Πυκνά υποσύνολα

Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Το D λέγεται **πυκνό** (*dense*) στον X, αν $\overline{D} = X$.

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το D είναι πυκνό στον X.

(β) Αν F κλειστό και $D \subseteq F$, τότε $F = X$.

(γ) Για κάθε μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ ισχύει $G \cap D \neq \emptyset$.

(δ) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $D \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.

(ε) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του D ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(στ) $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του X ώστε $D \subseteq F$. Τότε, $\overline{D} \subseteq F$ δηλαδή $X \subseteq F$.

(β)⇒(γ) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό ανοικτό $G \subseteq X$ με $G \cap D = \emptyset$. Τότε, $D \subseteq G^c$. Αφού το G^c είναι κλειστό, από την υπόθεση έχουμε ότι $G^c = X$, δηλαδή $G = \emptyset$, άτοπο.

(γ)⇒(δ) Προφανής, αφού κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

(δ)⇒(ε) Έστω $x \in X$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $D \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία (x_n) στοιχείων του D με $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\rho(x_n, x) \to 0$, έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(ε)⇒(στ) Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(X \setminus D) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $x \in X \setminus D$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus D$. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon) \cap D = \emptyset$. Από την υπόθεση υπάρχει $(x_n) \subseteq D$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Άρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Τότε, $x_n \in B(x,\varepsilon)$ και $x_n \in D$ το οποίο είναι άτοπο, διότι $B(x,\varepsilon) \cap D = \emptyset$.

(στ)⇒(α) Από τον δυϊσμό κλειστής θήκης - εσωτερικού έχουμε $X \setminus \overline{D} = (X \setminus D)^\circ$. Έχουμε υποθέσει ότι $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$, άρα $X \setminus \overline{D} = \emptyset$. Δηλαδή, $\overline{D} = X$.

Πρόταση Το $\mathbb{Q}^n$ είναι πυκνό στον ℓ_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leqslant p < \infty$ (η περίπτωση $p = \infty$ αφήνεται ως άσκηση).

Έστω $x = (x(1), \ldots, x(n)) \in \ell_p^n$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ μπορούμε να βρούμε $q(i) \in \mathbb{Q}$ ώστε $|q(i) - x(i)|^p < \frac{\varepsilon^p}{n}$. Θέτουμε $q = (q(1), \ldots, q(n))$. Τότε, $q \in \mathbb{Q}^n$ και, από τον ορισμό της p–μετρικής,

$$d_p(x, q) = \left(\sum_{i=1}^n |x(i) - q(i)|^p \right)^{1/p} < \left(\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^p}{n} \right)^{1/p} = \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, έπεται το συμπέρασμα.

Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται **διαχωρίσιμος** (*separable*) αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Δηλαδή, αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ του X ώστε $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα

(α) Ο $\mathbb{R}^n$, με οποιαδήποτε από τις p–μετρικές, είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του είναι το $\mathbb{Q}^n$.

(β) Οι χώροι ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $D = \{x \in c_{00} : x_i \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον ℓ^p. Αρχικά δείχνουμε ότι το D είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, η απεικόνιση $f : D \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ με

$$x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \overset{f}{\longmapsto} (x_1, \ldots, x_n),$$

είναι 1-1 και το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο.

Δείχνουμε τώρα ότι το D είναι πυκνό στον ℓ^p. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x = (x_n) \in \ell^p$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n_0$, από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $q_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|x_i - q_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n_0}$. Αν θέσουμε $q = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, \ldots)$ έχουμε $q \in D$ και

$$d_p^p(x, q) = \sum_{n=1}^{n_0} |x_i - q_i|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < n_0 \cdot \frac{\varepsilon^p}{2n_0} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή, $d_p(x, q) < \varepsilon$. Συνεπώς, το D είναι πυκνό στον ℓ^p. $\square$

Όπως θα δούμε σε λίγο, ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται **βάση** για την τοπολογία του X αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό σύνολο $V \subseteq X$ και για κάθε $x \in V$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq V$.

Για παράδειγμα, για κάθε μετρικό χώρο X, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \ x \in X, \varepsilon > 0\}$$

είναι μια βάση για την τοπολογία του X.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων μέσω του πληθαρίθμου μιας βάσης της τοπολογίας τους. Πιο συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Θεώρημα Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι διαχωρίσιμος.

(β) Υπάρχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, η οποία έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$.

Απόδειξη. (α)⇒(β). Έστω $D = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{O} = \left\{ B(x_n, q) : q \in \mathbb{Q}^+,\, x_n \in D \right\},$$

η οποία είναι αριθμήσιμη και αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X. Θα δείξουμε ότι αυτή έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και έστω $x \in G$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq G$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < 2q < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, η μπάλα $B(x,q)$ περιέχει ένα στοιχείο του D, έστω x_n. Παρατηρήστε ότι $x \in B(x_n, q)$ (αφού $x_n \in B(x,q)$) και $B(x_n,q) \subseteq G$. Πράγματι, αν $y \in B(x_n, q)$ τότε

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) < q + q < \varepsilon,$$

δηλαδή $y \in B(x,\varepsilon) \subseteq G$.

(β)⇒(α). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια

$$\mathcal{O} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί το (β). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε τυχόν $x_n \in U_n$. Τότε, το $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X, αφού τέμνει κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο.

Πόρισμα Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Κάθε υπόχωρος A του X είναι επίσης διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$. Τότε, η αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του υποχώρου A και έχει την ίδια ιδιότητα. Άρα, ο (A,ρ_A) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Έπεται ειδικότερα ότι το σύνολο των αρρήτων $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Άσκηση Βρείτε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο για να δείχνουμε ότι ένας μετρικός χώρος *δεν* είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x,y) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, ο (X,ρ) δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος. Τότε, έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D. Θεωρούμε τις μπάλες $B(x,\frac{\varepsilon}{2})$, $x \in A$. Αυτές είναι ξένες ανά δύο και υπεραριθμήσιμες το πλήθος. Καθώς το D είναι πυκνό, έχουμε $D \cap B(x,\frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή υπάρχει $d_x \in D$ ώστε $d_x \in B(x,\frac{\varepsilon}{2})$. Ορίζουμε την απεικόνιση $A \ni x \longmapsto d_x \in D$, η οποία είναι 1-1. Δηλαδή, το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του D. Άτοπο, διότι το D είναι αριθμήσιμο, ενώ το A υπεραριθμήσιμο.

Άσκηση Σε κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (X, ρ) κάθε οικογένεια από ξένες ανοικτές μπάλες είναι το πολύ αριθμήσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος και έστω $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του. Έστω $\mathcal{C} = \{B(y_i, \varepsilon_i) : \ i \in I\}$ μια οικογένεια από ξένες ανά δύο ανοικτές μπάλες του X. Αφού το D είναι πυκνό, κάθε μπάλα περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του D. Για κάθε $i \in I$, έστω

$$n_i = \min \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(y_i, \varepsilon_i)\}.$$

Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$f : \mathcal{C} \to D \ \text{ με } \ f\Big(B(y_i, \varepsilon_i)\Big) = x_{n_i}.$$

Αφού, για κάθε $i \in I$, $x_{n_i} \in B(y_i, \varepsilon_i)$ και οι μπάλες $B(y_i, \varepsilon_i)$, $i \in I$, είναι ξένες ανά δύο, η απεικόνιση f είναι $1-1$. Έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι αριθμήσιμη.

Δίνουμε τώρα κάποια παραδείγματα μη διαχωρίσιμων μετρικών χώρων.

Παραδείγματα

(α) Ο $(\mathbb{R}, \delta)$ δηλαδή, το $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση με $A = \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $\delta(x, y) = 1$ αν $x \neq y$ και το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Συνεπώς, ο $(\mathbb{R}, \delta)$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Γενικότερα, αν έχουμε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο S και το εφοδιάσουμε με τη διακριτή μετρική τότε ο (S, δ) είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

(β) Ο $\ell^\infty \equiv (\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Στον ℓ^∞ θεωρούμε το σύνολο $S = \{\chi_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$, όπου χ_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \notin A$. Τότε, το S είναι ισοπληθικό με το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο (Cantor). Επιπλέον, αν $A \neq B$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο m στο οποίο θα διαφέρουν - δηλαδή το m θα ανήκει στο ένα σύνολο αλλά όχι στο άλλο, οπότε $|\chi_A(m) - \chi_B(m)| = 1$ άρα $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty \geqslant 1$. Συμπεραίνουμε ότι ο ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Ασκήσεις

3.35. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D\cap G}=\overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.*

(β) *Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G\cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;*

(γ) *Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό υποσύνολο του X;*

Απόδειξη. (α) Από την $D\cap G\subseteq G$ έχουμε $\overline{D\cap G}\subseteq\overline{G}$.
Αντίστροφα, έστω $x\in\overline{G}$ και έστω $\varepsilon>0$. Τότε $B(x,\varepsilon)\cap G\neq\emptyset$. Το $B(x,\varepsilon)\cap G$ είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων και μη κενό και το D είναι πυκνό, άρα $(B(x,\varepsilon)\cap G)\cap D\neq\emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon)\cap(G\cap D)\neq\emptyset$. Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$, άρα $x\in\overline{G\cap D}$.
Έπεται ότι $\overline{G}\subseteq\overline{G\cap D}$ και τελικά $\overline{G}=\overline{G\cap D}$.

(β) Από το (α) έχουμε $\overline{G\cap D}=\overline{G}$. Όμως, $\overline{G}=X$ διότι το G έχει υποτεθεί και πυκνό. Συνεπώς, $\overline{G\cap D}=X$ και το $G\cap D$ είναι πυκνό.

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό είναι ουσιαστική: η τομή δύο πυκνών συνόλων δεν είναι απαραίτητα πυκνό σύνολο. Για παράδειγμα, το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

(γ) Δεν είναι πάντα σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι πυκνό υποσύνολο του X. Για παράδειγμα, θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ σαν υπόχωρο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική). Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $\mathbb{Q}=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}$. Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ το σύνολο $F_N=\{q_1,\dots,q_N\}$ είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο, άρα το $G_N=\mathbb{Q}\setminus F_N$ είναι ανοικτό. Επίσης, κάθε G_N είναι πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q},|\cdot|)$: αν $q\in\mathbb{Q}$ και $\varepsilon>0$ τότε στην $B(x,\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί, άρα και κάποιος q_n με δείκτη $n>N$. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon)\cap G_N\neq\emptyset$.
Είδαμε ότι κάθε G_N είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q},|\cdot|)$. Όμως, $\bigcap_{N=1}^{\infty}G_N=\emptyset$ αφού, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, $q_k\notin G_k$ άρα $q_k\notin\bigcap_{N=1}^{\infty}G_N$.

3.38. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subseteq B \subseteq X$. Δείξτε ότι: αν το A είναι πυκνό στο B και το B είναι πυκνό στο X τότε το A είναι πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $x \in X$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού το B είναι πυκνό στο X υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(b,x) < \varepsilon/2$, και αφού το A είναι πυκνό στο B υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(a,b) < \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $d(a,x) < \varepsilon$.

3.40. *Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

(i) *Αν το A είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $A \setminus F$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

(ii) *Αν τα D_1, D_2 είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $D_1 \cap D_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. (i) Σωστό: Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A (διότι, αν τα μόνα σημεία του A ήταν τα $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ τότε στο $(x-\varepsilon, a_1)$ δεν θα υπήρχε σημείο του A, και αυτό είναι άτοπο αφού το A είναι πυκνό). Αφού το $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι άπειρο και το F είναι πεπερασμένο, έχουμε $(A \setminus F) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$.

(ii) Λάθος: το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Άσκηση Έστω X μετρικός χώρος και $x \in X$.
(α) Είναι πάντα σωστό ότι το $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό στον X;
(β) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό στον X.

(ii) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.

(iii) Το σύνολο $\{x\}$ δεν είναι ανοικτό.

Απόδειξη (α) Όχι, για παράδειγμα στον μετρικό χώρο $\mathbb{N}$ με τη συνήθη μετρική, το $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ είναι κλειστό και άρα όχι πυκνό.
Το ίδιο ισχύει σε κάθε χώρο με τη διακριτή μετρική (X, δ): Για κάθε $x \in X$, το $X \setminus \{x\}$ είναι κλειστό, άρα όχι πυκνό στο X.
(β) (i) $\Rightarrow$ (ii) Αφού το $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Έπεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αν το $\{x\}$ ήταν ανοικτό, τότε θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ με $B(x, \varepsilon) = \{x\}$, δηλαδή το x θα ήταν μεμονωμένο σημείο του X, άτοπο.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Αν το $\{x\}$ δεν είναι ανοικτό, τότε $\{x\}^\circ = \emptyset$, άρα

$$\overline{X \setminus \{x\}} = X \setminus \{x\}^\circ = X.$$

Άσκηση Είδαμε ότι ο γραμμικός χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών c_{00} είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ^1. Τό ίδιο ισχύει και αν ανικαταστήσουμε τον ℓ^1 με τον ℓ^p, για οποιοδήποτε p με $1 \leq p < \infty$. Δείξτε όμως ότι ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον ℓ^∞.

Απόδειξη Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $x = (1, 1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$.
Παρατηρούμε ότι, για κάθε $y \in c_{00}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $y(n) = 0$,
άρα $\|x - y\|_\infty \geq |x(n) - y(n)| = 1$. Έπεται ότι $B(x, 1) \cap c_{00} = \emptyset$, δηλαδή $x \notin \overline{c_{00}}$.

3.39. *Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}$, διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$, το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα (για καθεμία ξεχωριστά δώστε παράδειγμα με αιτιολόγηση ή αποδείξτε ότι τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει):*

(α) *Το E είναι άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(β) *Το E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.*

(γ) *Το E είναι ανοικτό αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(δ) *Το E είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

(ε) *Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία (δηλαδή, το $E \setminus E'$ είναι άπειρο σύνολο).*

Υπόδειξη. (α) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\mathbb{Z}$: για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ισχύει $B(m, 1/2) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{m\}) = \emptyset$. Αν $x \notin \mathbb{Z}$ τότε, ακόμα ισχυρότερα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

(β) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{m + \frac{1}{2n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι σημείο συσσώρευσης του E: η ακολουθία $b_n = m + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει στο m και όλοι οι όροι της είναι διάφοροι του m. Το E δεν περιέχει διάστημα (διότι δεν περιέχει άρρητους) άρα δεν έχει εσωτερικά σημεία. Άλλα παραδείγματα είναι το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(γ) Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο: ως ανοικτό και μη κενό, θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, b), και κάθε $x \in (a, b)$ θα ήταν σημείο συσσώρευσης του E.

(δ) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ε) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Περιέχεται στο $[0, 1]$ και το μοναδικό σημείο συσσώρευσής του είναι το 0, δηλαδή κάθε σημείο του είναι μεμονωμένο:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $\frac{1}{n}$ είναι μεμονωμένο σημείο του E, αφού (π.χ. για $n \geqslant 2$) αν πάρουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n(n+1)} = \min\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\} > 0$ τότε το μοναδικό σημείο του E στο $(1/n - \varepsilon_n, 1/n + \varepsilon_n)$ είναι το $1/n$.

3.43. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):*

(α) *Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geqslant 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. (α) Σωστό. Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $D \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, άρα $x_0 \in D$ (ένα πυκνό σύνολο τέμνει κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο).

(β) Σωστό. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (y_m) σημείων του A είναι βασική, άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y_m, y_{m_0}) < 1/2$ για κάθε $m \geqslant m_0$. Αφού οι y_m, y_{m_0} είναι όροι της (x_n), αναγκαστικά έχουμε $y_m = y_{m_0}$, δηλαδή η (y_m) είναι τελικά σταθερή και συγκλίνει στο $y_{m_0} \in A$.

3.45. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \in A$ και (x_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,*

$$B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A.$$

Απόδειξη. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:
(α) $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και
(β) για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A$.

Έστω $z \in B(x_n, 1/n)$. Τότε,

$$d(z,x) \leqslant d(z,x_n) + d(x_n,x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, $z \in B(x,\varepsilon) \implies z \in A$.

3.51. *Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

(β) *Αν S είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X, τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δυο στοιχείων του S, η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.*

Απόδειξη. (α) Έστω M το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι: αν $x \in M$ τότε υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) = \{x\}$. Αφού $B(x, \varepsilon_x) \cap D \neq \emptyset$, έπεται ότι $x \in D$. Δηλαδή, το M είναι υποσύνολο του D. Αφού το D είναι αριθμήσιμο, έπεται ότι το M είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω S υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X. Θεωρούμε τον υπόχωρο (S, ρ_S) του (X, ρ). Αν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος τότε, όπως έχουμε δει, ο (S, ρ_S) είναι επίσης διαχωρίσιμος. Από το (α) έπεται ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του (S, ρ_S) είναι το πολύ αριθμήσιμο. Άρα, υπάρχει $x \in S$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του (S, ρ_S). Από τον χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο S με όρους διαφορετικούς ανά δύο και διαφορετικούς από το x ώστε $x_n \to x$ με τη ρ_S, δηλαδή $x_n \to x$ με τη ρ.

3.18. *Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα.*

Απόδειξη. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος, ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \ \text{ ή } \ G = \bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n),$$

όπου ενδέχεται κάποιο από τα a_n να είναι το $-\infty$ και κάποιο από τα b_n να είναι το $+\infty$. Για κάθε n μπορούμε να βρούμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(a_{n,k})$ ρητών και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(b_{n,k})$ ρητών στο (a_n, b_n) με $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k} = a_n$ και $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n,k} = b_n$ (από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$). Τότε,

$$(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{n,k}, b_{n,k})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$G = \bigcup_{n,k}(a_{n,k}, b_{n,k}),$$

κάθε διάστημα $(a_{n,k}, b_{n,k})$ έχει ρητά άκρα και τα διαστήματα αυτά είναι αριθμήσιμα το πλήθος.

3.19. *Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα (δηλάδή διαφορετικά από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) τα οποία να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ (διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Αφού $A \neq \mathbb{R}$, υπάρχει $x \notin A$.

Το A είναι μη κενό, συνεπώς υπάρχει $y \in A$. Προφανώς $y \neq x$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $y > x$. Ορίζουμε

$$B = \{t \in A : t > x\} = A \cap (x, +\infty).$$

Αφού το A είναι ανοικτό, το B είναι και αυτό ανοικτό (ως τομή δύο ανοικτών). Επίσης το B είναι μη κενό (διότι $y \in B$) και κάτω φραγμένο από το x. Άρα, υπάρχει το $s = \inf B$ και $s \geqslant x$.

Αφού $s = \inf B$, υπάρχει ακολουθία στοιχείων του B που συγκλίνει στο s. Άρα, $s \in \overline{B} \subseteq \overline{A} = A$ διότι το A είναι κλειστό.

Είναι $s \in A$, $x \notin A$ και $s \geqslant x$, άρα $s > x$. Αφού $s \in A$ και $s > x$, παίρνουμε $s = \inf B \in B$.

Όμως το B είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ με $(s-\delta, s+\delta) \subseteq B$, δηλαδή το B περιέχει στοιχεία μικρότερα του $s = \inf B$, άτοπο.

3.20. (α) *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έστω F_n κλειστό υποσύνολο του $(n, n+1)$. Θέτουμε $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.*
(β) *Βρείτε μια ακολουθία ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ της οποίας η ένωση δεν είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότ, αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο F η οποία συγκλίνει σε ένα $x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in F$. Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία (x_n) στοιχείων του F η οποία συγκλίνει. Τότε η (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $-m \leq x_n \leq m$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο σύνολο

$$K = \bigcup_{k=-m}^{m-1} F_k,$$

το οποίο είναι κλειστό ως ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων. Συμπεραίνουμε ότι $x \in K$, δηλαδή $x \in F$, άρα το F είναι κλειστό.
(β) Θέτουμε $F_n = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα F_n είναι κλειστά, ξένα ανά δύο, και

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το F δεν είναι κλειστό σύνολο: αφού $\frac{1}{n} \to 0$, έχουμε $0 \in \overline{F}$. Όμως, $0 \notin F$.