7/10/21

Είδαμε ότι το Θ. Bolzano-Weierstrass <u>δεν</u> ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο

<u>Παράδειγμα 1</u>

X = απειροσύνολο , δ = διακριτή μετρική στο X

Θεωρούμε (x_n) στο X τ.ω. $m \neq n \Rightarrow x_n \neq x_m$

(υπάρχει γιατί το X είναι απειροσύνολο)

Η (x_n) είναι φραγμένη , $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(x_1, 2)$ $(\delta(x_n, x_1) = 1 < 2)$

Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) τ.ω. $x_{k_n} \xrightarrow{\delta} x_0 \in X$

Τότε η (x_{k_n}) είναι βασική : $\exists n_0$ $\forall n, m \geq n_0$ $\delta(x_{k_n}, x_{k_m}) < 1/2$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$ $x_{k_n} = x_{k_m}$ <u>άτοπο</u> (οι x_{k_n} είναι διαφ. ανά δύο)

<u>Παράδειγμα 2</u>

$\ell_\infty = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} :$ η (x_n) είναι φραγμένη$\}$ ${}_5$ $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$

$d(x, y) = \|x - y\|_\infty = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορίζουμε $x_n = (0,0,0,\dots\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-οστή θέση}}}{1},0,0,\dots\dots)$ $\forall n$ $\|x_n\|_\infty = 1$

$\forall n$ $x_n \in B(0,2)$

(x_n) φραγμένη

Επίσης, αν $m \neq n$, τότε $d(x_n,x_m) = \|x_n - x_m\|_\infty = 1$ (1)

x_n	0	0	$\dots$		0	1	0	$\dots$	
x_m	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	0	0	$\dots$
$x_n - x_m$	0	0	$\dots$	-1	$\dots$	0	1	0	$\dots$

Έστω ότι (x_n) έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in \ell_\infty$.
Τότε $\exists n_0: \forall n > m \geq n_0$ $1 \overset{(1)}{=} \|x_{k_n} - x_{k_m}\| < 1/2$ άτοπο

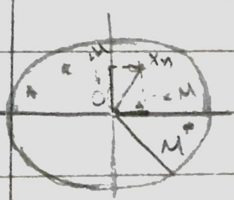
Ορισμός: Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα:
Κάθε ακολουθία (x_n) στον (X,d) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Τότε ο (X,d) λέγεται (ακολουθιακά) συμπαγής (Κεφάλαιο 6)

Πρόταση

Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} \qquad d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^2}$$

Απόδειξη: (m=3) Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$
Γράφουμε $x_n = (a_n, b_n, \gamma_n)$ όπου $a_n, b_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
1. Η (x_n) είναι φραγμένη: $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall n$ $x_n \in B(0,M) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x_n\|_2 < M \Rightarrow \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2} < M$



Τότε: $|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2} < M$ και όμοια $|b_n|, |\gamma_n| < M$
δηλ. οι (a_n), (b_n), (γ_n) είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}$

x_1	a_1	b_1	γ_1
x_2	a_2	b_2	γ_2
x_3	a_3	b_3	γ_3
x_4	a_4	b_4	γ_4
x_5	a_5	b_5	γ_5
x_6	a_6	b_6	γ_6
x_7	a_7	b_7	γ_7
x_8	a_8	b_8	γ_8

· Η (a_n) είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\, a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$

· Θεωρούμε την (b_{k_n}).
Η (b_{k_n}) είναι φραγμένη, γιατί η (b_n) είναι φραγμένη ($\forall n \ |b_n| < M$)
Άρα $\exists\, b_{k_{\lambda_n}}$ (υπακολουθία της (b_{k_n})) τ.ω. $\boxed{b_{k_{\lambda_n}} \to b \in \mathbb{R}}$
Τότε $a_{k_n} \to a \Rightarrow \boxed{a_{k_{\lambda_n}} \to a}$

Θεωρούμε την $(\gamma_{k_{\lambda_n}})$. Αυτή είναι φραγμένη (από το M) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to \gamma \in \mathbb{R}$

· Αφού $a_{k_{\lambda_n}} \to a \Rightarrow a_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to a$ (ως υπακολουθία της $a_{k_{\lambda_n}}$)

· Αφού $b_{k_{\lambda_n}} \to b \Rightarrow b_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to b$ (– " – της $b_{k_{\lambda_n}}$)

Τότε $x_{k_{\lambda_{\mu_n}}} = \left(a_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, b_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, \gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}}\right) \to \underbrace{(a, b, \gamma) = x}_{\text{όριο υπακολ. της } (x_n)}$

Έχουμε $\|x - x_{k_{\lambda_{\mu_n}}}\|_2^2 = \underbrace{(a - a_{k_{\lambda_{\mu_n}}})^2}_{\to 0} + \underbrace{(b - b_{k_{\lambda_{\mu_n}}})^2}_{\to 0} + \underbrace{(\gamma - \gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}})^2}_{\to 0} = 0$

Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

(Κεφάλαιο 4)

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f : (X, d) \to (X, \sigma)$ και $x_0 \in X$.
Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τω. αν $x \in X$ και $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon) \iff$

$\iff B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)) \iff$

Υπενθύμιση: Αν $f: X\to Y$, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, τότε
$f(A)=\{f(x): x\in A\}$ & $f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$

Θεώρημα (Αρχή της Μεταφοράς)

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ και $x_0\in X$. Τ.α.ε.ι.:

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0

(β) $\forall (x_n)$ στο X με $x_n \xrightarrow{d} x_0$ ισχύει ότι $f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(x_0)$

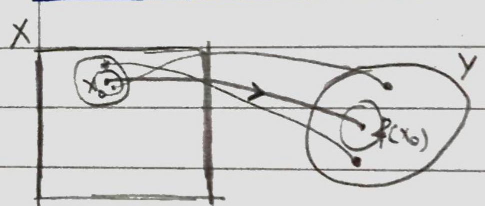
(γ) $\forall (x_n)$ στο X με $x_n\to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ στο Y είναι συγκλίνουσα

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω (x_n) στο X με $x_n\to x_0$. Θ.δ.ο. $f(x_n)\to f(x_0)$.
Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, $\exists \delta>0$
$d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. $(*)$
Αφού $x_n\to x_0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τω. $\forall n\geq n_0$ $d(x_n,x_0)<\delta$.
Τότε $\forall n\geq n_0$ από την $(*)$ έχουμε $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$

(β) $\Rightarrow$ (α) Με άτοπο. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\\ d(x,x_0)<\delta\Rightarrow\sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon\end{array}}$$

Τότε $\exists\varepsilon>0$ τω. $\forall\delta>0$.
Υπάρχει $x\in X$ τω. $d(x,x_0)<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$. $(*)$



Εφαρμόζουμε την $(*)$ με $\delta=1/n$, $n=1,2,\dots$
βρίσκουμε $x_n\in X$: $d(x_n,x_0)<1/n$ αλλά $\sigma(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$

$x_n\to x_0$ $\qquad$ $f(x_n)\not\to f(x_0)$

άτοπο

Σημείωση: Στην πραγματικότητα δ.ο. αν η f δεν είναι συνεχής συνεχής $\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ και (x_n) τω $x_n\to x_0$ και $\sigma(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$

Άσκηση

(β) $\Longleftrightarrow$ (γ)

Λύση: Η (β) $\Rightarrow$ (γ) είναι απλή: Έστω (z_n) στο X με $z_n \to x_0$. Από το (β) έχουμε $f(z_n) \to f(x_0)$. Άρα η $f(z_n)$ είναι συγκλίνουσα.

(γ) $\Rightarrow$ (β) Παίρνουμε $x_n \to x_0$ και δεχόμενοι το (γ) θ.δ.ο. $f(x_n) \to f(x_0)$.

Θεωρούμε $z_n = (x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, x_0, x_4, x_0, \dots\dots)$, δηλ.

$$z_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k-1 \\ x_0, & n = 2k \end{cases}$$

Έχουμε $\left.\begin{array}{l} z_{2k-1} = x_k \to x_0 \\ z_{2k} = x_0 \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow z_n \to x_0$

Από το (γ) $f(z_n) \xrightarrow{\sigma} y \in Y$. Τότε $f(\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{z_{2k}}}) \to y \Rightarrow \boxed{y = f(x_0)}$

σταθερή

Άρα $f(z_{2k-1}) \to y = f(x_0) \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$

Άσκηση 1

Κάθε $f : (X, \delta) \to (Y, \sigma)$ είναι συνεχής

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = 1/2$ (ανεξάρτητο του ε, πάντα ίδιο)

Αν $x \in X$ και $\delta(x, x_0) < 1/2 \Rightarrow x = x_0$, άρα $\sigma(\underbrace{f(x), f(x_0)}_{=}) = 0 < \varepsilon$

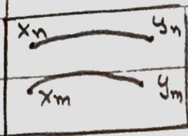
Άσκηση 2

Έστω $(x_n), (y_n)$ βασικές ακολουθίες στον (X, d).

Ν.δ.ο. η $a_n = d(x_n, y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$

Λύση: $|a_n - a_m| = |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$ (*)

Έστω $\varepsilon > 0$. ανισότητα 4 σημείων



- (x_n) βασική $\Rightarrow \exists n_1 : \forall n, m \ge n_1 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$
- (y_n) βασική $\Rightarrow \exists n_2 : \forall n, m \ge n_2 \quad d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Για κάθε $n, m \ge n_0$

$$|a_n - a_m| \underset{*}{\le} d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Απλές Συνέπειες της Αρχής Μεταφοράς

Πρόταση 1

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ και $g : (Y, \sigma) \to (Z, \tau)$.
Υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο $x_0 \in X$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$. Τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.
Ειδικότερα, αν οι f κ g είναι συνεχείς $\Rightarrow g \circ f$ είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $x_n \in X$ με $x_n \to x_0$

- f είναι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$
- η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ και $f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) \Rightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$.

Από την αρχή της μεταφοράς για την $g \circ f$ στο x_0, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Πρόταση 2

Έστω $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
Τότε οι $f + g$, λf, $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leftarrow$ επιτρέπεται (στο $\mathbb{R}$)
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \leftarrow$ στο $\mathbb{R}$ 5 $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) \leftarrow$ στο $\mathbb{R}$

<u>Απόδειξη</u>: Παίρνω $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$
$\Rightarrow f(x_n)\,g(x_n) \to f(x_0)\,g(x_0)$ και $\lambda f(x_n) \to \lambda f(x_0)$ και
$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$

<u>Μετρική γινόμενο</u>

Έστω $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots\dots, (X_k, d_k)$ μετρικοί χώροι.
Θεωρούμε το $X_1 \times X_2 \times \dots\dots \times X_k = \{x = (x(1), \dots, x(k)) : x(i) \in X_i\}$
Θέλουμε να ορίσουμε μια μετρική στο $X_1 \times X_2 \times \dots\dots \times X_k$
που να "σχετίζεται φυσιολογικά" με τις $d_1, d_2, \dots\dots, d_k$

<u>Ζητάμε</u>

$$(*)\quad \left[\begin{array}{l} x_n = (x_n(1), \dots\dots, x_n(k)) \xrightarrow{\rho} x = (x(1), \dots\dots, x(k)) \\ \text{ανν} \quad x_n(1) \xrightarrow{d_1} x(1) \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad x_n(k) \xrightarrow{d_k} x(k) \end{array}\right]$$

Μια μετρική ρ στο $X_1 \times \dots\dots \times X_k$ που ικανοποιεί την $(*)$
θα την λέμε <u>μετρική γινόμενο</u> (των $d_1, \dots\dots, d_k$)

<u>Σημείωση</u>: Στη συνέχεια του μαθήματος, αν $(X, d), (Y, \sigma)$
είναι δύο μ.χ. και γράφουμε "ο μ.χ. $X \times Y$" θα εννοούμε
πάντα ότι στον $X \times Y$ έχουμε μια μ.χ. των d και σ

<u>Πρόταση</u>

Υπάρχουν πάντα μετρικές γινόμενο στο $X_1 \times \dots\dots \times X_k$

Απόδειξη: (Άσκηση 1) Έστω $x=(x(1),\dots,x(k))$ και $y=(y(1),\dots,y(k))$ στο $X_1\times\dots\times X_k$.

- $\rho_\infty(x,y)=\max\{d_1(x(1),y(1)),\dots,d_k(x(k),y(k))\}$
- $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(x(j),y(j))^p\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$

Η ρ_p είναι μετρική γινόμενο των $d_1,\dots,d_k$ στο $X_1\times\dots\times X_k$

(α) Η ρ_p είναι μετρική

Τριγωνική Ανισότητα: $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(x(j),y(j))^p\right)^{1/p}=(*)$

$d_j(x(j),y(j))\le d_j(x(j),z(j))+d(z(j),y(j))$

$(*)\le\left(\sum_{j=1}^{k}\Big[\underbrace{d_j(x(j),z(j))}_{a_j}+\underbrace{d_j(z(j),y(j))}_{b_j}\Big]^p\right)^{1/p}\overset{\text{Ανισ. Minkowski}}{\le}$

$\le\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(x(j),z(j))^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(z(j),y(j))^p\right)^{1/p}=\rho_p(x,z)+\rho_p(z,y)$

(β) Η ρ_p είναι μετρική γινόμενο των $d_1,\dots,d_k$

$x_n\xrightarrow{\rho_p}x \iff \rho_p(x_n,x)\xrightarrow{n\to+\infty}0 \iff \Big(\sum_{j=1}^{k}\underbrace{d_j(x_n(j),x(j))^p}_{\rho_p(x_n,x)}\Big)^{1/p}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \iff$

$|a_i|\le\left(\sum_{j=1}^{k}|a_j|^p\right)^{1/p}$

$\iff \forall j=1,2,\dots,k\quad d_j(x_n(j),x(j))\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \iff$

$\iff \forall j=1,\dots,k\quad x_n(j)\xrightarrow[n\to+\infty]{d_j}x(j)$

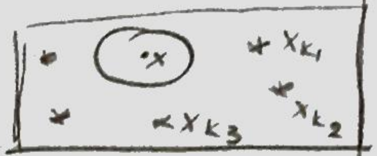
Άσκηση 4

Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d) και $x\in X$.

(α) Αν $x_n\to x\in X \Rightarrow$ κάθε υπακολουθία $x_{k_n}\to x$.

(β) Αν κάθε (x_{k_n}) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $x \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n\to x$



Λύση: (β) Υποθέτουμε ότι $x_n \not\to x$

$\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω. άπειροι όροι της (x_n) έξω από την $B(x,\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, (x_{k_n})$ τ.ω. $\forall n$ $x_{k_n} \notin B(x,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall n$ $d(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$.

Η (x_{k_n}) δεν μπορεί να έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

άτοπο