Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνέχειας για συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων:

**Ορισμός**

Έστω $(X, \rho)$ και $(Y, \sigma)$ δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *συνεχής στο* $x_0 \in X$ αν

> για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε:
> αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής στον $X$ αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $X$.

Παρατηρούμε ότι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο $x_0 \in X$ διατυπώνεται ως εξής:

> Η $f : X \to Y$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν
> υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$
> υπάρχει $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) \geqslant \varepsilon$.

Η συνέχεια περιγράφεται μέσω της σύγκλισης ακολουθιών, ακριβώς όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

## Αρχή της μεταφοράς

**Πρόταση.** Έστω $(X,\rho)$ και $(Y,d)$ δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

(β) Για κάθε ακολουθία $(x_n)$ στοιχείων του $X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.

(γ) Για κάθε ακολουθία $(z_n)$ στον $X$ με $z_n \xrightarrow{\rho} x_0$, η ακολουθία $(f(z_n))$ είναι $d$-συγκλίνουσα.

**Απόδειξη.** Δείχνουμε πρώτα την ισοδυναμία των (α) και (β).

(α)⇒(β) Έστω $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x,x_0) < \delta$ τότε $d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$.
Επιπλέον, επειδή $x_n \to x_0$,
υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε $\rho(x_n,x_0) < \delta$.
Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $d(f(x_n),f(x_0)) < \varepsilon$ αν $n \geqslant n_0$,
δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.

(β)⇒(α) Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$, για το οποίο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε $x_n \in X$ τέτοιο ώστε $\rho(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ και $d(f(x_n),f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Τότε, για την ακολουθία $(x_n)$ έχουμε

$$(1) \qquad x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \quad \text{και} \quad d(f(x_n),f(x_0)) \geqslant \varepsilon_0 \quad \forall n = 1,2,\dots.$$

Από την υπόθεση έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (1). Συμπεραίνουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

Δείχνουμε τώρα την ισοδυναμία των (β) και (γ).

(β)⇒(γ) Προφανές: αν $y_n \xrightarrow{\rho} x_0$, από την υπόθεση έχουμε $f(y_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$, άρα η $(f(y_n))$ είναι $d$-συγκλίνουσα.

(γ)⇒(β) Έστω $(x_n)$ ακολουθία στον $(X,\rho)$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$(z_n) = (x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, \ldots) \quad \text{δηλαδή} \quad z_n = \begin{cases} x_0, & n = 2k-1 \\ x_k, & n = 2k \end{cases},$$

για την οποία εύκολα δείχνουμε ότι συγκλίνει στο $x_0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $f(z_n) \xrightarrow{d} y$. Επιπλέον, $f(z_{2n-1}) = f(x_0) \xrightarrow{d} f(x_0)$, άρα $y = f(x_0)$. Τώρα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(x_n) = f(z_{2n}) \xrightarrow{d} y = f(x_0)$.

Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς μπορούμε να δείξουμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

**Πρόταση** Έστω $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ και $(Z,\tau)$ τρεις μετρικοί χώροι. Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ και η $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**Απόδειξη**. Έστω $(x_n)$ ακολουθία σημείων του $X$ με $x_n \to x_0$. Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Αφού η $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, για κάθε ακολουθία $(y_n)$ σημείων του $Y$ με $y_n \to f(x_0)$ έχουμε $g(y_n) \to g(f(x_0))$.

Όμως, $f(x_n) \in Y$ και $f(x_n) \to f(x_0)$. Συνεπώς,

$$g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

Για κάθε ακολουθία $(x_n)$ σημείων του $X$ με $x_n \to x_0$ δείξαμε ότι

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Από την αρχή της μεταφοράς, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση της συνέχειας με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε πραγματικές συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

**Θεώρημα**
Έστω $f, g : (X, \rho) \to \mathbb{R}$, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι οι $f, g$ είναι συνεχείς στο $x_0$. Τότε,

(α) Οι $f + g$, $\lambda f$ και $fg$ είναι συνεχείς στο $x_0$.

(β) Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο $X$ και είναι συνεχής στο $x_0$.

**Απόδειξη**. Η απόδειξη όλων των ισχυρισμών είναι απλή: για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $x_0$, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία $(x_n)$ σημείων του $X$ που συγκλίνει στο $x_0$, η ακολουθία $\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right)$ συγκλίνει στο $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$. Από την υπόθεση, οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς στο $x_0$. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε έχουμε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Αφού $g(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(x_0) \neq 0$, έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Η απόδειξη της συνέχειας των $f + g$, $\lambda f$ και $f \cdot g$ στο $x_0$ αφήνεται ως άσκηση.

**Πόρισμα.** Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος. Ο χώρος $\mathcal{C}(X)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικός χώρος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 2.5.** *Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X\times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο $d$. Δείξτε ότι η $\rho : (X\times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x,y)\mapsto \rho(x,y)$ είναι συνεχής.*

**Απόδειξη**. Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $X\times X$ και $(x_n,y_n)\xrightarrow{d}(x,y)\in X$, τότε $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$. Αν όμως η $d$ είναι μετρική γινόμενο, από την $(x_n,y_n)\xrightarrow{d}(x,y)$ έπεται ότι $x_n\xrightarrow{\rho}x$ και $y_n\xrightarrow{\rho}y$.

Από την ανισότητα $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)$ παίρνουμε τότε ότι

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y).$$

**Άσκηση 2.6.** *Έστω $(x_n)$ ακολουθία στο μετρικό χώρο $(X,\rho)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x\in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n)\to f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n\to x$;*

**Απόδειξη**. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi:(X,\rho)\to\mathbb{R}$ με $\phi(y)=\rho(y,x)$. Έχουμε δει ότι η $\phi$ είναι συνεχής.
(Αυτό προκύπτει άμεσα με τον ορισμό της συνέχειας, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε $y,z\in X$,

$$|\phi(y)-\phi(z)|=|\rho(y,x)-\rho(z,x)|\leqslant\rho(y,z).)$$

Από την υπόθεση έχουμε $\phi(x_n)\to\phi(x)$, δηλαδή

$$\rho(x_n,x)\to\rho(x,x)=0 \quad \text{όταν το} \quad n\to\infty.$$

Άρα, $x_n\xrightarrow{\rho}x$.

# Τοπολογία μετρικών χώρων

## Ανοικτά σύνολα

**Ορισμός** Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$.

(α) Η **ανοικτή $\rho$-μπάλα** με κέντρο το $x_0$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

(β) Η **κλειστή $\rho$-μπάλα** με κέντρο το $x_0$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$\widehat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \leqslant \varepsilon\}.$$

(γ) Η **$\rho$-σφαίρα** με κέντρο το $x_0$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = \varepsilon\}.$$

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τη μετρική στην οποία αναφερόμαστε, θα παραλείπουμε τον δείκτη στα αντίστοιχα σύνολα και θα γράφουμε απλώς $B(x_0,\varepsilon), S(x_0,\varepsilon)$ κ.λπ.

**Παραδείγματα**

(α) Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο $X$ με τη διακριτή μετρική $\delta$. Στον $(X,\delta)$ αν $r > 0$ έχουμε

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } 0 < r \leqslant 1 \\ X, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$$

και

$$S(x,r) = \begin{cases} X \setminus \{x\}, & \text{αν } r = 1 \\ \emptyset, & \text{αν } r \neq 1. \end{cases} .$$

(β) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική,

$$B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon),\qquad \widehat{B}(x,\varepsilon)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon],\qquad S(x,\varepsilon)=\{x-\varepsilon,x+\varepsilon\}.$$

(γ) Στο $[0,2]$ με τη συνήθη μετρική,

$$B(1/2,1)=[0,3/2),\qquad \widehat{B}(1/2,1)=[0,3/2],\qquad S(1/2,1)=\{3/2\}.$$

(δ) Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$. Αν $\rho_1,\rho_2,\rho_\infty$ είναι οι επαγόμενες μετρικές, τότε

$$\widehat{B}_{\rho_1}(0,1)=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$$

(ρόμβος με κορυφές τα $(\pm 1,0)$ και $(0,\pm 1)$),

$$\widehat{B}_{\rho_2}(0,1)=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$$

(δίσκος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1) και

$$\widehat{B}_{\rho_\infty}(0,1)=\{(x,y):|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$$

(τετράγωνο με κορυφές τα $(\pm 1,\pm 1)$).

**Ορισμός** Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in A$ λέγεται **εσωτερικό σημείο** (*interior point*) του $A$ αν υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x) \subseteq A$.

**Ορισμός** Έστω $(X,\rho)$ ένας μετρικός χώρος και έστω $G \subseteq X$. Το $G$ λέγεται *ρ-ανοικτό* (*open*) αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x) \subseteq G$. Δηλαδή, αν κάθε σημείο του $G$ είναι εσωτερικό του σημείο.

## Παραδείγματα ανοικτών συνόλων

**Α. Πρόταση** Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

**Απόδειξη** Έστω $B(x,r)$ μια ανοικτή μπάλα σε ένα μετρικό χώρο $(X,\rho)$ και έστω $y \in B(x,r)$. Αφού $\rho(x,y) < r$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\varepsilon < r - \rho(x,y)$.
Η μπάλα $B(y,\varepsilon)$ περιέχεται στην $B(x,r)$, γιατί αν $t \in B(y,\varepsilon)$ τότε $\rho(y,t) < \varepsilon$ και η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\rho(t,x) \leqslant \rho(t,y) + \rho(y,x) < \varepsilon + \rho(x,y) < r.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $t \in B(x,r)$, άρα $B(y,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$.

Ειδικότερα, στο $\mathbb{R}$, κάθε ανοικτό διάστημα $(a,b)$ είναι ανοικτό σύνολο.

**Β.** Θεωρούμε τη διακριτή μετρική $\delta$ σε ένα μη κενό σύνολο $X$. Κάθε υποσύνολο του $(X,\delta)$ είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω $A \subseteq X$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε σημείο του $A$ είναι εσωτερικό: αν $a \in A$ τότε για $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει $B_\delta(a,\varepsilon) = \{a\} \subseteq A$.

**Γ.** Τα διαστήματα της μορφής $(a,b]$ ή $[a,b]$ στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $a < b$ δεν είναι ανοικτά. Αν θεωρήσουμε τη μπάλα με κέντρο το $b$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρή, τότε $B(b,\varepsilon) \not\subseteq (a,b]$, διότι $b + \frac{\varepsilon}{2} \in B(b,\varepsilon)$ αλλά $b + \frac{\varepsilon}{2} \notin (a,b]$.

**Δ.** Στο μετρικό χώρο $([0,1], |\cdot|)$, το ίδιο το διάστημα $[0,1]$ είναι ανοικτό, αφού κάθε σημείο του είναι εσωτερικό του σημείο. Πράγματι, για $x \in [0,1]$, είναι

$$B\Big(x, \frac{1}{2}\Big) = \{y \in [0,1] \Big| \; |y-x| < \frac{1}{2}\} \subseteq [0,1].$$

Παρατηρούμε ότι το αν ένα σύνολο είναι ανοικτό ή όχι εξαρτάται από τον μετρικό χώρο μέσα στον οποίο το βλέπουμε.

**Ε.** Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, διότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει βασικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου.

**Πρόταση.** Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Τα $X, \emptyset$ είναι ανοικτά.

(β) Αν $(G_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $X$ τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό.

(γ) Αν τα $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι ανοικτά τότε το $\bigcap_{i=1}^n G_i = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

**Απόδειξη.** (α) Άμεσο από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου.

(β) Έστω $x \in \bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Αφού το $G_{i_0}$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_0) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Άρα, το $\bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό.

(γ) Έστω $x \in G_1 \cap \cdots \cap G_n$. Τότε, $x \in G_i$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Αφού όλα τα $G_i$ είναι ανοικτά, για κάθε $i = 1,\ldots,n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_i) \subseteq G_i$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\} > 0$. Τότε, για κάθε $i = 1,\ldots,n$ έχουμε $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i$, άρα

$$B(x,\varepsilon) \subseteq B(x,\varepsilon_i) \subseteq G_i.$$

Συνεπώς, $B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n G_i$.

Όταν έχουμε μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου $X$ η οποία περιέχει το $X$, το κενό σύνολο, είναι κλειστή ως προς ενώσεις και πεπερασμένες τομές, τότε λέμε ότι έχουμε μια **τοπολογία** στο $X$. Με αυτή την ορολογία, η προηγούμενη Πρόταση μας λέει ότι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου είναι μια τοπολογία σε αυτόν.

**Παρατήρηση.** Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο $(X,\rho)$ τότε η τομή τους δεν είναι κατ' ανάγκην ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, αν στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρήσουμε την ακολουθία των ανοικτών συνόλων $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \{0\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό.

Η επόμενη πρόταση δίνει ένα χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω της σύγκλισης ακολουθιών.

**Πρόταση.** Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το $G$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$.

(β) Για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία $(x_n)$ στο $X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε $x_n \in G$. Δηλαδή, κάθε ακολουθία του $X$ που συγκλίνει σε σημείο του $G$, *τελικά* περιέχεται στο $G$.

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε πρώτα ότι το $G$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$. Έστω $x \in G$ και $(x_n)$ ακολουθία στο $X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού το $G$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq G$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε $\rho(x_n,x) < \varepsilon$. Συνεπώς, $x_n \in B(x,\varepsilon) \subseteq G$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

Αντίστροφα· υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (α), δηλαδή ότι το $G$ δεν είναι ανοικτό. Τότε, υπάρχει $x \in G$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ η μπάλα $B(x,\varepsilon)$ να μην περιέχεται στο $G$.
Συνεπώς, για $n = 1, 2, ...$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus G)$, δηλαδή

$$x_n \notin G \quad \text{και} \quad \rho(x_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(x_n)$ συγκλίνει στο $x$ και όλοι οι όροι της είναι εκτός του $G$, οπότε δεν ισχύει το (β).

**Πρόταση.** Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο $V$ του $X$ είναι ανοικτό αν και μόνον αν είναι (ενδεχομένως άπειρη) ένωση από ανοικτές μπάλες του $X$.

**Απόδειξη.** Αν το $V$ είναι ένωση από ανοικτές μπάλες τότε είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων.

Αντίστροφα, έστω ότι το $V$ είναι ανοικτό. Τότε, για κάθε $x \in V$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) \subseteq V$. Παρατηρούμε ότι $V = \bigcup_{x \in V} B(x, \varepsilon_x)$.

Για τα ανοικτά υποσύνολα της ευθείας μπορούμε να πούμε κάτι περισσότερο:

**Πρόταση.** Κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο $U$ στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως **αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο** ανοικτών διαστημάτων.

**Απόδειξη.** Έστω $x \in U$. Αφού το $U$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U$. Θέτουμε

$$a_x = \inf\{s : (s, x] \subseteq U\} \qquad \big(a_x \in [-\infty, +\infty)\,\big)$$

και

$$b_x = \sup\{t : [x, t) \subseteq U\} \qquad \big(b_x \in [-\infty, +\infty)\,\big).$$

Τότε $(a_x, x] \subseteq U$: αν $t \in (a_x, x]$ τότε το $t$ δεν είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{s : (s, x] \subseteq U\}$, άρα υπάρχει $s < t$ με $(s, x] \subseteq U$, άρα $t \in U$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $[x, b_x) \subseteq U$. Συνεπώς για κάθε $x \in U$ ισχύει $(a_x, b_x) \subseteq U$, άρα

$$(*) \qquad U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x \in U$, το $(a_x, b_x)$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x$ και περιέχεται στο $U$. Επιπλέον ισχύει:

*Ισχυρισμός* . Αν $x, y \in U$ τότε είτε $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$ ή $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$.
Πράγματι, έστω ότι $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$. Τότε, θεωρούμε $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$. Είναι $z \in U$ και, αφού $z \in (a_x, b_x) \subseteq U$, ισχύει $(a_x, b_x) \subseteq (a_z, b_z)$.
Αν ήταν $(a_x, b_x) \subsetneqq (a_z, b_z)$, τότε θα υπήρχε διάστημα μεγαλύτερο του $(a_x, b_x)$ που περιέχει το $x$ και περιέχεται στο $U$, άτοπο. Άρα

$$(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$$

και όμοια παίρνουμε $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$(a_x, b_x) = (a_y, b_y).$$

Από τον ισχυρισμό και την $(*)$ είναι φανερό ότι το $U$ γράφεται στη μορφή

$$U = \bigcup_{j \in J} I_j,$$

όπου $I_j$ ξένα ανά δύο μη κενά ανοικτά διαστήματα. Τέλος, η παραπάνω ένωση είναι αριθμήσιμη: ορίζουμε $\tau : J \to \mathbb{Q}$ ως εξής: αν $j \in J$ επιλέγουμε ως $\tau(j)$ τυχόντα ρητό $q_j \in I_j$. Η $\tau$ είναι ένα προς ένα, διότι τα $I_j$ είναι ξένα. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, το $J$ είναι επίσης αριθμήσιμο.

## Κλειστά σύνολα

**Ορισμός.** Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το $F$ λέγεται **$\rho$-κλειστό** (*closed*) αν το συμπλήρωμά του $F^c \equiv X \setminus F$ είναι $\rho$-ανοικτό.

### Παραδείγματα

**Α.** Σε κάθε μετρικό χώρο $(X, \rho)$ τα μονοσύνολα $\{x\}$, $x \in X$ είναι κλειστά.
Πράγματι: Έστω $x \in X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in X \setminus \{x\}$. Θέτουμε $\varepsilon = \rho(y, x) > 0$. Τότε $B(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$.

**Β.** Κάθε κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x, r)$ είναι κλειστό σύνολο.
Πράγματι, το $X \setminus \widehat{B}(x, r)$ είναι ανοικτό: έστω $y \in X \setminus \widehat{B}(x, r)$. Τότε, $\rho(x, y) > r$. Επιλέγουμε $0 < \eta < \rho(x, y) - r$ και έχουμε ότι $B(y, \eta) \subseteq X \setminus \widehat{B}(x, r)$ διότι, αν $z \in B(y, \eta)$ έχουμε $\rho(z, y) < \eta$ και

$$\rho(z, x) \geqslant \rho(y, x) - \rho(z, y) > \rho(x, y) - \eta > r,$$

δηλαδή $z \in X \setminus \widehat{B}(x, r)$.

Ειδικότερα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι κλειστό σύνολο.

**Γ.** Το $\mathbb{Q}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι κλειστό σύνολο, διότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα.

**Δ.** Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο $X$ με τη διακριτή μετρική $\delta$. Κάθε υποσύνολο $A$ του $(X, \delta)$ είναι κλειστό, αφού το $X \setminus A$ είναι ανοικτό.

**Ε.** Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Έστω $x \in X$ και ακολουθία $(x_n)$ στον $X$, ώστε $x_n \to x$. Το σύνολο

$$E = \{x_n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{x\}$$

είναι κλειστό στον $(X,d)$.
Πράγματι, αν $y \notin E$, τότε $\delta = d(x,y) > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x, \delta/2)$ για κάθε $n > n_0$. Θέτουμε

$$r = \min\{d(y, x_i) : i = 1, 2, \dots, n_0\} > 0.$$

Αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \min\{r/2, \delta/2\}$, ελέγχουμε εύκολα ότι $B(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus E$.

**Παρατήρηση.** Όπως δείχνουν τα προηγούμενα παραδείγματα, ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου $(X, \rho)$ μπορεί να μην είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. Επίσης, ένα σύνολο μπορεί να είναι ταυτόχρονα και ανοικτό και κλειστό . Τα σύνολα που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά αναφέρονται συχνά ως clopen. Για παράδειγμα, κάθε υποσύνολο ενός χώρου με τη διακριτή μετρική είναι clopen.

Έχουμε δει έναν χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω ακολουθιών. Αν $(X, \rho)$ είναι ένας μετρικός χώρος και $G \subseteq X$, τότε το $G$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία $(x_n)$ στο $X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε $x_n \in G$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ισοδυναμία μπορούμε να δώσουμε αντίστοιχο χαρακτηρισμό για τα κλειστά σύνολα: είναι εκείνα τα υποσύνολα του $X$ που *περιέχουν τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών στοιχείων τους*:

**Πρόταση.** Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το $F$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.

(β) Αν $(x_n)$ είναι ακολουθία στο $F$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x \in X$, τότε $x \in F$.

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε πρώτα ότι το $F$ είναι κλειστό και θεωρούμε ακολουθία $(x_n)$ στο $F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Έστω ότι $x \notin F$. Τότε, $x \in X \setminus F$ και το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in X \setminus F$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για κάθε $n \geqslant n_0$ παίρνουμε $x_n \notin F$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύει το (β) αλλά το $F$ δεν είναι κλειστό. Τότε, το $X \setminus F$ δεν είναι ανοικτό. Συνεπώς, υπάρχει $x \in X \setminus F$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$, βρίσκουμε $x_n \in F$ ώστε $\rho(x_n,x) < \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$. Η $(x_n)$ είναι ακολουθία στο $F$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού έχουμε δεχτεί το (β), έπεται ότι $x \in F$. Αυτό είναι άτοπο.

Οι βασικές ιδιότητες της οικογένειας των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων:

**Πρόταση.** Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Τα $X, \emptyset$ είναι κλειστά.

(β) Αν $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $X$, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Αν $(E_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $X$, τότε η τομή τους $\bigcap_{i\in I} E_i$ είναι κλειστό σύνολο.

**Απόδειξη.** Τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από τους τύπους του De Morgan

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

και από τον ορισμό του κλειστού συνόλου ως συμπληρώματος ανοικτού συνόλου.

**Παρατήρηση.** Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια κλειστών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο, τότε η ένωσή τους δεν είναι κατ΄ ανάγκην κλειστό σύνολο. Πράγματι, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε την ακολουθία κλειστών διαστημάτων $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 2, 3, \ldots$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ και το $(0, 1]$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 3.1.** *Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και $F, G$ υποσύνολα του $X$. Αν το $F$ είναι κλειστό και το $G$ είναι ανοικτό, δείξτε ότι το $F \setminus G$ είναι κλειστό και το $G \setminus F$ είναι ανοικτό.*

**Απόδειξη**. Γράφουμε $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$. Αφού το $G$ είναι ανοικτό, το $X \setminus G$ είναι κλειστό. Τότε, το $F \cap (X \setminus G)$ είναι κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων.

Όμοια, γράφουμε $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$. Αφού το $F$ είναι κλειστό, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Τότε, το $G \cap (X \setminus F)$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων.

**Άσκηση 3.2.** *Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο $A$ του $X$ γράφεται ως τομή ανοικτών υποσυνόλων του $(X, \rho)$.*

**Απόδειξη**. Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε $B \subseteq X$ γράφεται ως ένωση κλειστών συνόλων, γράφοντας

$$B = \bigcup_{x \in B} \{x\}.$$

[Τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα σε κάθε μετρικό χώρο]. Έστω τώρα $A \subseteq X$. Θέτοντας $B = X \setminus A$ έχουμε

$$X \setminus A = \bigcup_{i \in I} F_i$$

όπου $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $X$. Τότε,

$$A = (X \setminus A)^c = \bigcap_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcap_{i \in I} G_i, \quad \text{δηλαδή} \quad A = \bigcap_{x \in A^c} (X \setminus \{x\}),$$

όπου κάθε $G_i = X \setminus F_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$.

**Άσκηση 3.3.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το*

$$G = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$

*είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το*

$$F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

*είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in G$. Τότε, $f(x) > 0$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon = f(x)/2 > 0$ βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: αν $y \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $f(y) > f(x)/2 > 0$. Συνεπώς, $B(x, \delta) \subseteq G$. Έπεται ότι το $G$ είναι ανοικτό.

Έστω $(x_n)$ ακολουθία στο $F$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η $f$ είναι συνεχής στο $x$. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Συνεπώς, $x \in F$. Έπεται ότι το $F$ είναι κλειστό.

**Άσκηση 3.4.** *Δείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων και κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.*

**Απόδειξη**. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \quad \text{και} \quad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\right].$$

Για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[a, b] \subseteq \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, άρα

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right).$$

Αντίστροφα, αν $x \notin [a, b]$, τότε είτε $x < a$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \leq a - \frac{1}{n}$ είτε $x > b$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \geq b + \frac{1}{n}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right). \quad \text{Άρα} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \subseteq [a, b].$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα.

**Άσκηση 3.5.** *Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.*

**Απόδειξη**. Έστω $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου $(X, \rho)$. Για κάθε $j = 1, \ldots, m$, το μονοσύνολο $\{x_j\}$ είναι κλειστό σύνολο. Γράφουμε

$$F = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_m\}.$$

Αφού η ένωση πεπερασμένων το πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι το $F$ είναι κλειστό.

**3.6.** *Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό σύνολο. Μπορεί σε έναν μετρικό χώρο μια σφαίρα να είναι το κενό σύνολο;*

*Απόδειξη. 1ος τρόπος.* Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Δείχνουμε ότι η $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο αποδεικνύοντας το εξής: αν $x_n \in S(x_0, \varepsilon)$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε $x \in S(x_0, \varepsilon)$. Πράγματι, $\rho(x_0, x_n) = \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$|\rho(x_0, x) - \rho(x_0, x_n)| \leqslant \rho(x, x_n) \to 0,$$

άρα $\rho(x_0, x) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = \varepsilon$. Συνεπώς, $x \in S(x_0, \varepsilon)$.

*2ος τρόπος.* Χρησιμοποιούμε την Άσκηση 3.1. Είναι

$$S(x_0, \varepsilon) = \widehat{B}(x_0, \varepsilon) \setminus B(x_0, \varepsilon)$$

και, όπως ξέρουμε, το $\widehat{B}(x_0, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο, ενώ το $B(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό.

Υπάρχει περίπτωση μια σφαίρα $S(x_0, \varepsilon)$, σε κάποιον μετρικό χώρο, να είναι το κενό σύνολο. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο $X$ με τη διακριτή μετρική $\delta$ τότε, για κάθε $x_0 \in X$, ισχύει $S(x_0, 2) = \emptyset$.