $\rho = \max\{d_1, d_2\}$: έστω $x, y, z \in X$. Έχουμε $\rho(x, z) = d_1(x, z)$ ή $\rho(x, z) = d_2(x, z)$. Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε

$$\rho(x, z) = d_1(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

ενώ στη δεύτερη,

$$\rho(x, z) = d_2(x, z) \leqslant d_2(x, y) + d_2(y, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Η $d = \min\{d_1, d_2\}$ δεν είναι απαραίτητα μετρική. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: στο $[0, \infty)$ θεωρούμε τις μετρικές $d_1(x, y) = |x - y|$ και $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$ (η d_2 είναι η μετρική d_f που επάγει στο $[0, \infty)$ η 1-1 συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^2$). Θα δείξουμε ότι η τριγωνική ανισότητα δεν ικανοποιείται από την τριάδα $0, \frac{1}{2}, 2$: έχουμε

$$\begin{aligned} d(0, 1/2) &= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}, \\ d(1/2, 2) &= \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right\} = \frac{3}{2}, \\ d(0, 2) &= \min\{2, 4\} = 2, \end{aligned}$$

άρα

$$d(0, 2) = 2 > \frac{7}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = d(0, 1/2) + d(1/2, 2).$$

Αν η d είναι μετρική στο X, τότε η d^2 δεν είναι απαραίτητα μετρική στο X. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνήθης μετρική $d(x, y) = |x - y|$ στο $\mathbb{R}$. Αν η d^2 ήταν μετρική θα έπρεπε, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ανισότητα

$$(x - z)^2 \leqslant (x - y)^2 + (y - z)^2.$$

Δοκιμάστε την τριάδα $x = 0$, $y = 2$, $z = 10$: θα παίρναμε $100 \leqslant 4 + 64$, το οποίο δεν ισχύει.