14/12/21

Ιδιότητα των Πεπερασμένων Τομών

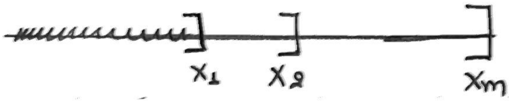
Ορισμός: Έστω $X \neq \emptyset$. Λέμε ότι μια οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, αν $\forall m \in \mathbb{N}$ και $\forall i_1, \dots, i_m \in I$ ισχύει

$$F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$$

Παραδείγματα

(1) $X = \mathbb{R}$, $F_x = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$

Αν $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, τότε $\bigcap_{k=1}^{m} (-\infty, x_k) = (-\infty, x_1] \neq \emptyset$



(2) $X = \mathbb{N}$, Θεωρούμε F_i τα σύνολα που έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα: $\mathbb{N} \setminus F_i$ πεπερασμένο σύνολο.
Έστω $F_1, \dots, F_m \subseteq \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall i$ το $\mathbb{N} \setminus F_i$ είναι πεπερασ-μένο. Τότε

$$\underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} (\mathbb{N} \setminus F_i)}_{\text{πεπερασμένο}} = \mathbb{N} \setminus \bigcap_{i=1}^{m} F_i \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{m} F_i$ άπειρο σύνολο και ειδικότερο $\bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \emptyset$.

Παρατήρηση: $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} F_x = \emptyset$ (για το (1))

Παρατήρηση: $\forall n$ $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ έχει πεπερασμένο συμπλήρωμα άρα ανήκει στην οικογένεια και $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \emptyset$

άρα και η τομή όλων των συνόλων της οικογένειας είναι $\emptyset$ (για το (2)).

Θεώρημα

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. Αν $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Τότε $X = \bigcup_{i\in I} F_i^c$ ανοικτά σύνολα (F_i κλειστά)

ανοικτή κάλυψη του X.

Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists$ πεπερασμένη υποκάλυψη: $\exists i_1, \dots, i_m \in I$ τ.ω. $X = F_{i_1}^c \cup \dots \cup F_{i_m}^c \Rightarrow$

$\Rightarrow \emptyset = (F_{i_1}^c)^c \cap \dots \cap (F_{i_m}^c)^c = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m}$ άτοπο, γιατί η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών

Παρατηρήσεις

(1) Ισχύει το εξής αντίστροφο: Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα: "Αν $(F_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών $\subseteq X$ με την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$"

Τότε, ο X είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Έστω ότι $\exists$ ανοικτή κάλυψη $X = \bigcup_{i\in I} G_i$ που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Θέτουμε $F_i = G_i^c$ = κλειστό.

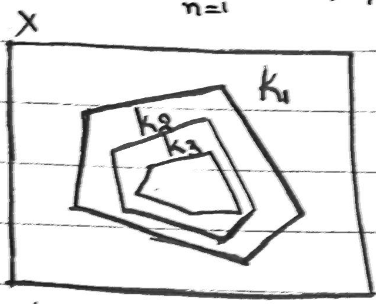
Για κάθε $i_1, \dots, i_m \in I$, $X \neq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \emptyset \neq G_{i_1}^c \cap \dots \cap G_{i_m}^c = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m}$

Άρα, η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών.

Από την υπόθεση, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \underset{G_i}{\underset{\parallel}{F_i^c}} \neq X$ άτοπο γιατί η $(G_i)_{i\in I}$ ήταν ανοιχτή κάλυψη του X.

(2) <u>Ειδική Περίπτωση</u>: Έστω (X,d) μ.χ. και $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων ($K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \dots$)
Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$



<u>Απόδειξη</u>: • Ο (K_1,d) είναι συμπαγής μ.χ. και η $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μέσα σε αυτόν

• Αν $n_1 < \dots < n_m$, τότε

$$K_{n_1} \cap \dots \cap K_{n_m} = K_{n_m} \neq \emptyset$$

(K_n) φθίνουσα

Άρα, η $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Από το Θεώρημα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

(3) <u>Σύγκριση της Ειδικής Περίπτωσης με το Θ. Cantor</u>

• <u>Θ. Cantor</u>: X πλήρης	(K_n) φθίνουσα, K_n κλειστά, μη κενά, $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$	$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$
• <u>Ειδική Περίπτωση</u>: K_1 συμπαγής	(K_n) φθίνουσα, K_n κλειστά, μη κενά	$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$
Ισχυρότερη υπόθεση για χώρο	Ασθενέστερες Υποθέσεις για το K_n	Ίδιο Συμπέρασμα

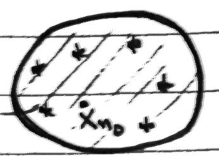
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Κεφαλαίου 6)

⑥ Έστω (X,d) μ.χ.

(α) Υποθέτουμε ότι $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall x \in X$ η $\overline{B(x,\varepsilon)}$ είναι συμπαγής. ΝΔο. X είναι πλήρης.

(β) Υποθέτουμε ότι $\forall x \in X$ $\exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. η $\overline{B(x,\varepsilon)}$ να είναι συμπαγής. Είναι ο X αναγκαστικά πλήρης;

Λύση: (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο X.
Για το ε της υπόθεσης βρίσκαμε $n_0 \in \mathbb{N}: \forall n,m \geq n_0$
$d(x_n,x_m)<\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_0 \; d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_0 \; x_n \in B(x_{n_0},\varepsilon)$



Συμπαγές

Η $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ περιέχεται στο συμπαγές σύνολο [$\subseteq B(x_{n_0},\varepsilon)$] $\overline{B(x_{n_0},\varepsilon)}$, άρα $\exists\, (x_{k_n})$ $(k_n \geq n_0)$ τω. $x_{k_n} \to x \in X$.

Η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα συγκλίνει.

(β) ΟΧΙ: $X=(0,1)$. Ο X δεν είναι πλήρης, γιατί δεν είναι κλειστό υποσύνολο του (πλήρους μ.χ.) $\mathbb{R}$

Όμως, η υπόθεση ικανοποιείται:
Έστω $0<x<1$. $\exists\, \varepsilon_x>0: [x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x] \subseteq (0,1)$

Αρκεί να πάρω $x-\varepsilon_x>0$ και $x+\varepsilon_x<1$, δηλαδή $0<\varepsilon_x<\min\{x,1-x\}$. Τότε $\overline{B(x,\varepsilon_x)} = \overline{(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)} = [x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x] \subseteq (0,1)$ και είναι συμπαγής ως κλειστό και φραγμένο διάστημα.

7 (X,d) συμπαγής, $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Ν.δ.ο. τ.α.ε.ι.
(α) Η f είναι συνεχής
(β) Η συνάρτηση $T: X \to X\times Y$, $T(x)=(x,f(x))$ είναι συνεχής
(γ) Το γράφημα $\Gamma(f)=\{\underbrace{(x,f(x))}_{T(x)}: x\in X\}$ είναι συμπαγές $\subseteq X\times Y$

Λύση: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x_n \to x\in X$. Θέλουμε $T(x_n)\to T(x)$, δηλαδή $(x_n,f(x_n)) \to (x,f(x))$, δηλ. $x_n\to x$ και $f(x_n)\to f(x)$
[Στον $X\times Y$ εννοείται ότι έχουμε κάποια μετρική γινόμενο]

ισχύει

και αυτό ισχύει γιατί f συνεχής

(β) $\Rightarrow$ (γ) Παρατηρούμε ότι $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} =$
$= \{T(x) : x \in X\} = T(X)$.
Η T είναι συνεχής, από υπόθεση, και ο X είναι συμπαγής
άρα το $\Gamma(f) = T(X)$ είναι συμπαγές
"Συνεχής εικόνα συμπαγές είναι συμπαγές".
(γ) $\Rightarrow$ (α) Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $x \in X$.
Τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ και $x_n \to x$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sigma(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ (*)
Έχουμε $(x_n, f(x_n)) \in \Gamma(f)$ και το $\Gamma(f)$ είναι συμπαγές.
Υπάρχει $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to (u, v) \in \Gamma(f)$.
Άρα $v = f(u)$ και $x_{k_n} \to u \Rightarrow u = x$, αφού $x_n \to x$.
Τελικά, $(u, v) = (x, f(x))$.
Τώρα όμως $f(x_{k_n}) \to v = f(x)$, άτοπο γιατί από την
(*) $\forall n$ $\sigma(f(x_{k_n}), f(x)) \geq \varepsilon$

(10) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ και ο (Y, σ) είναι συμπαγής. Ν.δ.ο. f συνεχής $\Leftrightarrow \Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ κλειστό $\subseteq X \times Y$.

Λύση: ($\Rightarrow$) Έστω $(x_n, f(x_n)) \in \Gamma(f)$ και έστω ότι
$(x_n, f(x_n)) \to (x, y) \in X \times Y$. Θ.δ.ο. $(x, y) \in \Gamma(f)$, δηλ. $y = f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } x_n \to x \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n) \to f(x) \\ \qquad\qquad \text{και} \\ \qquad\qquad f(x_n) \to y \end{array}\right\} \Rightarrow y = f(x)$$

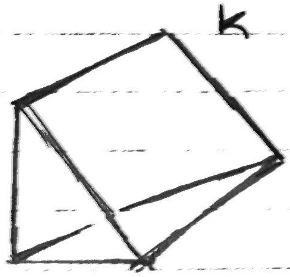
($\Leftarrow$) Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο x.
$\exists\, \varepsilon > 0$ και $f(x_n) \to f(x)$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sigma(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$ (*)
Θεωρούμε τα $(x_n, f(x_n)) \in \Gamma(f)$.
• Ο Y είναι συμπαγής και $f(x_n) \in Y$, άρα $\exists\, f(x_{k_n})$ τ.ω. $f(x_{k_n}) \to y \in Y$.
• Επίσης, $x_n \to x \Rightarrow x_{k_n} \to x$.

Άρα, $\underset{\in \Gamma(f)}{(x_{k_n}, f(x_{k_n}))} \longrightarrow (x,y)$.

Αφού το $\Gamma(f)$ είναι κλειστό, $(x,y)\in \Gamma(f) \Rightarrow y = f(x)$.

(9) Έστω K συμπαγή υποσύνολο του μ.χ. (X,d).
Ν.δ.ο. $\exists\, x,y \in K$ τ.ω. $d(x,y) = diam(K)$

• K συμπαγές $\Rightarrow$ K φραγμένο $\Rightarrow diam(K) < \infty$
• $diam(K) = \underline{\sup}\{d(a,b) : a,b\in K\}$



<u>Λύση</u>: Θεωρούμε την $d : K\times K \longrightarrow \mathbb{R}$.
(α) Η d είναι συνεχής, αν $a_n \xrightarrow{d} a$, $b_n \xrightarrow{d} b$, τότε $d(a_n, b_n) \longrightarrow d(a,b)$.
(β) Ο μ.χ. $K\times K$ είναι συμπαγής, γιατί το K είναι συμπαγές.
Από βασική πρόταση, η d παίρνει μέγιστη τιμή.
Υπάρχει $(x,y)\in K\times K$ τ.ω. $\forall (a,b)\in K\times K : d(a,b) \le d(x,y)$,
δηλαδή $\exists\, x,y\in K$ τ.ω. $\forall\, a,b\in K$ $d(a,b)\le d(x,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x,y) = \max\{d(a,b) : a,b\in K\} = \sup\{d(a,b) : a,b\in K\} =$
$= diam(K)$.

<u>Άλλος τρόπος</u>: Από χαρακτηρισμό του supremum
$\exists\, x_n, y_n \in K$ τ.ω. $d(x_n,y_n) \longrightarrow diam(K)$
• K συμπαγές $\Rightarrow \exists\, x_{k_n} \to x\in K$
• K συμπαγές $\Rightarrow$ η (y_{k_n}) έχει $y_{k_{\lambda_n}} \longrightarrow y \in K$
Αφού $x_{k_n} \to x \Rightarrow x_{k_{\lambda_n}} \to x$.
<u>Τώρα</u>, $d(x_{k_{\lambda_n}}, y_{k_{\lambda_n}}) \longrightarrow d(x,y)$.
υπακολουθία της $d(x_n,y_n) \to diam(K)$ ⟶ $diam(K)$
Τελικά, $d(x,y) = diam(K)$ και $x,y\in K$ από την κατασκευή.

(19)* Έστω (X,d) μ.χ. Ν.α.ο. τ.α.ε.ι.:

(α) Ο X είναι συμπαγής

(β) Κάθε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη-κενή τομή, δηλ. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

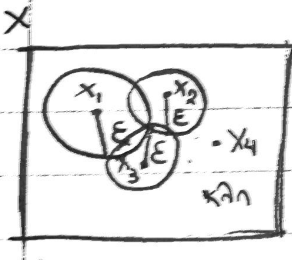
<u>Λύση</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Τα F_n είναι κλειστά $\subseteq X$ (συμπαγούς) άρα είναι συμπαγή. Από την ειδική περίπτωση του "θεωρήματος πεπερ. τομών" η (F_n) έχει την ιδιότητα πεπερ. τομών, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Θ.δ.ο. ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.

· <u>Ο X είναι πλήρης</u>: Παίρνουμε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ μη-κενών κλειστών συνόλων με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ και δ.ο. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (αυτό δ.ο. ο X είναι πλήρης από το αντίστροφο του Θ. Cantor)

Αυτό ισχύει άμεσα από το (β) (που λέει το ίδιο και μάλιστα <u>δεν</u> απαιτεί $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$)

· <u>Ο X είναι ολικά φραγμένος</u>: Έστω ότι <u>δεν</u> είναι. Τότε (θυμηθείτε βήμα της απόδειξη του θεωρήματος) $\exists \varepsilon > 0$ και (x_n) στον X τ.ω. $\forall n \neq m \ d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$.



Ορίζουμε $F_n = \{x_k : k \geq n\}$.
Κάθε F_n είναι <u>κλειστό</u> (οι όροι απέχουν $\geq \varepsilon$ ανά 2) <u>μη-κενό</u> και η $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα.

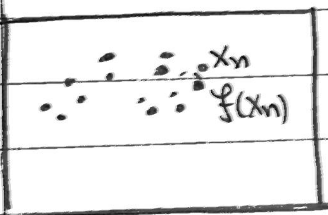
Από την υπόθεση $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ <u>άτοπο</u>, γιατί $\forall n$
$x_n \notin F_{n+1} \Rightarrow x_n \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

<u>Υποάσκηση</u>: Αν (x_n) ακολουθία στον (X,d) και $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τ.ω. $\forall n \neq m \ d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \Rightarrow F$ κλειστό.

Λύση: Έστω (y_n) συγκλίνουσα ακολουθία από το F.
$\exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \quad \underbrace{d(y_n, y_m)}_{\text{όροι της } (x_n)} < \varepsilon$.

Αναγκαστικά, $y_n = y_m$
Άρα η (y_n) είναι τελικά σταθερή, ίση με y_{n_0} και συγκλίνει στο y_{n_0}

(27) (X,d) συμπαγής, $f: X \to X$ συνεχής.
Υποθέτουμε ότι $\exists (x_n)$ στο X τω. $d(x_n, f(x_n)) \to 0$.
N.δ.ο. η f έχει σταθερό σημείο.



Λύση: • X συμπαγής $\Rightarrow \exists x_{k_n} \to x \in X$
• f συνεχής $\Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x)$
• Τότε $d(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to d(x, f(x))$
$\downarrow$
0

Άρα, $d(x, f(x)) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = x}$

(29) Έστω $f: (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής, X συμπαγής.
N.δ.ο. $\forall A \subseteq X \quad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

Λύση: Ξέρουμε τον έναν εγκλεισμό: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
Για τον άλλον: $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow f(A) \subseteq f(\overline{A})$
Όμως, X συμπαγής και $\overline{A}$ κλειστό $\subseteq X \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{A}$ συμπαγές $\xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(\overline{A})$ συμπαγές $\Rightarrow f(\overline{A})$ κλειστό.
Αφού το $f(\overline{A})$ είναι κλειστό και $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ έπεται ότι $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

$\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \overline{\Gamma} \subseteq \Delta$
Δ-κλειστό

$x \in \overline{A}$, $\exists x_n \in A$ τω. $x_n \to x$
$f(x_n) \to f(x)$
$\cap$
$f(A)$ Άρα, $f(x) \in \overline{f(A)}$

(25) X συμπαγής και $f: X \to Y$ συνεχής.
Ν.α.ο. αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $f^{-1}(K)$ συμπαγές $\subseteq X$

Λύση: 1ος Τρόπος: K συμπαγές $\Longrightarrow$ K κλειστό $\xRightarrow[f \text{ συνεχής}]{}$ $f^{-1}(K)$ κλειστό.