Ασκήσεις

3.15. *Έστω* $(X, \|\cdot\|)$ *χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι* $\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$ *για κάθε* $x \in X$ *και κάθε* $r > 0$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Σε κάθε μετρικό χώρο ισχύει $\widehat{B}(x,r) \supseteq \overline{B(x,r)}$. Επίσης, $B(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$. Αφού $\widehat{B}(x,r) = B(x,r) \cup S(x,r)$, για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι

$$S(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}.$$

Έστω $y \in S(x,r)$. Τότε, $\|y - x\| = r$. Θεωρούμε μια ακολουθία (t_n) στο $(0,1)$ με $t_n \to 1$. Ορίζουμε $y_n = x + t_n(y - x)$. Τότε:

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

   $$\|y_n - x\| = \|t_n(y - x)\| = t_n\|y - x\| = t_n r < r,$$

   δηλαδή, $y_n \in B(x,r)$.

2. Ισχύει

   $$\|y - y_n\| = \|y - x - t_n(y - x)\| = \|(1 - t_n)(y - x)\| = (1 - t_n)\|y - x\| = (1 - t_n)r \to 0,$$

   δηλαδή, $y_n \to y$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $y \in \overline{B(x,r)}$. Συνεπώς, $S(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$.

3.22. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x,y\in X$ με $x\neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U,V ώστε $x\in U$, $y\in V$ και $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.*

Απόδειξη. Αφού $x\neq y$, έχουμε $\rho(x,y)=\delta>0$. Θέτουμε $U=B(x,\delta/3)$ και $V=B(y,\delta/3)$. Τα U,V είναι ανοικτά και, προφανώς, $x\in U$, $y\in V$. Παρατηρούμε ότι: αν $z\in\overline{U}=\overline{B(x,\delta/3)}$ τότε $z\in\widehat{B}(x,\delta/3)$, δηλαδή $\rho(x,z)\leqslant\delta/3$. Ομοίως, αν $z\in\overline{V}$ έχουμε $\rho(z,y)\leqslant\delta/3$. Αν λοιπόν $z\in\overline{U}\cap\overline{V}$, τότε

$$\delta=\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\leqslant\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\frac{2\delta}{3}.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.

3.23. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x\in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x\notin F$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U,V ώστε $x\in U$, $F\subseteq V$ και $U\cap V=\emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει, επιπλέον, ότι $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$;*

Απόδειξη. Αφού το F είναι κλειστό υποσύνολο του X και $x\notin F=\overline{F}$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$B(x,\delta)\cap F=\emptyset.$$

Θέτουμε

$$U=B(x,\delta/3)\text{ και }V=X\setminus\widehat{B}(x,2\delta/3)=\{y\in X:\rho(x,y)>2\delta/3\}.$$

Προφανώς $x\in U$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $F\subseteq V$. Παρατηρούμε ότι:

1. Αν $z\in\overline{U}$ τότε $\rho(z,x)\leqslant\delta/3$.
2. Αν $z\in\overline{V}$ τότε $\rho(z,x)\geqslant 2\delta/3$.

Έπεται ότι $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.

3.24. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Θέτουμε A' το παράγωγο σύνολο του A, δηλαδή το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *$\overline{A} = A \cup A'$. Συμπεράνατε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.*

(β) *Το A' είναι κλειστό σύνολο.*

(γ) *Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $A' \subseteq B'$.*

(δ) *$A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.*

(ε) *$(A')' \subseteq A'$. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.*

Απόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq \overline{A}$. Επίσης, αν $x \in A'$ τότε κάθε ανοικτή μπάλα $B(x,\varepsilon)$ περιέχει σημεία του A (και μάλιστα διαφορετικά από το x), άρα $x \in \overline{A}$. Αυτό δείχνει ότι $A' \subseteq \overline{A}$ και έπεται ότι $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Αντίστροφα, αν $x \in \overline{A}$ και $x \notin A$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $x \notin A$, άρα $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (υπάρχει σημείο του A στην $B(x,\varepsilon)$ και αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι το x). Συνεπώς, $x \in A'$. Δείξαμε ότι $\overline{A} \setminus A \subseteq A'$, άρα $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

Δείχνουμε τώρα ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του: αν το A είναι κλειστό, τότε $A = \overline{A} = A \cup A'$, άρα $A' \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $A' \subseteq A$ τότε $\overline{A} = A \cup A' \subseteq A \cup A = A$. Αφού $\overline{A} \subseteq A$, το A είναι κλειστό.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι το A' περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του. Έστω x σημείο συσσώρευσης του A'. Υπάρχει τότε μια ακολουθία (b_n) στο A' με $b_n \to x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού το b_n είναι σημείο συσσώρευσης του A, στη μπάλα με κέντρο b_n και ακτίνα $\frac{1}{n}$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A. Επιλέγουμε λοιπόν $a_n \in B(b_n, \frac{1}{n}) \cap A$ με $a_n \neq x$. Τότε $a_n \to x$. Έπεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή $x \in A'$. Συμπεραίνουμε ότι το A' είναι κλειστό.

(γ) Έστω $x \in A'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in A$, $y \neq x$ ώστε $y \in B(x,\varepsilon)$. Αφού $A \subseteq B$ έχουμε $y \in B$. Συνεπώς, $y \in B(x,\varepsilon) \cap (B \setminus \{x\})$. Άρα, $y \in B'$.

(δ) Από το (γ) βλέπουμε ότι $A' \subseteq (\overline{A})'$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$).

Αντίστροφα, έστω $x \in (\overline{A})'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in \overline{A}$ ώστε $y \neq x$ και $y \in B(x,\varepsilon)$. Επίσης, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ και $x \notin B(y,\delta)$ (αυτό γίνεται αν επιλέξουμε $\delta > 0$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις $\delta < \rho(x,y)$ και $\delta < \varepsilon - \rho(x,y)$). Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $z \in A$ με $z \in B(y,\delta)$. Τότε, $z \in A$, $z \neq x$ και $z \in B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $x \in A'$.

(ε) Από το (α) έχουμε $(A')' \subseteq \overline{A'}$. Όμως, είδαμε στο (β) ότι το A' είναι κλειστό. Δηλαδή, $\overline{A'} = A'$. Έπεται ότι $(A')' \subseteq A'$.

Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, θεωρήστε το σύνολο $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $A' = \{0\}$ και $(A')' = \emptyset$.

3.25. *Εξετάστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς:*
(α) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$.*
(β) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$.*
(γ) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη. (α) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{ n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{ n + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

(γ) Δεν υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης οποιουδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό σύνολο. Όμως, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.27. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:
(α) $\mathrm{dist}(x,A) = 0$ *αν και μόνο αν* $x \in \overline{A}$.
(β) $|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \rho(x,y)$ *για κάθε* $x,y \in X$.
(γ) *Το σύνολο* $\{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon\}$ *είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο* $\{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$ *είναι κλειστό.*
(δ) *Αν* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, *τότε* $\mathrm{dist}(x,A) = \mathrm{dist}(x,B)$ *για κάθε* $x \in X$.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) = 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(x,a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.
(β) Έστω $x,y \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a)$, δηλαδή $\mathrm{dist}(x,A) - \rho(x,y) \leqslant \rho(y,a)$ για κάθε $a \in A$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,A) - \rho(x,y) \leqslant \mathrm{dist}(y,A)$, άρα

$$\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A) \leqslant \rho(x,y).$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι $\mathrm{dist}(y,A) - \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,y)$, άρα

$$|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \rho(x,y).$$

(γ) Έστω $U = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon\}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in U$ και επιλέγουμε $0 < \delta < \varepsilon - \mathrm{dist}(x,A)$. Για κάθε $y \in B(x,\delta)$ ισχύει $\mathrm{dist}(y,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,A) + \rho(y,x) < \varepsilon$. Άρα, $B(y,\delta) \subseteq U$. Αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό.

Έστω $F = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$. Θεωρούμε $x_n \in F$ με $x_n \to x$. Τότε, $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x_n,A) + \rho(x_n,x) \leqslant \varepsilon + \rho(x_n,x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon + \rho(x_n,x) \to \varepsilon$ διότι $\rho(x_n,x) \to 0$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon$ δηλαδή $x \in F$. Αυτό αποδεικνύει ότι το F είναι κλειστό.
(δ) Από την $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,\overline{A}) \leqslant \mathrm{dist}(x,B) \leqslant \mathrm{dist}(x,A)$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,\overline{A})$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in \overline{A}$ ώστε $\rho(x,y) < \mathrm{dist}(x,\overline{A}) + \varepsilon$. Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(y,a) < \varepsilon$. Τότε, $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a) < \mathrm{dist}(x,\overline{A}) + 2\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,\overline{A})$.

3.26. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$, η απόσταση του A από το B ορίζεται ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της απόστασης:
(α) *αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.*
(β) $\mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}) = \mathrm{dist}(A,B)$.
(γ) $\mathrm{dist}(A, B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}$.
(δ) *Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B ενός μετρικού χώρου (X,ρ) τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε, $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho(x,x) = 0$. Άρα, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.
(β) Αφού $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ έχουμε

$$\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} \subseteq \{\rho(a,b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\}.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} \geqslant \inf\{\rho(a,b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\} = \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και τυχόντα $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $\rho(a,x) < \varepsilon$ και $\rho(y,b) < \varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho(a,b) \leqslant \rho(a,x) + \rho(x,y) + \rho(y,b) < \rho(x,y) + 2\varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\mathrm{dist}(A,B) - 2\varepsilon < \rho(x,y)$$

για κάθε $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Έπεται ότι

$$\mathrm{dist}(A,B) - 2\varepsilon \leqslant \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B})$.
(γ) Από τις $B \subseteq B \cup C$ και $C \subseteq B \cup C$ έπεται άμεσα ότι $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \mathrm{dist}(A,B)$ και $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \mathrm{dist}(A,C)$. Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $x \in A$ και $y \in B \cup C$ ώστε $\rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B \cup C) + \varepsilon$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $y \in B$ τότε $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$.
2. Αν $y \in C$ τότε $\mathrm{dist}(A,C) \leqslant \rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$.

Έπεται ότι

$$\min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\} < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.
(δ) Ένα παράδειγμα στο Ευκλείδειο επίπεδο δίνουν τα σύνολα $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$ (εξηγήστε γιατί είναι κλειστά). Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \left\| \left(x, \frac{1}{x}\right) - (x,0) \right\|_2 = \frac{1}{x},$$

άρα $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

Ένα παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ δίνουν τα σύνολα $A = \mathbb{N} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \left\{n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \left| n - \left(n + \frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{1}{2n},$$

άρα $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

3.28. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι*

$$A' = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = 0\}.$$

Απόδειξη. Έχουμε $x \in A'$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A \setminus \{x\}$ ώστε $\rho(x,a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν

$$\mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A \setminus \{x\}\} = 0.$$

Πυκνά σύνολα και διαχωρισιμότητα

Πυκνά υποσύνολα

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Το D λέγεται **πυκνό** (*dense*) στον X, αν $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα.

(α) Τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(β) Ο c_{00} είναι πυκνός στον $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

Απόδειξη του (β). Θα δείξουμε ότι κάθε 1–αθροίσιμη ακολουθία προσεγγίζεται από τελικά μηδενική ακολουθία. Έστω $a = (a_n) \in \ell^1$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, και έστω $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο Cauchy για αθροίσιμες σειρές έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Θέτουμε $x = (a_1, ..., a_{n_0}, 0, ...) \in c_{00}$. Τότε,

$$d_1(a, x) = \|a - x\|_1 = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon,$$

δηλαδή $x \in B_{d_1}(a, \varepsilon)$. Άρα, $c_{00} \cap B_{d_1}(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $a \in \overline{c_{00}}$.

(γ) (*Θεώρημα Kronecker*). Έστω $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Το σύνολο

$$D(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (Άσκηση).

Πρόταση Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το D είναι πυκνό στον X.

(β) Αν F κλειστό και $D \subseteq F$, τότε $F = X$.

(γ) Για κάθε μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ ισχύει $G \cap D \neq \emptyset$.

(δ) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

(ε) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του D ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(στ) $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του X ώστε $D \subseteq F$. Τότε, $\overline{D} \subseteq F$ δηλαδή $X \subseteq F$.

(β)⇒(γ) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ με $G \cap D = \emptyset$. Τότε, $D \subseteq G^c$. Αφού το G^c είναι κλειστό, από την υπόθεση έχουμε ότι $G^c = X$, δηλαδή $G = \emptyset$, άτοπο.

(γ)⇒(δ) Προφανής, αφού κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

(δ)⇒(ε) Έστω $x \in X$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $D \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία (x_n) στοιχείων του D με $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\rho(x_n, x) \to 0$, έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(ε)⇒(στ) Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(X \setminus D) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $x \in X \setminus D$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus D$. Δηλαδή, $B(x, \varepsilon) \cap D = \emptyset$. Από την υπόθεση υπάρχει $(x_n) \subseteq D$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Άρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Τότε, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ και $x_n \in D$ το οποίο είναι άτοπο, διότι $B(x, \varepsilon) \cap D = \emptyset$.

(στ)⇒(α) Από τον δυϊσμό κλειστής θήκης - εσωτερικού έχουμε $X \setminus \overline{D} = (X \setminus D)^\circ$. Έχουμε υποθέσει ότι $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$, άρα $X \setminus \overline{D} = \emptyset$. Δηλαδή, $\overline{D} = X$.

Πρόταση Το $\mathbb{Q}^n$ είναι πυκνό στον ℓ_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leqslant p < \infty$ (η περίπτωση $p = \infty$ αφήνεται ως άσκηση).

Έστω $x = (x(1), \ldots, x(n)) \in \ell_p^n$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ μπορούμε να βρούμε $q(i) \in \mathbb{Q}$ ώστε $|q(i) - x(i)|^p < \frac{\varepsilon^p}{n}$. Θέτουμε $q = (q(1), \ldots, q(n))$. Τότε, $q \in \mathbb{Q}^n$ και, από τον ορισμό της p–μετρικής,

$$d_p(x, q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x(i) - q(i)|^p \right)^{1/p} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{n} \right)^{1/p} = \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, έπεται το συμπέρασμα.

Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται **διαχωρίσιμος** (*separable*) αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Δηλαδή, αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ του X ώστε $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα

(α) Ο $\mathbb{R}^n$, με οποιαδήποτε από τις p–μετρικές, είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του είναι το $\mathbb{Q}^n$.

(β) Οι χώροι ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $D = \{x \in c_{00} : x_i \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον ℓ^p. Αρχικά δείχνουμε ότι το D είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, η απεικόνιση $f : D \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ με

$$x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \xmapsto{f} (x_1, \ldots, x_n),$$

είναι 1-1 και το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο.

Δείχνουμε τώρα ότι το D είναι πυκνό στον ℓ^p. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x = (x_n) \in \ell^p$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n_0$, από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $q_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|x_i - q_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n_0}$. Αν θέσουμε $q = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, \ldots)$ έχουμε $q \in D$ και

$$d_p^p(x, q) = \sum_{n=1}^{n_0} |x_i - q_i|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < n_0 \cdot \frac{\varepsilon^p}{2n_0} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή, $d_p(x, q) < \varepsilon$. Συνεπώς, το D είναι πυκνό στον ℓ^p. $\square$

Όπως θα δούμε σε λίγο, ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται **βάση** για την τοπολογία του X αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό σύνολο $V \subseteq X$ και για κάθε $x \in V$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq V$.

Για παράδειγμα, για κάθε μετρικό χώρο X, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \ x \in X, \varepsilon > 0\}$$

είναι μια βάση για την τοπολογία του X.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων μέσω του πληθαρίθμου μιας βάσης της τοπολογίας τους. Πιο συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Θεώρημα Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι διαχωρίσιμος.

(β) Υπάρχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, η οποία έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$.

Απόδειξη. (α)⇒(β). Έστω $D = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{O} = \left\{ B(x_n, q) : q \in \mathbb{Q}^+,\, x_n \in D \right\},$$

η οποία είναι αριθμήσιμη και αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X. Θα δείξουμε ότι αυτή έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και έστω $x \in G$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq G$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < 2q < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, η μπάλα $B(x,q)$ περιέχει ένα στοιχείο του D, έστω x_n. Παρατηρήστε ότι $x \in B(x_n, q)$ (αφού $x_n \in B(x,q)$) και $B(x_n,q) \subseteq G$. Πράγματι, αν $y \in B(x_n, q)$ τότε

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) < q + q < \varepsilon,$$

δηλαδή $y \in B(x,\varepsilon) \subseteq G$.

(β)⇒(α). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια

$$\mathcal{O} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί το (β). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε τυχόν $x_n \in U_n$. Τότε, το $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X, αφού τέμνει κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο.

Πόρισμα Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Κάθε υπόχωρος A του X είναι επίσης διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$. Τότε, η αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του υποχώρου A και έχει την ίδια ιδιότητα. Άρα, ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Έπεται ειδικότερα ότι το σύνολο των αρρήτων $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Άσκηση Βρείτε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο για να δείχνουμε ότι ένας μετρικός χώρος *δεν* είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, ο (X, ρ) δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος. Τότε, έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D. Θεωρούμε τις μπάλες $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, $x \in A$. Αυτές είναι ξένες ανά δύο και υπεραριθμήσιμες το πλήθος. Καθώς το D είναι πυκνό, έχουμε $D \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή υπάρχει $d_x \in D$ ώστε $d_x \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Ορίζουμε την απεικόνιση $A \ni x \longmapsto d_x \in D$, η οποία είναι 1-1. Δηλαδή, το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του D. Άτοπο, διότι το D είναι αριθμήσιμο, ενώ το A υπεραριθμήσιμο.

Άσκηση Σε κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (X, ρ) κάθε οικογένεια από ξένες ανοικτές μπάλες είναι το πολύ αριθμήσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος και έστω $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του. Έστω $\mathcal{C} = \{B(y_i, \varepsilon_i) : \ i \in I\}$ μια οικογένεια από ξένες ανά δύο ανοικτές μπάλες του X. Αφού το D είναι πυκνό, κάθε μπάλα περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του D. Για κάθε $i \in I$, έστω

$$n_i = \min\left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(y_i, \varepsilon_i)\right\}.$$

Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$f : \mathcal{C} \to D \ \text{ με } \ f\Big(B(y_i, \varepsilon_i)\Big) = x_{n_i}.$$

Αφού, για κάθε $i \in I$, $x_{n_i} \in B(y_i, \varepsilon_i)$ και οι μπάλες $B(y_i, \varepsilon_i)$, $i \in I$, είναι ξένες ανά δύο, η απεικόνιση f είναι $1-1$. Έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι αριθμήσιμη.

Δίνουμε τώρα κάποια παραδείγματα μη διαχωρίσιμων μετρικών χώρων.

Παραδείγματα

(α) Ο $(\mathbb{R}, \delta)$ δηλαδή, το $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση με $A = \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $\delta(x, y) = 1$ αν $x \neq y$ και το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Συνεπώς, ο $(\mathbb{R}, \delta)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Γενικότερα, αν έχουμε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο S και το εφοδιάσουμε με τη διακριτή μετρική τότε ο (S, δ) είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

(β) Ο $\ell^\infty \equiv (\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Στον ℓ^∞ θεωρούμε το σύνολο $S = \{\chi_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$, όπου χ_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \notin A$. Τότε, το S είναι ισοπληθικό με το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο (Cantor). Επιπλέον, αν $A \neq B$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο οποίο θα διαφέρουν, οπότε $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| \geqslant 1$ άρα $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty \geqslant 1$.
Συμπεραίνουμε ότι ο ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Ασκήσεις

3.35. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.*

(β) *Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;*

(γ) *Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό υποσύνολο του X;*

Απόδειξη. (α) Από την $D \cap G \subseteq G$ έχουμε $\overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$.
Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $B(x, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$. Το $B(x, \varepsilon) \cap G$ είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων και μη κενό και το D είναι πυκνό, άρα $(B(x, \varepsilon) \cap G) \cap D \neq \emptyset$, δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap (G \cap D) \neq \emptyset$. Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $x \in \overline{G \cap D}$.
Έπεται ότι $\overline{G} \subseteq \overline{G \cap D}$ και τελικά $\overline{G} = \overline{G \cap D}$.

(β) Από το (α) έχουμε $\overline{G \cap D} = \overline{G}$. Όμως, $\overline{G} = X$ διότι το G έχει υποτεθεί και πυκνό. Συνεπώς, $\overline{G \cap D} = X$ και το $G \cap D$ είναι πυκνό.

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό είναι ουσιαστική: η τομή δύο πυκνών συνόλων δεν είναι απαραίτητα πυκνό σύνολο. Για παράδειγμα, το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

(γ) Δεν είναι πάντα σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι πυκνό υποσύνολο του X. Για παράδειγμα, θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ σαν υπόχωρο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική). Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ το σύνολο $F_N = \{q_1, \ldots, q_N\}$ είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο, άρα το $G_N = \mathbb{Q} \setminus F_N$ είναι ανοικτό. Επίσης, κάθε G_N είναι πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$: αν $q \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon > 0$ τότε στην $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί, άρα και κάποιος q_n με δείκτη $n > N$. Δηλαδή, $B(x, \varepsilon) \cap G_N \neq \emptyset$.
Είδαμε ότι κάθε G_N είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Όμως, $\bigcap_{N=1}^{\infty} G_N = \emptyset$ αφού, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, $q_N \notin G_N$ άρα $q_N \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$.