2/11/21

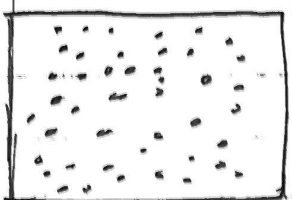
Πυκνά Σύνολα – Διαχωρίσιμοι μ.χ.

Ορισμός: Έστω (X, d) μ.χ.. Ένα $D \subseteq X$ λέγεται **πυκνό**, αν $\overline{D} = X$.

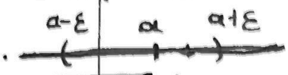
Παραδείγματα

(α) Ο X είναι πάντα πυκνό $\subseteq X$ $(\overline{X} = X)$

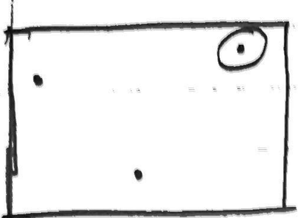
(β) Στο $\mathbb{R}$, το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά σύνολα. Έχουμε δει ότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$



(γ) Στο $\mathbb{R}$ το $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι ανοικτό και πυκνό σύνολο.



(αρκεί να παρατηρήσαμε ότι $a \in \overline{\mathbb{R}\setminus\{a\}}$)



Το σημείο που βγάζω δεν πρέπει να είναι μεμονωμένο σημείο, για να έχουμε πυκνό σύνολο

Πρόταση (Χαρακτηρισμός των πυκνών συνόλων)

Έστω (X, d) μ.χ. και $D \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

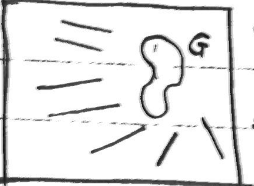
(α) D πυκνό : $\overline{D} = X$

(β) $\forall x \in X$ $\exists (y_n)$ στο D τ.ω. $y_n \to x$

(γ) $\forall x \in X$ και $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

(δ) $\forall$ ανοικτό $G \subseteq X$, $G \cap D \neq \emptyset$

<u>Απόδειξη</u>: (α) $\Rightarrow$ (δ) Έστω $\phi \neq G \subseteq X$ ανοικτό
X.



Έστω ότι $G \cap D = \phi$. Τότε $D \subseteq \underbrace{X \setminus G}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{X}{\overset{\shortparallel}{\bar{D}}} \subseteq X \setminus G \Rightarrow X \subseteq X \setminus G$ <u>άτοπο</u> κλειστό

αφού $G \neq \phi$

Αν $A \subseteq F$ και F κλειστό $\Big\} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

(δ) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η $B(x,\varepsilon) \neq \phi$ ανοικτό σύνολο. Από το (δ) με $G = B(x,\varepsilon)$ έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \phi$

(γ) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x \in X$. Για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ έχουμε $y_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap D$

$\Rightarrow y_n \in D$ και $d(y_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, δηλ. $y_n \to x$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Ζητάμε $X \subseteq \bar{D}$ (ο αντίστροφος εγκλεισμός πάντα ισχύει) Έστω $x \in X$. Από το (β) $\exists (y_n)$ στο D τ.ω. $y_n \to x$ $\Rightarrow$

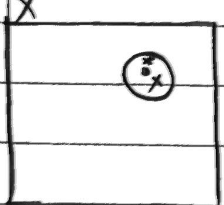
$\Rightarrow x \in \bar{D}$ (χαρακτηρισμός του σημείου επαφής)

<u>Παράδειγμα</u>

$X = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) \quad 1 \leq p < \infty$

Τότε το $D = \{ q = (q_1, \ldots\ldots, q_m) : q_i \in \mathbb{Q} \}$ είναι πυκνό $\subseteq X$

<u>Λύση</u>: Έστω $x = (x_1, \ldots\ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ και έστω $\varepsilon > 0$.

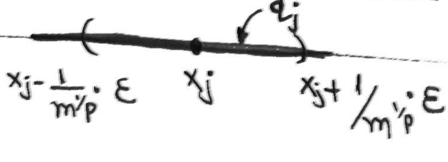


Ζητάμε ρητούς $q_1, \ldots\ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ τ.ω. αν $q = (q_1, \ldots, q_m) \in D$ να έχουμε $\|x - q\|_p < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j - q_j|^p < \varepsilon^p$

Αρκεί να βρω $q_j \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $|x_j - q_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{m}$ $\quad j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_j - q_j| < \frac{1}{m^{1/p}} \cdot \varepsilon$



Τέτοιο q_j υπάρχει από πυκνότητα ρητών.
<u>Τελικά</u>: Βρίσκουμε $q_j \in \mathbb{Q} : |x_j - q_j| < \frac{1}{m^{1/p}} \cdot \varepsilon$. $j=1,\dots,m$

Ορίζουμε $q = (q_1, \dots\dots, q_m) \in D$. Τότε $\|x-q\|_p^p = \sum_{j=1}^{m} |x_j - q_j|^p$

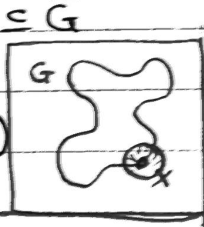
$< \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot \varepsilon^p = \varepsilon^p \Rightarrow \|x-q\|_p < \varepsilon \Rightarrow q \in B(x,\varepsilon)$

<u>Άσκηση 35</u>

Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο.
(α) Αν D πυκνό $\subseteq X$, τότε για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ ισχύει $\overline{D \cap G} = \overline{G}$
(β) Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό $\subseteq X$ και D πυκνό $\subseteq X$, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό $\subseteq X$.
Ισχύει το ίδιο αν <u>δεν</u> υποθέσουμε ότι G ανοικτό;
(γ) Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών συνόλων είναι πυκνό σύνολο (σε κάθε μ.χ.);

<u>Λύση</u>: (α) Έχουμε $D \cap G \subseteq G \Rightarrow \overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$



$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}}$ Έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ (γιατί $x \in \overline{G}$)

$x \in \overline{D \cap G}$

$B(x,\varepsilon) \cap (D \cap G) \neq \emptyset$

και ανοικτό σύνολο (τομή δύο ανοικτών συνόλων)

Αφού το D είναι πυκνό,

$(B(x,\varepsilon) \cap G) \cap D \neq \emptyset$

$B(x,\varepsilon) \cap (G \cap D) \neq \emptyset$

Άρα $x \in \overline{G \cap D}$

(β) Από το (α) έχουμε $\overline{G \cap D} = \overline{G}$.
Όμως, $\overline{G} = X$, γιατί το G είναι πυκνό, άρα $\overline{G \cap D} = X \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ το $G \cap D$ είναι πυκνό.
Χωρίς την υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό δεν ισχύει.
Το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$
που δεν είναι πυκνό

(γ) Από το (β) αν G_1, G_2 είναι ανοικτά πυκνά $\subseteq (X, d)$
τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι ανοικτό και πυκνό σύνολο.
Επαγωγικά, αν $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_n$ είναι ανοικτά και πυκνά
$\subseteq X \Longrightarrow$ το $G_1 \cap G_2 \cap \ldots\ldots \cap G_n$ είναι ανοικτό και πυκνό $\subseteq X$.

(*) Αν όμως $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών $\subseteq X$
τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ δεν είναι απαραίτητα πυκνό σύνολο.

Παράδειγμα

Παίρνουμε X τον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Μπορούμε να γράψουμε
$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$.
(*) • Κάθε G_n είναι ανοικτό και πυκνό
• $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{q_n\}^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}\right)^c = \mathbb{Q}^c = \emptyset$ που δεν είναι πυκνό.

Γενική Παρατήρηση

(α) Αν x σ.σ. του (X, d) τότε το $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό
[Αυτό αποδεικνύει τη (*) γιατί κάθε $q \in \mathbb{Q}$ είναι σ.σ. του $\mathbb{Q}$]

Απόδειξη: Αν $y \in X \setminus \{x\}$, τότε $y \in \overline{X \setminus \{x\}}$
Αν $y = x$, αφού x είναι σ.σ. του X, $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε
$B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \phi \Rightarrow x \in \overline{X \setminus \{x\}}$, δηλ. $\overline{X \setminus \{x\}} = X$

(Β) Αν x είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε για κάθε πυκνό $D \subseteq X$ πρέπει να έχουμε $x \in D$

Απόδειξη: Αφού x μεμονωμένο σημείο, $\exists \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) = \{x\}$
Όμως, αν D πυκνό έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \phi \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x\} \cap D \neq \phi \Rightarrow x \in D$.
Ειδικότερα, το $X \setminus \{x\}$ δεν είναι πυκνό.

Παράδειγμα (όπως το προηγούμενο το $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$)

Δεν μπορούμε να δώσουμε σε πλήρη μ.χ. ισχύει το Θεώρημα Baire: "Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό σύνολο"

Υπενθύμιση: Αριθμήσιμα και Υπεραριθμήσιμα σύνολα

① Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοπληθικά (γραφ. $A \approx B$) αν $\exists f: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$

② A πεπερασμένο, αν $A = \phi$ ή αν $\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$A \approx \{1, 2, \ldots, m\}$

A άπειρο, αν δεν είναι πεπερασμένο.

A <u>άπειρο αριθμήσιμο</u>, αν $A \approx \mathbb{N}$

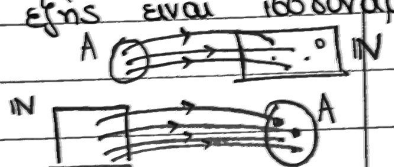
A <u>αριθμήσιμο</u>, αν είτε είναι πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο

A <u>υπεραριθμήσιμο</u>, αν δεν είναι αριθμήσιμο

③ Αν A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε
$\exists\, f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$. <u>Τότε</u> $A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\} = f(\mathbb{N})$

Αν ορίσουμε $a_n = f(n)$ έχουμε μια <u>αρίθμηση</u> του A
$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

④ Έστω A ένα σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:



- Το A είναι αριθμήσιμο
- Υπάρχει $f : A \to \mathbb{N}$ 1-1
- Υπάρχει $g : \mathbb{N} \to A$ επί

Μας διευκολύνουν

⑤ Το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο αριθμήσιμα σύνολα

⑥ Αν $A_1, \ldots\ldots, A_m$ είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το
$A_1 \times \ldots\ldots \times A_m$ είναι αριθμήσιμο (το δείχναμε για δύο σύνολα και μετά επαγωγή)

(a_1, b_1) (a_1, b_2) $(a_1, b_3) \ldots$
(a_2, b_1) (a_2, b_2) $(a_2, b_3) \ldots$
(a_3, b_1)

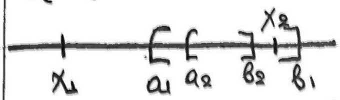
Έτσι αποδεικνύεις ότι $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

⑦ Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αριθμήσιμων συνόλων, τότε
το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

⑧ Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

⑨ Το $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \overset{\text{ορσ}}{=} \{ x=(x_k)_{k=1}^{\infty} : \forall k \ \ x_k=0 \text{ ή } 1 \}$ είναι υπεραριθμήσιμο (διαγώνιο επιχείρημα Cantor)

Απόδειξη ⑧: Έστω ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφεται $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$



$\exists \, [a_1, b_1]$ τ.ω. $x_1 \notin [a_1, b_1]$

$\exists \, [a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ τ.ω. $x_2 \notin [a_2, b_2]$

Επίσης $x_1 \notin [a_2, b_2]$. Επαγωγικά βρίσκουμε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_1, \ldots, x_n \notin [a_n, b_n]$.

Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

Έστω $z \in \mathbb{R}$ τ.ω. $z \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$: $z = x_m$ (διότι έχουμε υπόθεση ότι $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$)

Από κατασκευή $z = x_m \notin [a_m, b_m] \Rightarrow z \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ άτοπο

Απόδειξη ⑨: Έστω ότι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο, δηλ. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ όπου $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots)$, $a_{nk} = 0$ ή 1

Ορίζουμε $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ όπου $\boxed{b_n = 1 - a_{nn}} \neq a_{nn}$

Τότε $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, άρα $\exists \, k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $b = a_k \Rightarrow \forall n \ \ b_n = a_{kn}$

$\Rightarrow b_k = a_{kk}$ άτοπο

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \ni \begin{array}{c|cccc} a_1 & \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_2 & a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & \cdots \\ a_3 & a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \end{array}$$

Διαχωρίσιμοι μ.χ.

Ορισμός: Ένας μ.χ. (X,d) λέγεται διαχωρισμός, αν έχει αριθμήσιμο πυκνό σύνολο, δηλ. αν $\exists\, D \subseteq X$ αριθμήσιμο τ.ω. $\bar{D} = X$.

(α) Πως δείχνουμε ότι ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος;

- Ορίζουμε "κατάλληλο" D
- Δείχνουμε ότι D είναι αριθμήσιμο (ένα D φτάνει)
- Δείχνουμε ότι $\bar{D} = X$

Παραδείγματα

① Ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος.

Είδαμε ότι το $D = \{q = (q_1, \dots\dots, q_m) : q_j \in \mathbb{Q}\}$ πυκνό υποσύνολο.

Επίσης, $D = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots\dots \times \mathbb{Q}}_{m\text{-φορές}}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

άρα το D είναι αριθμήσιμο.

② Ο $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος.

$$\left[x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \ \text{ και } \ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \right]$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $D_m = \{q = (q_1, \dots\dots, q_m, 0, 0, \dots\dots) : q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Q}\}$.

Τότε $D_m \approx \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots\dots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^m \Rightarrow D_m$ αριθμήσιμο.

Στη συνέχεια ορίζουμε $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = \{q = (q_1, \dots, q_m, 0, 0, \dots) : q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Q}\}$

$\hookrightarrow D$ αριθμήσιμο

Ισχυρισμός: Το D είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_p

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x=(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ και $\varepsilon>0$.

Έχουμε $x\in \ell_p \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\boxed{\sum_{k=1+m}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}}$ (*)

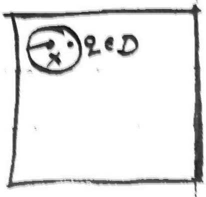
$$\begin{array}{c|cccccccc} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & \\ q & q_1 & q_2 & \cdots & q_m & 0 & 0 & \cdots & \in D_m \subseteq D \end{array}$$

Για κάθε $k=1,\dots,m$ βρίσκουμε ρητό q_k τ.ω. $\boxed{|x_k-q_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2m}}$ (**)

και ορίζουμε $q=(q_1,\dots\dots,q_m,0,0,\dots\dots) \in D_m \Rightarrow \boxed{q\in D}$

Έχουμε $\|x-q\|_p^p = \sum_{k=1}^{m} |x_k-q_k|^p + \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k-0|^p <$

$< \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^p}{2m} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$



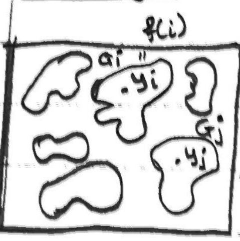
Συνεπώς, $\|x-q\|_p < \varepsilon$

(B) <u>Πως δείχνουμε ότι ο (X,d) δεν είναι διαχωρίσιμος;</u>

<u>Χρήσιμη Πρόταση</u>

Έστω (X,d) διαχωρίσιμος μ.χ. και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια μη-κενών και ξένων ανά δύο ανοικτών υποσυνόλων του X. Τότε το I είναι αριθμήσιμο σύνολο

<u>Απόδειξη</u>: X διαχωρίσιμος $\Rightarrow \exists\, D$ αριθμήσιμο πυκνό $\subseteq X$



Ορίζουμε $f: I \to D$ με $f(i)=y_i \in G_i\cap D$

(τέτοιο y_i υπάρχει, γιατί G_i ανοικτό $\neq\emptyset$ & D πυκνό)

<u>Η f είναι 1-1</u>

Η f είναι 1-1

Αν $i \neq j$ και $f(i)=f(j) \Rightarrow f(i)\in G_i\cap D$ κ $f(j)=f(i)\in G_j\cap D$

$\Rightarrow D\cap G_i\cap G_j \neq \emptyset$ άτοπο (τα G_i είναι ξένα ανά δύο)

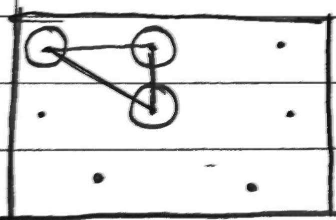
Όμως το D είναι αριθμήσιμο $\Rightarrow \exists\, g: D \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$

Άρα $I \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} \mathbb{N}$

Η $g\circ f: I\to\mathbb{N}$ είναι 1-1 $\Rightarrow$ I αριθμήσιμο.

Με βάση αυτή την πρόταση για ν.δ.ο. ο (X,d) ΔΕΝ είναι διαχωρίσιμος, αρκεί να βρούμε υπεραριθμήσιμη οικογένεια ξένων μη-κενών ανοικτών υποσυνόλων του X.

Συνήθως παίρνουμε τα G_i να είναι ανοικτές μπάλες της ίδιας ακτίνας σε σημεία ενός υπεραριθμήσιμου συνόλου. Αυτά πρέπει "να απέχουν πολύ" ανά δύο.



Προσπαθούμε να βρούμε $A=\{x_i : i\in I\}\subseteq X$ υπεραριθμήσιμο τ.ω. $\forall i\neq j \ \ d(x_i,x_j)\geq \varepsilon>0$

Τότε $\underbrace{B(x_i,\varepsilon/2)}_{=G_i}$ είναι ξένες

Παραδείγματα

(1) (X,δ), X υπεραριθμήσιμο

Οι $\underbrace{B(x,1/2)}_{=\{x\}}$, $x\in X$ είναι ξένες και υπεραριθμήσιμες το πλήθος.

Άρα ο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

(2) Ο ℓ_∞ <u>δεν</u> είναι διαχωρίσιμος.

Έστω $A = \{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} : x_k = 0 \text{ ή } 1 \}$

Κάθε $x \in A$ είναι φραγμένη ακολουθία, δηλ. $x \in \ell_\infty$.

Το A είναι υπεραριθμήσιμο (από το 9)

Αν $x \neq y$ στο A, τότε $\|x-y\|_\infty = \sup\{|x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\} = 1$

(διαφέρουν κάποια στιγμή)

Άρα, οι $B(x, \frac{1}{2})$, $\underline{\underline{x \in A}}$ είναι ξένες. (ΤΕΛΟΣ)

[Αν ο X ήταν διαχωρίσιμος, τότε το A θα έπρεπε να είναι αριθμήσιμο, άτοπο]