Κλειστή θήκη συνόλου

Ορισμός 1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Το $x\in X$ λέγεται *σημείο επαφής* (*contact point*) του A αν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $A\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset$ (δηλαδή αν κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει στοιχεία του A).

Παρατήρηση Παρατηρούμε ότι το $x\in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n\xrightarrow{\rho}x$.

Παραδείγματα

1. Στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A=(0,1]$. Το σημείο 0 είναι σημείο επαφής του A.

2. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε $x_n\xrightarrow{\rho}x$, τότε το x είναι σημείο επαφής του συνόλου $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.

3. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική δ. Αν $A\subseteq(X,\delta)$, τότε ένα $x\in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν $x\in A$.

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Η **κλειστή θήκη** (*closure*) $\overline{A}$ (ή $\mathrm{cl}(A)$) του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του. Δηλαδή,

$$\overline{A}\equiv\mathrm{cl}(A)=\{x\in X:\forall\,\varepsilon>0, A\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset\}.$$

Παρατήρηση Για κάθε $A\subseteq X$ η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία στο $\overline{A}$ με $x_n\xrightarrow{\rho}x$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $a_n\in A$ ώστε $\rho(a_n,x_n)<\frac{1}{n}$, διότι κάθε x_n είναι σημείο επαφής του A. Τότε,

$$\rho(a_n,x)\leqslant\rho(a_n,x_n)+\rho(x_n,x)<\frac{1}{n}+\rho(x_n,x)\to 0,$$

δηλαδή $a_n\xrightarrow{\rho}x$. Η (a_n) είναι ακολουθία στο A και $a_n\xrightarrow{\rho}x$. Συνεπώς, $x\in\overline{A}$.

Επιπλέον, η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι *το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το* A, δηλαδή αν $F \subseteq X$ κλειστό και $A \subseteq F$, τότε $\overline{A} \subseteq F$.

Πράγματι: Αν $x \in \overline{A}$ τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Τότε, $x_n \in F$ και αφού το F είναι κλειστό, συμπεραίνουμε ότι $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in F$. Δηλαδή, $\overline{A} \subseteq F$.

Παραδείγματα

1. Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν οι σχέσεις $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2. Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε $\mathrm{cl}\,(a,b) = \mathrm{cl}\,(a,b] = \mathrm{cl}\,[a,b) = [a,b]$.

3. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική δ. Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A} = A$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες της κλειστής θήκης.

Πρόταση Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(α) $A \subseteq \overline{A}$.

Απόδειξη. Προφανές από τον ορισμό της κλειστής θήκης. Κάθε σημείο του A είναι σημείο επαφής του A.

(β) $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\}$.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό και $A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς,

$$\bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\} \subseteq \overline{A}.$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι κάθε σύνολο F που εμφανίζεται στην τομή του δεξιού μέλους είναι κλειστό και περιέχει το A, άρα, όπως έχουμε δει, περιέχει και το $\overline{A}$. Έπεται ότι

$$\overline{A} \subseteq \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\}.$$

(γ) $A = \overline{A}$ αν και μόνον αν το A είναι κλειστό.

Απόδειξη. Αν $A = \overline{A}$ τότε το A είναι κλειστό διότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό τότε, αφού το A περιέχει τον εαυτό του, είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο που περιέχει το A, άρα $A = \overline{A}$.

(δ) Αν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Απόδειξη. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, δηλαδή $A \subseteq \overline{B}$. Το $\overline{B}$ είναι ένα κλειστό σύνολο που περιέχει το A, άρα περιέχει και το ελάχιστο κλειστό που περιέχει το A, δηλαδή την κλειστή θήκη του A. Έτσι, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(ε) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το (δ) και τους εγκλεισμούς $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ βλέπουμε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, άρα

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Επιπλέον, είναι $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ άρα

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Αφού το $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό σύνολο, από την ιδιότητα ότι το $\overline{A \cup B}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $A \cup B$, προκύπτει ότι

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη. Ισχύει $A \cap B \subseteq A$, οπότε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$.
Ομοίως, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$, άρα $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Παρατήρηση Ο εγκλεισμός στην τελευταία σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχουμε $\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c} = \emptyset$ ενώ, $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

Η επόμενη Πρόταση δίνει μια πολύ χρήσιμη σχέση δυϊσμού μεταξύ της κλειστής θήκης και του εσωτερικού:

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(α) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(β) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ισοδύναμα, $x \in \overline{A}$.

2. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Ισοδύναμα, $x \in (X \setminus A)^\circ$.

Αυτό αποδεικνύει ότι τα σύνολα $\overline{A}$ και $(X \setminus A)^\circ$ είναι ξένα και έχουν ως ένωση το X. Έπεται ότι $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(β) Από το (α), για κάθε υποσύνολο B του X, έχουμε

$$X \setminus \overline{B} = (X \setminus B)^\circ,$$

οπότε, παίρνοντας συμπληρώματα, έχουμε

$$\overline{B} = X \setminus (X \setminus B)^\circ.$$

Θέτοντας όπου B το $X \setminus A$, παίρνουμε

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \Big(X \setminus (X \setminus A)\Big)^\circ,$$

δηλαδή

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ.$$

Ασκήσεις

3.7. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εξετάστε, αν ισχύει πάντοτε η ισότητα*
$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Απόδειξη. Ισχύει πάντοτε ο εγκλεισμός
$$\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Πράγματι, αφού το σύνολο $\widehat{B}(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό και περιέχει το $B(x,\varepsilon)$, ισχύει $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon)$ - γιατί η $\overline{B(x,\varepsilon)}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $B(x,\varepsilon)$.

Δεν ισχύει πάντοτε ισότητα: αν θεωρήσουμε ένα σύνολο X που έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τη διακριτή μετρική δ, τότε, για κάθε $x \in X$, έχουμε $B(x,1) = \{x\}$ άρα $\overline{B(x,1)} = \{x\}$, ενώ $\widehat{B}(x,1) = X$ (και $X \neq \{x\}$ από την υπόθεση για το πλήθος των στοιχείων του X).

3.10. *Έστω A, B δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,d). Αποδείξτε ότι:*
(α) *Αν $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.*
(β) *Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.*

Απόδειξη. (α) Δείχνουμε ότι: αν $x \in X$ και $x \notin \overline{A}$ τότε $x \in B^\circ$: αφού $x \notin \overline{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Όμως, από την υπόθεση ότι $A \cup B = X$ έχουμε $X \setminus A \subseteq B$. Άρα, $B(x,\varepsilon) \subseteq B$ και αυτό δείχνει ότι $x \in B^\circ$.

Δείξαμε ότι $X \setminus \overline{A} \subseteq B^\circ$. Άρα, $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

(β) Έστω $x \in \overline{A} \cap B^\circ$. Αφού $x \in B^\circ$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq B$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει $y \in A$ το οποίο ανήκει στην $B(x,\varepsilon) \subseteq B$. Τότε, $y \in A \cap B$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $A \cap B = \emptyset$ από την υπόθεση.

Συμπεραίνουμε ότι $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.

3.12. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $\emptyset \neq A \subseteq X$. *Δείξτε ότι* $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$. *Ισχύει το αντίστοιχο για το εσωτερικό του* A*;*

Απόδειξη. Από την $A \subseteq \overline{A}$ και τον ορισμό της διαμέτρου έπεται άμεσα ότι $\operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(\overline{A})$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, υποθέτουμε ότι $\operatorname{diam}(A) < +\infty$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in \overline{A}$. Υπάρχουν $z, w \in A$ ώστε $\rho(z,x) < \varepsilon$ και $\rho(y,w) < \varepsilon$. Τότε,

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y) < \varepsilon + \operatorname{diam}(A) + \varepsilon.$$

Συνεπώς,

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in \overline{A}\} \leqslant \operatorname{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A)$.

Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

Δεν είναι γενικά σωστό ότι $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(A^\circ)$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $A = (0,1) \cup \{2\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε $\operatorname{diam}(A) = 2$ και $A^\circ = (0,1)$, άρα $\operatorname{diam}(A^\circ) = 1$. Φυσικά, ισχύει πάντα η ανισότητα $\operatorname{diam}(A) \geqslant \operatorname{diam}(A^\circ)$ διότι $A^\circ \subseteq A$.

Άσκηση

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (A, ρ_A) ένας μετρικός υπόχωρός του και $B \subseteq A$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B)$.

(β) $\mathrm{cl}_A(B) = A \cap \mathrm{cl}_X(B)$.

Απόδειξη (α) Σύμφωνα με τη μορφή που είδαμε ότι έχουν τα σχετικώς ανοικτά σύνολα (τομή ανοικτού στον X με το A), είναι άμεσο ότι το $A \cap \mathrm{int}_X(B)$ είναι ένα ρ_A-ανοικτό υποσύνολο του A και περιέχεται στο B. Άρα, από τη μεγιστικότητα του εσωτερικού έχουμε ότι περιέχεται στο ρ_A-εσωτερικό του B. Δηλαδή,

$$A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B).$$

Παρατήρηση. Ο εγκλεισμός στην παραπάνω σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε το $\mathbb{Z}$ ως μετρικό υπόχωρο με τη σχετική μετρική, τότε $\mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ ενώ $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \emptyset$. Δηλαδή,

$$\emptyset = \mathbb{Z} \cap \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \subsetneqq \mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$

(β) Σύμφωνα με τη μορφή των σχετικώς κλειστών συνόλων, το σύνολο $A \cap \mathrm{cl}_X(B)$ είναι ρ_A-κλειστό και $B \subseteq A \cap \mathrm{cl}_X(B)$. Αφού το $\mathrm{cl}_A(B)$ είναι το μικρότερο ρ_A-κλειστό σύνολο που περιέχει το B, παίρνουμε ότι $\mathrm{cl}_A(B) \subseteq A \cap \mathrm{cl}_X(B)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in A \cap \mathrm{cl}_X(B)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $B_\rho(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ και, αφού $B \subseteq A$, παίρνουμε $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \cap B \neq \emptyset$, δηλαδή $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, οπότε $x \in \mathrm{cl}_A(B)$.

Σημεία συσσώρευσης και σύνορο

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** (*accumulation point*) του A αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A διαφορετικό από το x. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\Big(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}\Big) \cap A \neq \emptyset.$$

Το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A συμβολίζεται με A' και λέγεται **παράγωγο σύνολο** του A.

Πρόταση Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ το $A \cap B(x, \varepsilon)$ είναι άπειρο σύνολο.

(γ) Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n \xrightarrow{\rho} x$ και $a_n \neq x$ για $n = 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \in A$, με $y \neq x$ ώστε $y \in B(x, \varepsilon)$. Υποθέτουμε ότι το μη κενό σύνολο $A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\})$ είναι πεπερασμένο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Γράφουμε $A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) = \{y_1, \ldots, y_k\}$ και θέτουμε $\delta = \min\{\rho(x, y_1), \ldots, \rho(x, y_k)\} > 0$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \in A$, με $y \neq x$ ώστε $y \in B(x, \delta)$. Τότε, $y \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ (διότι $\delta < \varepsilon$ και $y \neq x$). Συνεπώς, $y = y_i$ για κάποιο $1 \leqslant i \leqslant k$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει διότι $\rho(x, y) < \delta \leqslant \rho(x, y_i)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Το $A \cap B(x,1)$ είναι άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $a_1 \neq x$ και $\rho(x,a_1) < 1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει $a_1,\ldots,a_n \in A$ ώστε $a_i \neq x$ και $\rho(x,a_i) < \frac{1}{i}$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Θέτουμε $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Το $A \cap B(x,\varepsilon_{n+1})$ είναι άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $a_{n+1} \in A$ ώστε $a_{n+1} \neq x$ και $\rho(x,a_{n+1}) < \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A, διαφορετικών από το x, ώστε $\rho(x,a_n) < \frac{1}{n}$, απ' όπου έπεται ότι $a_n \xrightarrow{\rho} x$.

(γ) $\Rightarrow$ (α): Έστω (a_n) ακολουθία στοιχείων του A με $a_n \to x$ και $a_n \neq x$ για $n = 1,2,\ldots$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n \in B(x,\varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικότερα, $a_{n_0} \in B(x,\varepsilon)$ και $a_{n_0} \in A \setminus \{x\}$, άρα $\Big(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}\Big) \cap A \neq \emptyset$. Αφού το ε ήταν τυχόν, έπεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Παρατηρήσεις. A. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Επομένως, το A είναι κλειστό αν και μόνον αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.

Έπεται ειδικότερα ότι, αν το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης, τότε είναι κλειστό.

B. Ένα $x \in A$ το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A λέγεται **μεμονωμένο σημείο** του A. Δηλαδή, ένα $x \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$.
Για παράδειγμα, θεωρούμε το $\mathbb{N}$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Κάθε σημείο του $\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του.

Ορισμός Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται **συνοριακό σημείο** (*boundary point*) του A αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A και σημείο του A^c. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A λέγεται **σύνορο** (*boundary*) του A και συμβολίζεται με $\mathrm{bd}(A)$ ή $\partial(A)$.

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε,

(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

Απόδειξη. Έχουμε $x \in \mathrm{bd}(A)$ αν και μόνο αν κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A και με το A^c. Από την άλλη πλευρά, $x \in \mathrm{bd}(A^c)$ αν και μόνο αν κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A^c και με το $(A^c)^c = A$. Είναι λοιπόν φανερό ότι $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A)$.

Απόδειξη. Αν $x \in \mathrm{bd}(A)$ τότε κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A, άρα $x \in \overline{A}$. Δηλαδή, $\mathrm{bd}(A) \subseteq \overline{A}$. Επίσης, $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς, $\overline{A} \supseteq \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A}$ και ας υποθέσουμε ότι $x \notin A^\circ$. Τότε, κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A και δεν περιέχεται στο A άρα έχει μη κενή τομή με το A^c. Έπεται ότι $x \in \mathrm{bd}(A)$. Δείξαμε ότι $\overline{A} \setminus A^\circ \subseteq \mathrm{bd}(A)$, άρα $\overline{A} \subseteq \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A^c)$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $X = \overline{A} \cup (X \setminus A)^\circ$. Χρησιμοποιώντας το (β) συμπεραίνουμε ότι $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$. Ισοδύναμα, $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Ειδικότερα, το $\mathrm{bd}(A)$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{bd}(A) \cap A^\circ = \emptyset$ (αν $x \in A^\circ$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ δηλαδή $B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$, άρα $x \notin \mathrm{bd}(A)$). Είδαμε ότι $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$, άρα $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$.
Χρησιμοποιώντας την $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Έπεται ότι το $\mathrm{bd}(A)$ είναι κλειστό σύνολο (γράφεται ως τομή δύο κλειστών συνόλων).

(ε) Το A είναι κλειστό αν και μόνον αν $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

Απόδειξη. Αν το A είναι κλειστό τότε $\mathrm{bd}(A) \subseteq A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) = \overline{A} = A$. Αν $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$, τότε $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ \subseteq A \cup A = A$, άρα το A είναι κλειστό.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.8. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Η διαγώνιος του $X \times X$ είναι το σύνολο $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό στον $X \times X$ ως προς τη μετρική d_2, όπου*

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d^2(x_1, y_1) + d^2(x_2, y_2)}.$$

Γενικότερα, αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό ως προς κάθε μετρική γινόμενο στον $X \times X$.

Απόδειξη. Έστω ρ μια μετρική γινόμενο στο $X \times X$. Θεωρούμε ακολουθία $(x_n, x_n) \in \Delta$ ώστε $(x_n, x_n) \xrightarrow{\rho} (x, y) \in X \times X$ και αποδεικνύουμε ότι $x = y$, δηλαδή $(x, y) \in \Delta$. Αυτό αποδεικνύει ότι το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times X, \rho)$.

Αφού $(x_n, x_n) \xrightarrow{\rho} (x, y)$ και η ρ είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ και $x_n \xrightarrow{d} y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας στον (X, d) βλέπουμε ότι, πράγματι, $x = y$.

Έχουμε δει ότι η μετρική

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d^2(x_1, y_1) + d^2(x_2, y_2)}$$

είναι μετρική γινόμενο στο $X \times X$. Συνεπώς, το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times X, d_2)$.

3.9. *Υπάρχει άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς; Υπάρχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από άρρητους;*

Απόδειξη. Ένα άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς είναι το $\mathbb{N}$.

Δεν υπάρχει μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να αποτελείται μόνο από άρρητους: θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα και σε κάθε διάστημα υπάρχει ρητός.

3.15. *Έστω* $(X, \|\cdot\|)$ *χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι* $\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$ *για κάθε* $x \in X$ *και κάθε* $r > 0$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Σε κάθε μετρικό χώρο ισχύει $\widehat{B}(x,r) \supseteq \overline{B(x,r)}$. Επίσης, $B(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$. Αφού $\widehat{B}(x,r) = B(x,r) \cup S(x,r)$, για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι

$$S(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}.$$

Έστω $y \in S(x,r)$. Τότε, $\|y-x\| = r$. Θεωρούμε μια ακολουθία (t_n) στο $(0,1)$ με $t_n \to 1$. Ορίζουμε $y_n = x + t_n(y-x)$. Τότε:

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

   $$\|y_n - x\| = \|t_n(y-x)\| = t_n\|y-x\| = t_n r < r,$$

   δηλαδή, $y_n \in B(x,r)$.

2. Ισχύει

   $$\|y-y_n\| = \|y-x-t_n(y-x)\| = \|(1-t_n)(y-x)\| = (1-t_n)\|y-x\| = (1-t_n)r \to 0,$$

   δηλαδή, $y_n \to y$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $y \in \overline{B(x,r)}$. Συνεπώς, $S(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$.

3.22. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x,y\in X$ με $x\neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U,V ώστε $x\in U$, $y\in V$ και $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.*

Απόδειξη. Αφού $x\neq y$, έχουμε $\rho(x,y)=\delta>0$. Θέτουμε $U=B(x,\delta/3)$ και $V=B(y,\delta/3)$. Τα U,V είναι ανοικτά και, προφανώς, $x\in U$, $y\in V$. Παρατηρούμε ότι: αν $z\in\overline{U}=\overline{B(x,\delta/3)}$ τότε $z\in\widehat{B}(x,\delta/3)$, δηλαδή $\rho(x,z)\leqslant\delta/3$. Ομοίως, αν $z\in\overline{V}$ έχουμε $\rho(z,y)\leqslant\delta/3$. Αν λοιπόν $z\in\overline{U}\cap\overline{V}$, τότε

$$\delta=\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\leqslant\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\frac{2\delta}{3}.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.

3.23. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x\in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x\notin F$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U,V ώστε $x\in U$, $F\subseteq V$ και $U\cap V=\emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει, επιπλέον, ότι $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$;*

Υπόδειξη. Αφού το F είναι κλειστό υποσύνολο του X και $x\notin F=\overline{F}$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$B(x,\delta)\cap F=\emptyset.$$

Θέτουμε

$$U=B(x,\delta/3)\text{ και }V=X\setminus\widehat{B}(x,2\delta/3)=\{y\in X:\rho(x,y)>2\delta/3\}.$$

Προφανώς $x\in U$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $F\subseteq V$. Παρατηρούμε ότι:

1. Αν $z\in\overline{U}$ τότε $\rho(z,x)\leqslant\delta/3$.
2. Αν $z\in\overline{V}$ τότε $\rho(z,x)\geqslant 2\delta/3$.

Έπεται ότι $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.

3.24. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Θέτουμε A' το παράγωγο σύνολο του A, δηλαδή το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) $\overline{A}=A\cup A'$. *Συμπεράνατε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.*

(β) *Το A' είναι κλειστό σύνολο.*

(γ) *Αν $A\subseteq B\subseteq X$ τότε $A'\subseteq B'$.*

(δ) $A'=(\overline{A})'$. *Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.*

(ε) $(A')'\subseteq A'$. *Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.*

Απόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι $A\subseteq\overline{A}$. Επίσης, αν $x\in A'$ τότε κάθε ανοικτή μπάλα $B(x,\varepsilon)$ περιέχει σημεία του A (και μάλιστα διαφορετικά από το x), άρα $x\in\overline{A}$. Αυτό δείχνει ότι $A'\subseteq\overline{A}$ και έπεται ότι $A\cup A'\subseteq\overline{A}$. Αντίστροφα, αν $x\in\overline{A}$ και $x\notin A$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ έχουμε $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ και $x\notin A$, άρα $B(x,\varepsilon)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$ (υπάρχει σημείο του A στην $B(x,\varepsilon)$ και αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι το x). Συνεπώς, $x\in A'$. Δείξαμε ότι $\overline{A}\setminus A\subseteq A'$, άρα $\overline{A}\subseteq A\cup A'$.

Δείχνουμε τώρα ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του: αν το A είναι κλειστό, τότε $A=\overline{A}=A\cup A'$, άρα $A'\subseteq A$. Αντίστροφα, αν $A'\subseteq A$ τότε $\overline{A}=A\cup A'\subseteq A\cup A=A$. Αφού $\overline{A}\subseteq A$, το A είναι κλειστό.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι το A' περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του. Έστω x σημείο συσσώρευσης του A'. Υπάρχει τότε μια ακολουθία (b_n) στο A' με $b_n\to x$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, αφού το b_n είναι σημείο συσσώρευσης του A, στη μπάλα με κέντρο b_n και ακτίνα $\frac{1}{n}$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A. Επιλέγουμε λοιπόν $a_n\in B(b_n,\frac{1}{n})\cap A$ με $a_n\neq x$. Τότε $a_n\to x$. Έπεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή $x\in A'$. Συμπεραίνουμε ότι το A' είναι κλειστό.

(γ) Έστω $x\in A'$ και έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $y\in A$, $y\neq x$ ώστε $y\in B(x,\varepsilon)$. Αφού $A\subseteq B$ έχουμε $y\in B$. Συνεπώς, $y\in B(x,\varepsilon)\cap(B\setminus\{x\})$. Άρα, $y\in B'$.

(δ) Από το (γ) βλέπουμε ότι $A' \subseteq (\overline{A})'$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$).

Αντίστροφα, έστω $x \in (\overline{A})'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in \overline{A}$ ώστε $y \neq x$ και $y \in B(x,\varepsilon)$. Επίσης, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ και $x \notin B(y,\delta)$ (αυτό γίνεται αν επιλέξουμε $\delta > 0$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις $\delta < \rho(x,y)$ και $\delta < \varepsilon - \rho(x,y)$). Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $z \in A$ με $z \in B(y,\delta)$. Τότε, $z \in A$, $z \neq x$ και $z \in B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $x \in A'$.

(ε) Από το (α) έχουμε $(A')' \subseteq \overline{A'}$. Όμως, είδαμε στο (β) ότι το A' είναι κλειστό. Δηλαδή, $\overline{A'} = A'$. Έπεται ότι $(A')' \subseteq A'$.

Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, θεωρήστε το σύνολο $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $A' = \{0\}$ και $(A')' = \emptyset$.

3.25. *Εξετάστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς:*
(α) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$.*
(β) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$.*
(γ) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη. (α) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{n + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(γ) Δεν υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης οποιουδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό σύνολο. Όμως, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.27. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:
(α) $\mathrm{dist}(x,A) = 0$ *αν και μόνο αν* $x \in \overline{A}$.
(β) $|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \rho(x,y)$ *για κάθε* $x,y \in X$.
(γ) *Το σύνολο* $\{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon\}$ *είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο* $\{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$ *είναι κλειστό.*
(δ) *Αν* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, *τότε* $\mathrm{dist}(x,A) = \mathrm{dist}(x,B)$ *για κάθε* $x \in X$.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) = 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(x,a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.
(β) Έστω $x,y \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a)$, δηλαδή $\mathrm{dist}(x,A) - \rho(x,y) \leqslant \rho(y,a)$ για κάθε $a \in A$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,A) - \rho(x,y) \leqslant \mathrm{dist}(y,A)$, άρα

$$\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A) \leqslant \rho(x,y).$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι $\mathrm{dist}(y,A) - \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,y)$, άρα

$$|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \rho(x,y).$$

(γ) Έστω $U = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon\}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in U$ και επιλέγουμε $0 < \delta < \varepsilon - \mathrm{dist}(x,A)$. Για κάθε $y \in B(x,\delta)$ ισχύει $\mathrm{dist}(y,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,A) + \rho(y,x) < \varepsilon$. Άρα, $B(y,\delta) \subseteq U$. Αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό.

Έστω $F = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$. Θεωρούμε $x_n \in F$ με $x_n \to x$. Τότε, $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x_n,A) + \rho(x_n,x) \leqslant \varepsilon + \rho(x_n,x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon + \rho(x_n,x) \to \varepsilon$ διότι $\rho(x_n,x) \to 0$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon$ δηλαδή $x \in F$. Αυτό αποδεικνύει ότι το F είναι κλειστό.
(δ) Από την $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,\overline{A}) \leqslant \mathrm{dist}(x,B) \leqslant \mathrm{dist}(x,A)$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,\overline{A})$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in \overline{A}$ ώστε $\rho(x,y) < \mathrm{dist}(x,\overline{A}) + \varepsilon$. Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(y,a) < \varepsilon$. Τότε, $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a) < \mathrm{dist}(x,\overline{A}) + 2\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,\overline{A})$.

3.26. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$, η απόσταση του A από το B ορίζεται ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της απόστασης:
(α) *αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε* $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.
(β) $\mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B}) = \mathrm{dist}(A,B)$.
(γ) $\mathrm{dist}(A, B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}$.
(δ) *Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B ενός μετρικού χώρου (X,ρ) τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε, $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho(x,x) = 0$. 'ρα, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.
(β) Αφού $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ έχουμε

$$\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} \subseteq \{\rho(a,b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\}.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} \geqslant \inf\{\rho(a,b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\} = \mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B}).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και τυχόντα $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $\rho(a,x) < \varepsilon$ και $\rho(y,b) < \varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho(a,b) \leqslant \rho(a,x) + \rho(x,y) + \rho(y,b) < \rho(x,y) + 2\varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\mathrm{dist}(A,B) - 2\varepsilon < \rho(x,y)$$

για κάθε $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Έπεται ότι

$$\mathrm{dist}(A,B) - 2\varepsilon \leqslant \mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B}).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B})$.
(γ) Από τις $B \subseteq B \cup C$ και $C \subseteq B \cup C$ έπεται άμεσα ότι $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \mathrm{dist}(A,B)$ και $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \mathrm{dist}(A,C)$. Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $x \in A$ και $y \in B \cup C$ ώστε $\rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B \cup C) + \varepsilon$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $y \in B$ τότε $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C)+\varepsilon$.
2. Αν $y \in C$ τότε $\mathrm{dist}(A,C) \leqslant \rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C)+\varepsilon$.

Έπεται ότι

$$\min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\} < \mathrm{dist}(A, B\cup C)+\varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.
(δ) Ένα παράδειγμα στο Ευκλείδειο επίπεδο δίνουν τα σύνολα $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$ (εξηγήστε γιατί είναι κλειστά). Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \left\| \left(x, \frac{1}{x}\right) - (x,0) \right\|_2 = \frac{1}{x},$$

άρα $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

Ένα παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ δίνουν τα σύνολα $A = \mathbb{N} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \left\{n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \left| n - \left(n + \frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{1}{2n},$$

άρα $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.