ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

<u>Ορισμός</u>: (α) Ο (X,d) λέγεται <u>συμπαγής</u>, αν για κάθε οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X τώ. $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ μπορούμε να βρούμε $i_1,\dots,i_m \in I$ τω.

$X = U_{i_1} \cup \dots\dots \cup U_{i_m}$

(β) Ο (X,d) λέγεται <u>ολικά φραγμένος</u>, αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists x_1,\dots\dots,x_m \in X$ τω. $X = B(x_1,\varepsilon) \cup \dots\dots B(x_m,\varepsilon)$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω (X,d) μ.χ. ΤΑΕΙ.

(α) Ο X είναι συμπαγής

(β) Κάθε άπειρο $A\subseteq X$ έχει τουλάχιστον ένα σ.σ.

(*) (γ) Κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

(δ) Ο X είναι πλήρης <u>και</u> ολικά φραγμένος.

Ⓐ Συνεχείς Συναρτήσεις σε Συμπαγείς Μ.Χ.

Πρόταση 1

Αν ο (X,d) είναι συμπαγής, τότε κάθε συνεχής $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Α.ν.δ.ο. αν $(x_n),(y_n)$ είναι δύο ακολουθίες στον X με $d(x_n,y_n)\to 0 \Rightarrow \sigma(f(x_n),f(y_n))\to 0$.
Προτιμούμε να πάμε με άτοπο: αν η f δεν είναι ομοιό-μορφα συνεχής μπορούμε να βρούμε $\varepsilon>0$ και (x_n), (y_n) στον X τ.ω. $d(x_n,y_n)\to 0$, αλλά $\sigma(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon$ $\forall n$
Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists\, x_{k_n}\to x\in X$.
Τότε $d(y_{k_n},x)\leq d(y_{k_n},x_{k_n})+d(x_{k_n},x)\longrightarrow 0+0=0$.
Άρα, $y_{k_n}\to x$.
Αφού η f είναι συνεχής στο x, έχουμε
$f(x_{k_n})\to f(x)$ και $f(y_{k_n})\to f(x)$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(f(x_{k_n}),f(y_{k_n}))\longrightarrow\sigma(f(x),f(x))=0$, άτοπο
γιατί $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sigma(f(x_{k_n}),f(y_{k_n}))\geq\varepsilon$

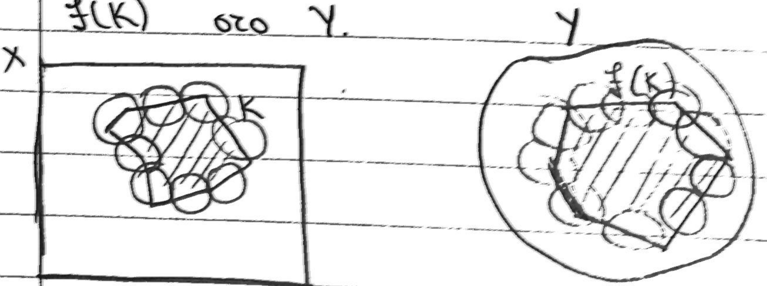
Σημείωση: Ας υποθέσουμε ότι είχαμε υποθέσει ότι:
$\exists\, x_{k_n},y_{k_n}$: $d(x_{k_n},y_{k_n})\to 0$, αλλά $\sigma(f(x_{k_n}),f(y_{k_n}))\not\to 0$
Θα κάναμε τα ίδια: θα βρίσκουμε $x_{k_n}\to x\Rightarrow y_{k_n}\to x$
$\Rightarrow f(x_{k_n}),f(y_{k_n})\to f(x)\Rightarrow\sigma(f(x_{k_n}),f(y_{k_n}))\to 0$.

Πρόταση 2

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχής.
Αν K συμπαγές, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές

__Απόδειξη__: Παίρνουμε (y_n) στο $f(K)$ και δ.ο. υπάρχει υπακολουθία $y_{k_n} \to y \in f(K)$.
(Αυτό δ.ο. ο $(f(K), \sigma)$ είναι συμπαγής $\overset{\text{Άσκ.}}{\Longleftrightarrow}$ $f(K)$ συμπαγές $\subseteq Y$)
Για κάθε n $\exists\, x_n \in K$ τ.ω. $y_n = f(x_n)$.
Η (x_n) είναι στο συμπαγές K, άρα υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in K$. Αφού η f είναι συνεχής στο x,
$y_{k_n} = f(x_{k_n}) \longrightarrow f(x) = y \in f(K)$

__Δεύτερη Απόδειξη__: Έστω $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(K)$ στο Y.



Έχουμε $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$

Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $U_i = f^{-1}(V_i)$.
Αφού η f είναι συνεχής, κάθε U_i είναι ανοικτό $\subseteq X$ (γιατί V_i ανοικτό $\subseteq Y$)

① $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$: Έστω $x \in K \Rightarrow f(x) \in f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ τ.ω. $f(x) \in V_{i_0} \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ $x \in f^{-1}(V_{i_0}) \overset{\text{ορσ}}{=} U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

② Το K είναι συμπαγές και η $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα $\exists\, i_1, \ldots, i_m \in I$ τ.ω. $K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(K) \subseteq f(U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m}) = f(U_{i_1}) \cup \ldots \cup f(U_{i_m}) \subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_m}$
Δηλ. βρίσκουμε πεπερασμένο υποκάλυμμα του $(V_i)_{i\in I}$ για το $f(K)$

$g: X \to Y$ Αν $A \subseteq X$, $g(A) = \{g(x) : x \in A\}$	$g^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} g^{-1}(B_i)$	$g(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} g(A_i)$
Αν $B \subseteq Y$, $g^{-1}(B) = \{g^{-1}(x) : x \in B\}$	$g^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} g^{-1}(B_i)$	$g(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} g(A_i)$

Πρόταση 3

Αν ο (X,d) είναι συμπαγής και $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2, η $f(X)$ είναι συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}$
$\Rightarrow f(X)$ είναι κλειστό και φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$

(α) $f(X)$ = φραγμένο $\Rightarrow \exists \sup f(X), \inf f(X)$

(β) $f(X)$ = κλειστό $\Rightarrow \sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$

$$\Downarrow$$

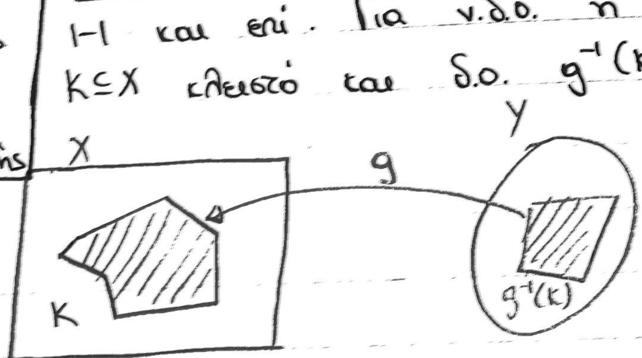
$$\sup f(X) = \max f(X)$$
$$\inf f(X) = \min f(X)$$

Πρόταση 4

Έστω (X,d) συμπαγής. Κάθε συνεχής, 1-1 και επί συνάρτησ
$f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή η
$g=f^{-1}:(Y,\sigma)\to(X,d)$ είναι συνεχής

$Y = f(X)$
X συμπαγής
f συνεχής
$\xRightarrow{\Pi.2}$ Y συμπαγής

Απόδειξη: Η g είναι καλά ορισμένη, γιατί η f είναι 1-1 και επί. Για ν.δ.ο. η g είναι συνεχής παίρνουμε $K\subseteq X$ κλειστό και δ.ο. $g^{-1}(K)$ είναι κλειστό $\subseteq Y$



① X συμπαγής + $K\subseteq X$ κλειστό $\Rightarrow K$ συμπαγές

② $g^{-1}(K) = f(K)$

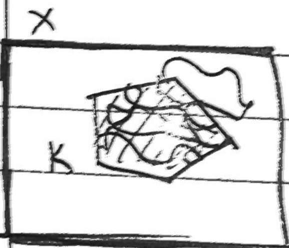
Το $g^{-1}(K) = f(K)$ είναι η εικόνα του συμπαγούς K μέσω της συνεχούς f, άρα είναι συμπαγές, από Πρόταση 2
Αφού είναι συμπαγές, το $g^{-1}(K)$ είναι κλειστό.

Π1 : Αν	$K \subseteq (X,d)$ συμπαγές $\Rightarrow$ K κλειστό.
Π2 : Αν	X συμπαγές και $K \subseteq X$ κλειστό $\Rightarrow$ K συμπαγές
Π3 : K	συμπαγές $\Rightarrow$ K φραγμένο

Άσκηση 1

Ένα $K \subseteq (X,d)$ είναι συμπαγές (με τον ορισμό που δώσαμε με καλύμματα) ανν ο μετρικός υπόχωρος (K,d) είναι συμπαγής μ.χ.

Λύση: ($\Rightarrow$) Έστω U_i ανοικτά στον (K,d) τ.ω. $K = \bigcup_{i\in I} U_i$



Για κάθε $i \in I$ $\exists V_i \subseteq X$ τ.ω. $U_i = V_i \cap K$
Τώρα $K = \bigcup_{i\in I} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$

Αφού το K είναι συμπαγές, $\exists i_1, \dots, i_m \in I$ τ.ω. $K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m} \Rightarrow K = K \cap (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}) =$
$= (K \cap V_{i_1}) \cup \dots \cup (K \cap V_{i_m}) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$ και βρίσκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα.

($\Leftarrow$) Έστω V_i ανοικτά $\subseteq X$ με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow K = \bigcup_{i\in I} \underbrace{(V_i \cap K)}_{U_i}$

$\xRightarrow[\text{συμπαγής}]{(K,d)}$ $\exists i_1, \dots, i_m$ τ.ω. $K = (V_{i_1} \cap K) \cup \dots \cup (V_{i_m} \cap K)$ ανοικτό στο K

$\subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$

Εφαρμογή

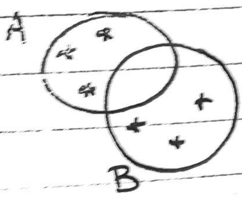
Πως δ.ο. ένα $K \subseteq (X,d)$ είναι συμπαγές με ακολουθίες;

Λύση: Από την Άσκηση α.ν.δ.ο. ο (K,d) είναι συμπαγής (*)
(*) Ισοδύναμα, ότι ο (K,d) είναι ακολουθιακά συμπαγής
Άρα παίρνουμε τυχούσα (x_n) στο K και βρίσκουμε υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in K$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

③ Αν A, B είναι συμπαγή $\subseteq (X,d)$ δ.ο. το $A \cup B$ συμπαγές

Λύση: • Με ακολουθίες: Έστω (x_n) ακολουθία στο $A \cup B$



Είτε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο A
είτε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο B
Έστω ότι ισχύει το πρώτο.

Οι όροι της (x_n) στο A μπορούν να γραφούν ως υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n). Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει $(x_{k_{\lambda_n}})$ υπακολουθία της (x_n) που συγκλίνει
$x_{k_{\lambda_n}} \to x \in A \subseteq A \cup B$.

• Με καλύμματα: Έστω $U_i \subseteq X$ ανοικτά τω. $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

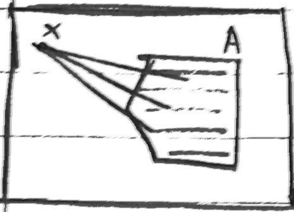
Τότε $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ + A συμπαγές $\Rightarrow \exists J_1 \subseteq I$ πεπερασμένο
τω. $A \subseteq \bigcup_{i \in J_1} U_i$

$B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ + B συμπαγές $\Rightarrow \exists J_2 \subseteq I$ πεπερασμένο
τω. $B \subseteq \bigcup_{i \in J_2} U_i$

Τότε $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} U_i$ και το $J_1 \cup J_2$ είναι πεπερασμένο.

Άρα βρίσκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα

5 (α) Έστω $x \in X$ και A συμπαγές $\subseteq X$.
Ν.δ.ο. $\exists\, y \in A$ τ.ω. $\text{dist}(x, A) = d(x, y)$



<u>Λύση:</u> Ξέραμε ότι $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$
Θέλαμε ν.δ.ο. το inf είναι min.
Ορίζαμε $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(a) = d(x, a)$

- Η f είναι συνεχής: $|f(a) - f(a')| = |d(x,a) - d(x,a')| \leq d(a, a')$. Άρα είναι Lipschitz με σταθερά 1
- Αφού το A είναι συμπαγές, η f παίρνει ελάχιστη τιμή. Υπάρχει $y \in A$ τ.ω. $\forall a \in A$ $f(y) \leq f(a) \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall a \in A$ $d(x,y) \leq d(x,a) \Rightarrow d(x,y) = \min\{d(x,a) : a \in A\} = \text{dist}(x, A)$

Συμπάγεια και Μετρικό Γινόμενο

<u>Πρόταση</u>

Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ συμπαγείς μ.χ.
Θεωρούμε μια μετρική γινόμενο d στο $X_1 \times \ldots \times X_k$.
Τότε ο $(X_1 \times \ldots \times X_k, d)$ είναι συμπαγής.
(γινόμενο συμπαγών μ.χ. είναι συμπαγής μ.χ.)

Απόδειξη: Θ.δ.ο. αν X, Y, Z είναι συμπαγείς $\Rightarrow X \times Y \times Z$ συμπαγής

Έστω $u_n \in (x_n, y_n, z_n)$ ακολουθία στον $X \times Y \times Z$.

· Ο X είναι συμπαγής, άρα η (x_n) έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in X$

· Ο Y είναι συμπαγής, άρα (y_{k_n}) — ,, — $\boxed{y_{k_{\lambda_n}} \to y \in Y}$

Αφού $x_{k_n} \to x \Rightarrow \boxed{x_{k_{\lambda_n}} \to x \in X}$

· Ο Z είναι συμπαγής, άρα $(z_{k_{\lambda_n}})$ — ,, — $\boxed{z_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to z \in Z}$

Επομένως, $x_{k_{\lambda_n}} \to x \Rightarrow \boxed{x_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to x}$

$y_{k_{\lambda_n}} \to y \Rightarrow \boxed{y_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to y}$

Έπεται ότι $u_{k_{\lambda_{\mu_n}}} = \left(x_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, y_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, z_{k_{\lambda_{\mu_n}}}\right) \xrightarrow[\text{γινόμενο}]{d \text{ μετρικό}} (x, y, z) \in X \times Y \times Z$

Άρα βρήκαμε συγκλίνουσα υπακολουθία της (u_n)

Συμπάγεια στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Τότε το A είναι συμπαγές <u>ανν</u> είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη: $(\Longrightarrow)$ Ισχύει γενικά, σε κάθε μ.χ. τα συμπαγή σύνολα είναι κλειστά και φραγμένα.

$(\Longleftarrow)$ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστό και φραγμένο.

Θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο A.

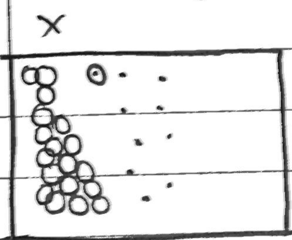
Αφού το <u>A είναι φραγμένο</u>, η (x_n) είναι φραγμένη και από το Θ. Bolzano - Weierstrass στον $\mathbb{R}^m$ (Κεφ. 2)

υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}^m$.
Αφού $x_{k_n} \in A$, $x_{k_n} \to x$ και το A είναι κλειστό, έχουμε ότι $x \in A$. Άρα το A είναι συμπαγές.

Άλλες βασικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων

Πρόταση 1

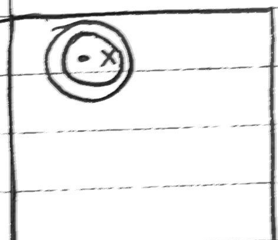
Κάθε ολικά φραγμένος μ.χ. (X,d) είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, κάθε συμπαγής μ.χ. είναι διαχωρίσιμος.



Απόδειξη: $\forall n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε τον ολικά φραγμένου με $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ και βρίσκουμε $D_n \subseteq X$ πεπερασμένο τ.ω. $X = \bigcup_{x \in D_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Ορίζουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Το D είναι αριθμήσιμο σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Ισχυρισμός: $\overline{D} = X$ (το D είναι πυκνό)



Παίρνουμε $x \in X$ τυχόν και $\varepsilon > 0$ τυχόν.
Θα βρούμε $y \in D$ τ.ω. $y \in B(x,\varepsilon)$.
Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $X = \bigcup_{y \in D_n} B(y, 1/n)$

υπάρχει $y \in D_n$ τ.ω. $x \in B\left(y, \frac{1}{n}\right) \iff d(x,y) < \frac{1}{n} \iff y \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$

Αφού $\frac{1}{n} < \varepsilon$ έπεται ότι $y \in B(x,\varepsilon)$.

Επιπλέον, $y \in D_n \subseteq D$, δηλ. βρίσκουμε $y \in D$ τ.ω. $y \in B(x,\varepsilon)$.