Χώροι με νόρμα άπειρης διάστασης
Α. Χώροι ακολουθιών

Θεωρούμε αρχικά το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x \mid x \text{ συνάρτηση από το } \mathbb{N} \text{ στο } \mathbb{R}\}.$$

Για $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, γράφουμε

$$x = \Big(x(n)\Big) = \Big(x(1), x(2), \dots\Big).$$

Ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ γίνεται διανυσματικός χώρος με πράξεις κατά σημείο (κατά συντεταγμένη):

$$\Big(x(n)\Big) + \Big(y(n)\Big) = \Big(x(n) + y(n)\Big) \quad \text{και} \quad \lambda\Big(x(n)\Big) = \Big(\lambda x(n)\Big).$$

Στη συνέχεια θα δούμε διάφορους γραμμικούς υποχώρους του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ στους οποίους μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλη κατά περίπτωση νόρμα.

1. Ο χώρος $\ell_\infty \equiv \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\ell_\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } M \equiv M(x) > 0 : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ ισχύει } |x(n)| \leqslant M\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα:
(α) Είναι $\|x\|_\infty \geqslant 0$ για κάθε $x \in \ell_\infty$. Αν $\|x\|_\infty = 0$, τότε $|x(n)| = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x(n) = 0$ για $n = 1, 2, \dots$. Συνεπώς, $x = 0$.
(β) Ισχύει $\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x(n)| = |\lambda| \sup_n |x(n)| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
(γ) Έστω $x, y \in \ell_\infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$|x(n) + y(n)| \leqslant |x(n)| + |y(n)| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς n συμπεραίνουμε ότι

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |x(n) + y(n)| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

2. Ο χώρος $c_0 \equiv c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις (και μάλιστα γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη). Σε αυτόν θεωρούμε την supremum νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

3. Ο χώρος $\ell_1 \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών δηλαδή,

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$.
Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι, αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| < +\infty$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| < +\infty$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x(n)| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

4. Γενικότερα, αν $1 \leqslant p < \infty$, ο χώρος $\ell_p \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$.
Δεν είναι προφανές ότι το σύνολο αυτό είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή ότι είναι κλειστό ως προς τις πράξεις:
Ο πολλαπλασιασμός δεν παρουσιάζει κάποια δυσκολία: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$, τότε, για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x(n)|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty.$$

Αν τώρα $\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p = M < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty}|y(n)|^p = N < +\infty$, τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski, έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}},$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^p \leq \left(M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)+y(k)|^p \leq \left(M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}}\right)^p < +\infty,$$

δηλαδή $\Big(x(n)+y(n)\Big) \in \ell_p$.

Στον ℓ_p ορίζουμε την p–νόρμα

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{1/p}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski για πεπερασμένα αθροίσματα όπως πριν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n}|x(k)+y(k)|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

και περνώντας στο όριο, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)+y(k)|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

δηλαδή την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$. Οι άλλες δύο ιδιότητες της νόρμας ελέγχονται εύκολα.

5. Θεωρούμε τον χώρο $c_{00} \equiv c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών.

$$c_{00} = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists n_0 \equiv n_0(x) \in \mathbb{N} \;:\; x(n) = 0 \;\forall n \geq n_0\right\}.$$

Αυτός γίνεται χώρος με νόρμα με οποιαδήποτε από τις p–νόρμες, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Χώροι συναρτήσεων

1. Ο χώρος $\mathcal{C}([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $[0,1]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \mid \ f \text{ συνεχής}\}$$

το οποίο είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον $\mathcal{C}([0,1])$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Παρατηρούμε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού η $|f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max διότι κάθε συνεχής συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα (Άσκηση).

2. Στον $\mathcal{C}([0,1])$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την 1-νόρμα

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

και γενικότερα, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, την p–νόρμα

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Για να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι ανάλογες των ανισοτήτων Hölder και Minkowski ισχύουν και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Παρατήρηση. Ο χώρος με νόρμα $\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ γίνεται μετρικός χώρος με μετρική την επαγόμενη, δηλαδή

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Αντίστοιχα, για $1 \leqslant p < \infty$, ο χώρος με νόρμα $\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_p)$ γίνεται μετρικός χώρος με μετρική την

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Ασκήσεις

1.6. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της διαμέτρου:*
(α) $\mathrm{diam}(A) = 0$ *αν και μόνο αν* $A = \emptyset$ *ή το* A *είναι μονοσύνολο (δηλαδή,* $A = \{x\}$ *για κάποιο* $x \in X$*).*
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Αν $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$ τότε είναι φανερό ότι $\mathrm{diam}(A) = 0$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A) \geqslant \rho(x, y) > 0$.

(β) *Αν* $A \subseteq B \subseteq X$ *τότε* $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(B)$.
Απόδειξη. (β) Αν $x, y \in A$ τότε $x, y \in B$, άρα $\rho(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(B)$. Έπεται ότι ο αριθμός $\mathrm{diam}(B)$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου $\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$, άρα $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} \leqslant \mathrm{diam}(B)$.

(γ) *Αν* $A, B \subseteq X$ *τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$$

Ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$$

για κάθε ζευγάρι υποσυνόλων A, B *του* X*;*
Απόδειξη. Αφού $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, έχουμε $\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \mathrm{diam}(A)$ και $\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \mathrm{diam}(B)$ (από το (β)). Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$\min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}.$$

Για την ανισότητα

$$\max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$$

παρατηρούμε ότι $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, άρα $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$ και $\mathrm{diam}(B) \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$ (από το (β)). Έπεται ότι

$$\max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B).$$

Η ανισότητα $\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$ δεν ισχύει γενικά: θεωρήστε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) που έχει τουλάχιστον δύο σημεία $x \neq y$. Αν θέσουμε $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$ τότε $A \cup B = \{x, y\}$ και

$$\mathrm{diam}(A \cup B) = d(x, y) > 0 = \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Σημείωση: Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε η ανισότητα ισχύει: θεωρήστε $w \in A \cap B$. Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$d(x, y) \leqslant d(x, w) + d(w, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Αν $x, y \in A$ ή $x, y \in B$, είναι προφανές ότι $d(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$. Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Θα δούμε παρακάτω μια ανισότητα για την $\mathrm{diam}(A \cup B)$ που ισχύει στη γενική περίπτωση.

(δ) *Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δείξτε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο (έχει το πολύ ένα στοιχείο).*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A_n) \geqslant \rho(x, y) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ καταλήγουμε στην $0 = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{diam}(A_n) \geqslant \rho(x, y) > 0$, άτοπο.

1.7. *Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X,ρ) είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a,x_0) \leqslant r$ για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη. Σύφωνα με τον ορισμό, ένα $A \subseteq X$ είναι φραγμένο, αν το σύνολο

$$\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$$

είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} < +\infty.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το A είναι φραγμένο. Επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in A$ και θέτουμε $r = \mathrm{diam}(A) + 1 > 0$. Τότε, για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\rho(a,x_0) \leqslant \mathrm{diam}(A) < r.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a,x_0) \leqslant r$ για κάθε $a \in A$. Τότε, για κάθε $a,b \in A$ έχουμε

$$\rho(a,b) \leqslant \rho(a,x_0) + \rho(x_0,b) \leqslant r + r = 2r.$$

Συνεπώς, το A είναι φραγμένο και $\mathrm{diam}(A) \leqslant 2r$.

1.8. Έστω $A_1, \dots, A_k$ φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ). Δείξτε ότι το σύνολο $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ είναι επίσης φραγμένο.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν A και B είναι φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ) τότε το $A \cup B$ είναι φραγμένο. Στη συνέχεια, με επαγωγή βλέπουμε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση φραγμένων συνόλων είναι φραγμένο σύνολο.

Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και $y_0 \in B$. Τότε, αν $x \in A$ ισχύει $\rho(x, x_0) \leqslant \mathrm{diam}(A)$ και αν $y \in B$ ισχύει $\rho(y, y_0) \leqslant \mathrm{diam}(B)$. Θεωρούμε $x, y \in A \cup B$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Αν $x, y \in A$ τότε $\rho(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(A)$.
2. Αν $x, y \in B$ τότε $\rho(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(B)$.
3. Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \rho(x_0, y_0) + \mathrm{diam}(B).$$

Έπεται ότι: αν θέσουμε $M = \mathrm{diam}(A) + \rho(x_0, y_0) + \mathrm{diam}(B)$, τότε $\rho(x, y) \leqslant M$ για κάθε $x, y \in A \cup B$. Συνεπώς, το $A \cup B$ είναι φραγμένο.

Άσκηση. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A,B \subseteq X$. Ορίζουμε την* **απόσταση των συνόλων** *A,B ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αν τα A,B είναι φραγμένα, δείξτε ότι ισχύει

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(A,B).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τυχόντα $a \in A$ και $b \in B$ και θα δείξουμε ότι ισχύει

$$(\star) \qquad \mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(a,b).$$

Πράγματι, έστω $x,y \in A \cup B$. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, έχουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $x,y \in A$ τότε $d(x,y) \leqslant \mathrm{diam}(A)$.
2. Αν $x,y \in B$ τότε $d(x,y) \leqslant \mathrm{diam}(B)$.
3. Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(a,b) + \mathrm{diam}(B).$$

Έτσι, για κάθε $x,y \in A \cup B$, έχουμε ότι

$$d(x,y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(a,b) + \mathrm{diam}(B).$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(a,b),$$

δηλαδή, για οποιαδήποτε $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει η $(\star)$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{diam}(A \cup B) - \mathrm{diam}(A) - \mathrm{diam}(B) \leq d(a,b),$$

από οπου προκύπτει ότι

$$\mathrm{diam}(A \cup B) - \mathrm{diam}(A) - \mathrm{diam}(B) \leq \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = \mathrm{dist}(A,B),$$

δηλαδή

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(A,B).$$

Σύγκλιση ακολουθιών σε μετρικούς χώρους

Μια **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στο $\mathbb{R}$). Συνήθως, γράφουμε $x_n := x(n)$ για το n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n).

Αντίστοιχα, αν δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, ρ), μια ακολουθία στον X είναι μια συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to X$. Συμβολίζουμε πάλι την ακολουθία με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n) και μπορούμε να την σκεφτόμαστε σαν μια διαδοχή σημείων $x_1, x_2, x_3, \ldots$ στον X.

Σύγκλιση. Η έννοια της σύγκλισης στο $\mathbb{R}$ συνδέεται άμεσα με την έννοια της απόστασης:
Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) συγκλίνει στο $x \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει ένα τελικό τμήμα της (x_n), δηλαδή ένα σύνολο της μορφής $\{x_n : n \geq n_0\}$, για κατάλληλο n_0, που βρίσκεται **όσο κοντά θέλουμε** στο x.

Πιο τυπικά:
Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$, λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό x αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα:
> για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant n_0$) να ισχύει $|x_n - x| < \varepsilon$.

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\lim x_n = x$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ή, πιο απλά, $x_n \to x$.

Αντίστοιχα, για μια ακολουθία (x_n) σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ) δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός. Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X,ρ) *συγκλίνει στο $x \in X$ ως προς τη μετρική ρ* (ή είναι ρ-συγκλίνουσα) αν

> για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:
> για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ή απλώς $x_n \to x$. Το x λέγεται ρ-όριο (ή απλώς όριο) της ακολουθίας.

Πρόταση 1. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ) και έστω $x \in X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(\rho(x_n,x))_n$ πραγματικών αριθμών είναι μηδενική.*

Απόδειξη. Αρκεί να συγκρίνουμε τους δύο ορισμούς: η ακολουθία $(\rho(x_n,x))_n$ στο $\mathbb{R}$ είναι μηδενική αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x) = |\rho(x_n,x) - 0| < \varepsilon$. Όμως αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Μοναδικότητα του ορίου

Πρόταση 2. *Έστω* (x_n) *μια ακολουθία στο μετρικό χώρο* (X, ρ)*. Αν υπάρχει το όριο της* (x_n)*, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $x_n \xrightarrow{\rho} y$, όπου $x \neq y$.
Τότε $\rho(x, y) = \varepsilon > 0$.

Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{4}$

και

αφού $x_n \to y$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $\rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε

$$\rho(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{και} \quad \rho(x_{n_0}, y) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Έπεται ότι

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, y) < \frac{\varepsilon}{2} < \rho(x, y),$$

άτοπο.
Συμπεραίνουμε ότι το όριο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Πρόταση 3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $(x_n),(y_n)$ ακολουθίες στον X και $x,y\in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$, τότε $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.
Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα Λήμμα που έχουμε δει ως άσκηση (Άσκηση 1.2).

Λήμμα. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα (*Ανισότητα τεσσάρων σημείων*):

$$|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,w) \text{ για κάθε } x,y,z,w\in X.$$

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Λήμματος βλέπουμε ότι

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| \leqslant \rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)\to 0$$

καθώς $n\to\infty$, αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

Παραδείγματα σύγκλισης σε μετρικούς χώρους

1. Θεωρούμε τη **διακριτή μετρική** δ σε ένα σύνολο X. Τότε, μια ακολουθία (x_n) στον (X, δ) είναι συγκλίνουσα αν και μόνον αν είναι τελικά σταθερή.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_n \xrightarrow{\delta} x$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$ τότε $\delta(x_n, x) < \frac{1}{2}$. Από τον ορισμό της διακριτής μετρικής, έπεται ότι $\delta(x_n, x) = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$ ή αλλιώς, ότι $x_n = x$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Συνεπώς η (x_n) είναι τελικά σταθερή. Το αντίστροφο είναι προφανές από τον ορισμό του ορίου: σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε τελικά σταθερή ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

2. Πεπερασμένο γινόμενο μετρικών χώρων.

Έστω $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$ μετρικοί χώροι και $X = \prod_{i=1}^k X_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Δηλαδή, τα στοιχεία του X είναι k-άδες της μορφής
$x = (x(1), \dots, x(k))$ με $x(j) \in X_j$, $j = 1, \dots, k$.
Μια μετρική d στο γινόμενο $X = \prod_{i=1}^k X_i$ λέγεται *μετρική γινόμενο* αν ισχύει το εξής:

> Μια ακολουθία $x_n = (x_n(1), \dots, x_n(k))$ στο X συγκλινει στο $x = (x(1), \dots, x(k))$ ως προς την d αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη, δηλαδή $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για κάθε $i = 1, \dots, k$.

Παράδειγμα: Στο X ορίζουμε τη μετρική $d = \sum_{j=1}^k d_j$, δηλαδή

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{k} d_j(x(j), y(j)).$$

Τότε, η d είναι μετρική γινόμενο.
Απόδειξη. Έστω (x_n) μια ακολουθία στο X. Τότε, η (x_n) έχει τη μορφή

$$x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(k)), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $x_n \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \dots, x(k))$, τότε $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για $i = 1, \dots, k$. Πράγματι: αν $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ έχουμε

$$d_i(x_n(i), x(i)) \leqslant \sum_{j=1}^{k} d_j(x_n(j), x(j)) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$.

Αντίστροφα: αν $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για $i = 1, 2, \dots, k$, αυτό σημαίνει ότι $d_i(x_n(i), x(i)) \to 0$ για $i = 1, 2, \dots, k$. Συνεπώς,

$$d(x_n, x) = d_1(x_n(1), x(1)) + \dots + d_k(x_n(k), x(k)) \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d} x$.