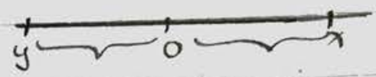
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

28/9/21

Μετρικοί Χώροι

Απόλυτη τιμή του $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

π.χ. $|7| = 7$, $|-3| = 3$



Επάγει την απόσταση $|x-y|$ των $x, y \in \mathbb{R}$

Ορισμοί από τον Απ. Λογισμό

- $a_n \to a \overset{\text{ορσ}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$
- $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \overset{\text{ορσ}}{\iff}$
$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τ.ω. αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$
τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

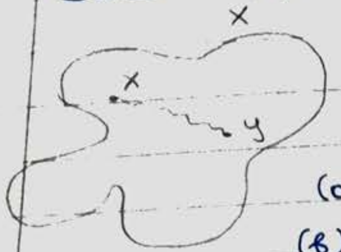
Βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής (που χρησιμοποιούνται συνεχώς στη μελέτη ακολουθιών & συναρτήσεων)

(α) $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| \geq 0$ και $|x| = 0 \iff x = 0$

(β) $|x| = |-x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $|x-y| = |y-x|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(γ) $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Έστω $X \neq \emptyset$ (τυχόν σύνολο)



Μια συνάρτηση $d: X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>μετρική</u> στο X, αν

(α) $\forall x, y \in X \quad d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(β) $\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$

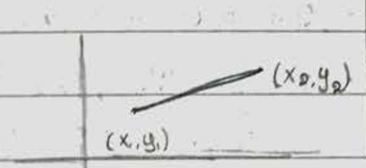
(γ) $\forall x, y, z \in X \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ένα ζευγάρι (X,d), όπου $X \neq \emptyset$ και d μετρική λέγεται <u>μετρικός χώρος</u>.

<u>Παραδείγματα</u>

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ = το $\mathbb{R}$ με μετρική την $|x-y|$
   ↳ η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$

2. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$
   ↳ Ευκλείδεια μετρική



$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

3. $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$
   Αν $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, τότε ορίζουμε
   $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2}$ (η τρ. ανισότητα εκκρεμεί)

4. <u>Διακριτή Μετρική</u>
   Έστω $X \neq \emptyset$. Ορίζουμε $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

Η δ είναι μετρική. (α) απλή, (β) απλή

(γ) Έστω $x, y, z \in X$. Ζητάμε $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

- Αν $\delta(x,z)=0$ αφού $0 \le \delta(x,y)+\delta(y,z)$ ισχύει η τριγωνική
- Αν $\delta(x,z)=1$ έχουμε $\delta(x,y)+\delta(y,z) \in \{0,\underset{\text{εντάξει}}{1},\overset{\text{εντάξει}}{2}\}$

Αν $\delta(x,y)+\delta(y,z)=0 \Rightarrow \delta(x,y)=\delta(y,z)=0 \Rightarrow x=y$ και $y=z$
$\Rightarrow x=z \Rightarrow \delta(x,z)=0$ <u>άτοπο</u>

<u>Παρατήρηση</u>: Οι μετρική χώροι $(\mathbb{R},|\cdot|)$ και $(\mathbb{R},\delta)$ είναι <u>τελείως</u> διαφορετικές

(5) Έστω $X \neq \emptyset$ και $f: X \to \mathbb{R}$ 1-1 συνάρτηση
Ορίζουμε $d_f : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$
Η d_f είναι μετρική
(α) $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)| \geq 0$ και $d_f(x,y)=0 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)|=0$
$\Leftrightarrow f(x)=f(y) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=y.$
(β) $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=d_f(y,x)$
(γ) $d_f(x,z)=|f(x)-f(z)|=|f(x)-f(y)+f(y)-f(z)| \le |f(x)-f(y)|+$
$+|f(y)-f(z)|=d_f(x,y)+d_f(y,z)$

(6) <u>Διακριτός κύβος</u>
$E_2^m=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots\dots,\varepsilon_m) : \forall j \ \varepsilon_j=\pm 1\}$ → έχει 2^m στοιχεία

Ορίζουμε $\eta_m(\varepsilon,J)=\#\{j : \varepsilon_j \neq J_j\}$ → Hamming μετρική

π.χ. για $n=7$ $\varepsilon=(1,1,-1,1,-1,-1,-1)$ & $J=(1,1,-1,-1,-1,1,1)$
Άρα $\eta_7(\varepsilon,J)=3$

<u>Παρατήρηση</u>: $\boxed{\eta_m(\varepsilon,J)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}|\varepsilon_j-J_j|}$

Τότε $\forall \varepsilon,\zeta,\theta \in \mathcal{E}_2^m$ έχουμε: $\eta_m(\varepsilon,\theta)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}|\varepsilon_j-\theta_j|\le$

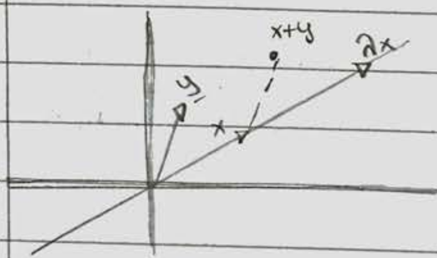
$$\le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(|\varepsilon_j-\zeta_j|+|\zeta_j-\theta_j|\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}|\varepsilon_j-\zeta_j|+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}|\zeta_j-\theta_j|=\eta_m(\varepsilon,\zeta)+\eta_m(\zeta,\theta)$$

Ζ. S_n = το σύνολο των μεταθέσεων $\sigma:[n]\to[n]$
όπου $[n]=\{1,2,\ldots\ldots,n\}$ $(\#S_n=n!)$

$d(\sigma,\pi)=\#\{i:\sigma(i)\neq\pi(i)\}$ ⇝ παίρνει τιμή στο $\{0,\ldots,n\}$ και <u>είναι</u> <u>μετρική</u> (άσκηση)

<u>Χώρος με νόρμα</u>

Έστω X δ.χ. πάνω στο $\mathbb{R}$ (έχουμε $+: X\times X\to X$, $(x,y)\to x+y$, $\cdot:\mathbb{R}\times X\to X$, $(\lambda,x)\to\lambda x$)



<u>Νόρμα</u> στο <u>δ.χ. X</u> είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\forall x\in X$: $\|x\|\geq 0$ και $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

(β) $\forall \lambda\in\mathbb{R}\ \forall x\in X$: $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$

(γ) $\forall x,y\in X$: $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$

Το ζεύγος $(X,\|\cdot\|)$ λέγεται <u>χώρος με νόρμα</u>

<u>Πρόταση</u>

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ορίζουμε $d: X\times X\to\mathbb{R}$ με $d(x,y)\overset{\text{ορσ}}{=}\|x-y\|$. Τότε η d είναι μετρική.
[Η d είναι μετρική και επάγεται στο X από την $\|\cdot\|$].

<u>Απόδειξη</u>: (α) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ και $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \|x-y\|=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
(β) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$
(γ) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y)+d(y,z)$

<u>Σημείωση</u>: Όταν μια μετρική d επάγεται σε έναν δ.χ. X από μια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε έχει δύο ακόμα χρήσιμες ιδιότητες:
(δ) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall x,y \in X$ $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x-y)\| = |\lambda|\,\|x-y\|$
Άρα $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$
(ε) $\forall x,y \in X$ $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y)$
Άρα $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

<u>Παραδείγματα</u> (συνέχεια)

8. Στον $\mathbb{R}^m \overset{\text{ορ}}{=} \{x=(x_1,\dots,x_m) : x_i \in \mathbb{R}\}$ μπορούμε να ορίσουμε (ο οποίος είναι δ.χ. με πράξεις κατά συντεταγμένη)

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_m|\}$

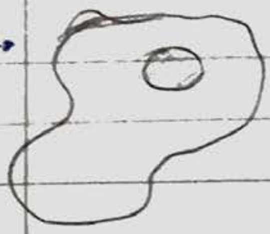
- $\forall\, 1<p<\infty$ $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Όλες αυτές είναι νόρμες στον $\mathbb{R}^m$.

<u>Τρεις βασικοί ορισμοί</u>

(A) Έστω (X,d) μετρικός χώρος.
Η <u>ανοιχτή μπάλα</u> με κέντρο $x_0 \in X$ και ακτίνα $r>0$ είναι το σύνολο $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$

Μπάλα ανοικτή →



(*) Στο παράδειγμα του $\mathbb{R}$:

$x \in B(x_0, r) \iff |x - x_0| < r \iff -r < x - x_0 < r \iff x_0 - r < x < x_0 + r$

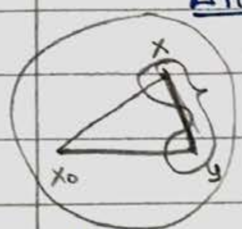
Δηλαδή $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$

(Β) Ένα υποσύνολο A του (X, d) λέγεται <u>φραγμένο</u>, αν περιέχεται σε κάποια ανοικτή μπάλα του X, δηλ. αν $\exists\, x_0 \in X$ και $r > 0$: $A \subseteq B(x_0, r)$.

<u>Τότε</u>: $\forall\, x, y \in A$ έχουμε $d(x,y) \leq d(x, x_0) + d(y, x_0) < r + r = 2r$

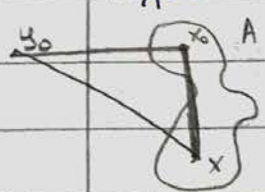
<u>Δηλ.</u> $\underset{\text{ορσ}}{\sup}\{d(x,y) : x, y \in A\} \leq 2r < \infty$

diam(A) : η διάμετρος του A.



<u>Δ.Ο.</u> αν $A \neq \emptyset$ είναι φραγμένο $\Rightarrow \operatorname{diam}(A) \overset{\text{ορσ}}{=} \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} < \infty$

Ισχύει και το αντίστροφο: Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$ με $\operatorname{diam}(A) = R < \infty$



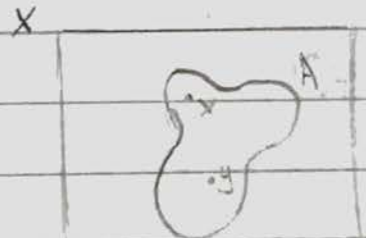
Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in A$. $\forall\, x \in A$ έχουμε:

$d(x, x_0) \leq \operatorname{diam}(A) = R < R + 1$, <u>δηλ.</u> $x \in B(x_0, R+1)$

<u>Σημείωση:</u> Συμφωνάμε ότι το $\emptyset$ είναι φραγμένο με $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$

(Γ) <u>Σχετική Μετρική</u>

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$



Ορίζουμε $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με $d_A(x,y) = d(x,y)$ $\forall\, x, y \in A$

Η d_A είναι η <u>σχετική μετρική</u> (της d) στο A.

Νόρμες στον $\mathbb{R}^m$

Πρόταση 1

Η $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη: (α) $\|x\|_1 \geq 0$ και $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j| = 0 \Leftrightarrow \forall j \ |x_j| = 0$
$\Leftrightarrow \forall j \quad x_j = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(β) $\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{m} |\lambda|\,|x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{m} |x_j| = |\lambda|\,\|x\|_1$

(γ) $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j| + \sum_{j=1}^{m} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

Επαγόμενη μετρική: $d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|$

Πρόταση 2

Η $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \dots, |x_m|\}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$

Απόδειξη: (α),(β) Homework

(γ) Έστω $x,y \in \mathbb{R}^m$. Έστω $1 \leq j \leq m$. Έχουμε ότι:
$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
Άρα $\|x+y\| = \sup\{|x_1+y_1|, \dots, |x_m+y_m|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Πρόταση 3

Έστω $1 < p < \infty$. Τότε η $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη : (α), (β) είναι εύκολα αποδεικνυόμενα.

(γ) Θ.ν.δ.ο. $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \leftarrow$ ΤΑ.

δηλ. $\forall\, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ και $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^p\right)^{1/p} \rightarrow \text{ανισότητα Minkowski}$$

Για την απόδειξη αυτής της ανισότητας (Minkowski) χρειαζόμαστε την ανισότητα Hölder

Συζυγής εκθέτης

Έστω $1<p<\infty$. Ο συζυγής εκθέτης q του p είναι η λύση της εξίσωσης: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, δηλ. $q = \frac{p}{p-1}$ με $1<q<\infty$

Θεώρημα (Ανισότητα Hölder)

Έστω $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ και $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$.

Τότε $$\sum_{j=1}^{m} x_j y_j = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p}}_{\|x\|_p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^q\right)^{1/q}}_{=\|y\|_q}$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Young:

$\forall\, x, y \geq 0$ και $\forall\, p$ όπου $1<p<\infty$ ισχύει $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ (q συζυγής p)

Θ.δ.ο. $\sum_{j=1}^{m} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p > 0$ και $\sum_{j=1}^{m} |y_j|^q > 0$

Ορίζουμε $a_j = \frac{|x_j|}{\|x\|_p}$, $b_j = \frac{|y_j|}{\|y\|_q}$

<u>Τότε</u>: $\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p = \sum_{j=1}^{m} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} = 1$

$\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p = \|x\|_p^p$

και $\sum_{j=1}^{m} |b_j|^q = \sum_{j=1}^{m} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} = 1$

$\forall j$: $a_j, b_j \le \frac{a_j^p}{p} + \frac{b_j^q}{q}$ (Young) $\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j b_j \le \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m} a_j^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m} b_j^q$

$= \frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 = 1$. Άρα, $\sum_{j=1}^{m} a_j b_j \le 1$

Όμως, επειδή $\sum_{j=1}^{m} \frac{|x_j||y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \sum_{j=1}^{m} a_j b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j y_j| \le \|x\|_p \|y\|_q$

30/9/21

Χώροι με νόρμα (παραδείγματα)

Στον $\mathbb{R}^m$ είδαμε ότι οι $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$ και

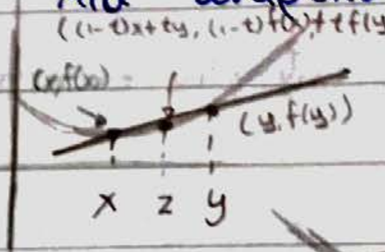
$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots\dots, |x_m|\}$ είναι νόρμες.

Και για κάθε $1<p<\infty$ ορίζουμε: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$

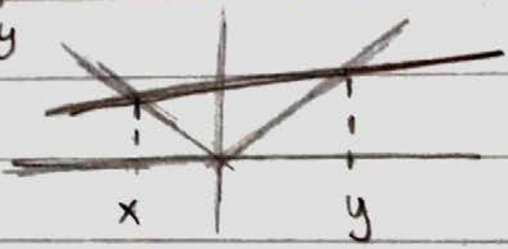
Θ.δ.ο. η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

(a) Ανισότητα Young

Μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ λέγεται κυρτή



Αν $x<y \Rightarrow$ τυχόν $z\in(x,y)$ γράφεται ως $z=(1-t)x+ty$ για κάποιο $t\in(0,1$

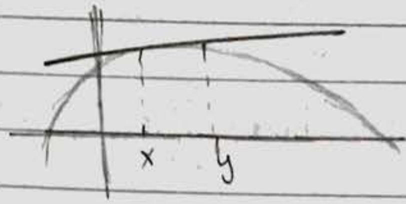


Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ λέγεται κυρτή, ανν $\forall x<y$ στο I και $\forall t$ με $0 \le t \le 1$ ισχύει ότι:

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x) + t f(y).$$

Λέμε ότι η f είναι κοίλη, αν η $-f$ είναι κυρτή $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x<y$ στο I $\forall t$ με $0 \le t \le 1$ ισχύει ότι:

$$f((1-t)x+ty) \ge (1-t)f(x) + f(y).$$

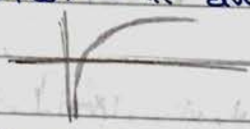


Με αυτόν τον ορισμό

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε f κυρτή $\Leftrightarrow f'$ αύξουσα

(β) Αν η f είναι 2 φορές —»— —»—, τότε f κυρτή $\Leftrightarrow f'' \ge 0$.

Η συνάρτηση $\ln: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, αφού $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
ς $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$



Άρα $\forall x,y>0$ και $\forall t$ με $0<t<1$ έχουμε:

$\ln((1-t)x+ty) \ge (1-t)\ln x + t\ln y = \ln x^{(1-t)} + \ln y^t =$
$= \ln(x^{1-t}y^t)$. Άρα $\boxed{(1-t)x+ty \ge x^{1-t}y^t} \rightsquigarrow^{(*)} a^{1-t}b^t \le (1-t)a + tb$.

$1/p$ $1/q$ x^p y^q

Ανισότητα Young

Αν $x,y \ge 0$ και $1<p<\infty$ και q συζυγής εκθέτης του p,
τότε $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $x=0$ ή $y=0$ η ανισότητα ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $x,y>0$. Από την προηγούμενη σχέση:
$(1-t)x + ty \geq x^{1-t} \cdot y^t$ αν $\forall a,b>0$ $\forall 0<t<1$ έχω
$a^{1-t} \cdot b^t \leq (1-t)a + tb$. Θεωρώ $a=x^p$ και $b=y^q$ και
$t = 1/q \Rightarrow (1-t) = 1-1/q = 1/p$. Άρα έχουμε:
$(x^p)^{1/p} (y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{q} y^q \Rightarrow x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

<u>(β)</u> Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young δείχνουμε την ανισότητα Hölder (προηγ. μάθημα). Αν $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ και $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ και p, q συζυγείς εκθέτες, τότε
$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

<u>(γ) Ανισότητα Minkowski</u>

Έστω $1<p<\infty$. Αν $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ και $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, τότε
$$\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

<u>δηλ.</u> $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

<u>Απόδειξη</u>: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A.M>0$.
$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j|^p = \sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^{p-1} \cdot |x_j+y_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^{p-1} (|x_j|+|y_j|)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{|x_j+y_j|^{p-1}}_{b_j} \cdot \underbrace{|x_j|}_{a_j} + \sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^{p-1} \cdot |y_j|$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^{\overset{(p-1)q}{\underset{p}{\shortparallel}}}\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^p\right)^{p}\right]$$

$(p-1)q = pq - q = p$, διότι $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Leftrightarrow p+q = pq$

Άρα $\|x+y\|_p^p \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^p\right)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p) =$

$= (\|x+y\|_p^p)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p) \Rightarrow (\|x+y\|_p^p)^{1-1/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow$

$\Rightarrow (\|x+y\|_p^p)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

II Χώροι συναρτήσεων

Συμβολίζουμε με $C[a,b]$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Είναι δ.χ. με πράξεις: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε: $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ και

για $p = \infty$ ορίζουμε $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$.

Θ.δ.ο. όλες αυτές νόρμες στο $C[a,b]$

(*) Οι δύο πρώτες ιδιότητες της νόρμας είναι απλές.

$\|f\|_p = 0 \iff \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \underset{\substack{\text{συν.}\\(\text{An } II)}}{\overset{f\geq 0}{\iff}} |f(x)| = 0 \ \forall x \iff f \equiv 0$

$\|\lambda f\|_p = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_a^b |\lambda|^p |f(x)|^p dx\right)^{1/p} =$

$= \left(|\lambda|^p \int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = (|\lambda|^p)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_p$

Για την τριγωνική ανισότητα:

Έστω $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. $p = \infty$

Ζητάμε $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \iff \max\{|f(x)+g(x)| : x \in [a,b]\} \leq$

$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Έστω $x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq$

$\leq \underbrace{\|f(x)\|_\infty + \|g(x)\|_\infty}_{\text{άνω φράγμα}}$. Άρα $\max\{|f(x)+g(x)| : x \in [a,b]\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

(p=1) $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$

(1<p<∞) **Ανισότητα Hölder (για ολοκληρώματα)** (Άσκηση 10)

Έστω $f,g \in C[a,b]$ και $1<p<\infty$ (q ο συζυγής του p)

Τότε $\left|\int_a^b f(x)+g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$

Απόδειξη: Αν $\int |f|^p = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ και ζητάμε $0 \le 0$

Αν $\int |g|^q = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ και ζητάμε $0 \le 0$

Άρα υποθέταμε ότι $\int |f|^p = \|f\|_p^p > 0$, $\int |g|^q = \|g\|_q^q > 0$

(*) Κανονικοποίηση: Ορίζουμε $f_1(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}$, $g_1(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$

Έχουμε $f_1, g_1 \in C[a,b]$ και $\int_a^b |f_1(x)|^p dx = \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} dx =$

$= \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = 1$. Ομοίως, $\int_a^b |g_1(x)|^q dx = 1$

$\forall x \in [a,b]$ έχαμε $|f_1(x)||g_1(x)| \le \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q}$ (Young)

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε: $\int_a^b |f_1(x) g_1(x)|\,dx \le \frac{1}{p}\underbrace{\int_a^b |f_1(x)|^p dx} + \frac{1}{q}\underbrace{\int_a^b |g(x)|^q}$

$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Άρα: $\int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} dx \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_a^b |fg|\,dx \le 1$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \|f(x)\|_p \|g(x)\|_q = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$.

Ανισότητα Minkowski (για ολοκληρώματα)

Έστω $f,g \in C[a,b]$ και $1<p<\infty$. Τότε $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Απόδειξη: $\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f+g|^p = \int_a^b |f+g|^{p-1}|f+g| \le \int_a^b |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)$

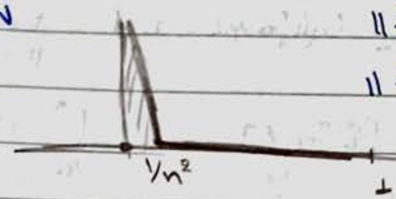
$\le \int_a^b |f+g|^{p-1}|f| + \int_a^b |f+g|^{p-1}|g| \overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_a^b |f+g|^{\overset{p}{(p-1)q}}\right)^{1/q}\left[\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right]$

$\Rightarrow \|f+g\|_p^p \le (\|f+g\|_p^p)^{1/q}(\|f\|_p+\|g\|_p)$

$\Rightarrow (\|f+g\|_p^p)^{1-1/q=1/p} \le \|f\|_p+\|g\|_p \Rightarrow \|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p$

Παρατήρηση: Οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ ορίζονται στον ίδιο χώρο του $C[a,b]$, αλλά είναι πολύ διαφορετική

π.χ. Έστω $n\in\mathbb{N}$



$\|f\|_\infty = n$

$\|f\|_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{1}{2n}$

(Άσκηση Αναλ ΙΙ) $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \max|f|$

$\|f\|_p \xrightarrow{p\to+\infty} \|f\|_\infty$

$\sqrt[n]{|x_1|^n+\dots+|x_n|^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$

III Χώροι ακολουθιών

- S = το σύνολο όλων των ακολουθιών πρ. αριθμών
  [Στοιχεία του S: $x=(x_k)_{k\geq1}^\infty$, $x\in\mathbb{R}$]
- c_0 = το σύνολο όλων των μηδενικών ακολουθιών που έχουν όριο το 0
  [$x=(x_k)\in c_0 \iff x_k\to 0$]
- C = οι συγκλίνουσες ακολουθίες.

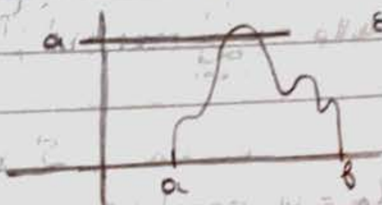
• c_{00} = οι τελικά μηδενικές ακολουθίες

$[x=(x_k)\in c_{00} \iff \exists N\in\mathbb{N} : \forall k>N : x_k=0]$

$\|x\|_p = \|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k\in\mathbb{N}\}$.

$$\int_a^b |f(x)|^n\,dx \le \int_a^b \|f\|_\infty^n\,dx = \|f\|_\infty^n (b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \le \left(\int_a^b \|f\|_\infty^n\,dx\right)^{1/n} = \|f\|_\infty (b-a)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty$$



$\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad (x_0-\delta, x_0+\delta): \ |f(x)|>\|f\|_\infty-\varepsilon$

$$\int_a^b |f(x)|^n\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^n\,dx > (\|f\|_\infty-\varepsilon)^n\cdot 2\delta$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \ge \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} > (\|f\|-\varepsilon)^{n\cdot\frac{1}{n}}(2\delta)^{1/n}$$

$\|f\|_\infty-\varepsilon$

$c_{00}\subseteq c_0\subseteq c\subseteq S$.

• Έστω $1\le p<\infty$ $\quad \ell_p=\{x=(x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p<\infty\}$

$(1/k^2)_{k=1}^\infty \in \ell_1 \iff \sum_{k=1}^\infty 1/k^2<\infty$ $\qquad \ell_1\subseteq\ell_2$

$(1/k)_{k=1}^\infty \in \ell_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{1}{k}\right|^2<\infty$

$(1/k)_{k=1}^\infty \notin \ell_1$

<u>Παρατήρηση</u>: Σαν σύνολα, οι ℓ_p <u>δεν</u> συμπίπτουν.

Για $x=(x_k)_{k=1}^\infty\in\ell_p$ ορίζουμε: $\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$

Αν $x=(x_k),\ y=(y_k)\in\ell_p \Rightarrow x+y=(x_k+y_k)\in\ell_p$

<u>δηλ.</u> $\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^p\right)^{1/p}$

Σταθεροποιούμε $N\in\mathbb{N}$. Από την ανισότητα Minkowski για N-άδες: $\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{N}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N}|y_k|^p\right)^{1/p} \le$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Άρα $\forall N\in\mathbb{N}: \sum_{k=1}^{N}|x_k+y_k|^p \le \underbrace{(\|x\|_p+\|y\|_p)^p}_{\text{σταθερός}} < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p}_{\text{συγκλίνει}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}|x_k+y_k|^p \le (\|x\|_p+\|y\|_p)^p < \infty$$

δηλ. $x+y\in\ell_p$ και $\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \le \|x\|_p + \|y\|_p$

$\ell_p \subseteq c_0$, $\sum |x_k|^p < \infty \Rightarrow |x_k| \to 0$

ℓ_∞ = οι φραγμένες ακολουθίες

$\|x\|_\infty = \sup\{|a_k| : k\in\mathbb{N}\}$

$$c_{00} \subseteq \ell_p \overset{\forall p\in\mathbb{N}}{\subseteq} c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty \subseteq S \quad \text{και} \quad \ell_1 \subseteq \ell_2 \subseteq \dots \subseteq \ell_p.$$

Ασκήσεις

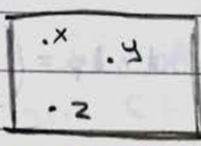
② Έστω (X,d) μετρικός χώρος

(α) $\forall x,y,z\in X: |d(x,z)-d(y,z)| \le d(x,y)$

(β) $\forall x,y,z,w\in X: |d(x,y)-d(z,w)| \le d(x,z)+d(y,w)$

(ανισότητα των 4 σημείων)

Λύση: (α) $\left.\begin{matrix} a\le b \\ -a\le b\end{matrix}\right\} \Rightarrow |a|\le b$

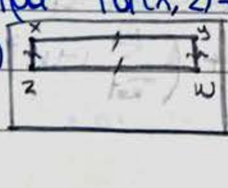


$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z)-d(y,z) \le d(x,y)$

$d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow d(y,z)-d(x,z) \le \underset{d(x,y)}{\overset{\shortparallel}{d(y,x)}}$

Άρα $|d(x,z)-d(y,z)| \le d(x,y)$

(β)

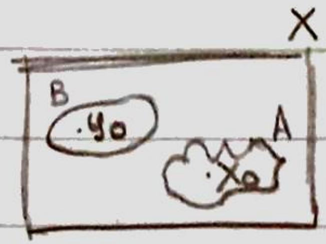


$|d(x,y)-d(z,w)| = |d(x,y)-d(y,z)+d(y,z)-d(z,w)| \le$

$\le |d(x,y)-d(y,z)| + |d(y,z)-d(z,w)| \overset{(α)}{\le} d(x,z)+d(y,w)$

⑧ Έστω $A_1, \dots\dots, A_k$ φραγμένα μη κενά $\subseteq (X,d)$.

Ν.δ.ο. το $A_1 \cup \dots\dots \cup A_k$ είναι φραγμένο.



Λύση: Θεωρούμε δύο σύνολα $A, B \subseteq X$. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ κ $y_0 \in B$. Έστω $x, y \in A \cup B$

- Αν $x, y \in A \Rightarrow d(x,y) \leq diam(A)$
- Αν $x, y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq diam(B)$
- Αν $x \in A$ και $y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y,y_0) \leq$

$\leq diam(A) + d(x_0,y_0) + diam(B)$

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις $d(x,y) \leq diam(A) + diam(B) + d(x_0,y_0) < \infty$

$\Rightarrow diam(A \cup B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A \cup B\} \leq diam(A) + diam(B) + d(x_0,y_0)$

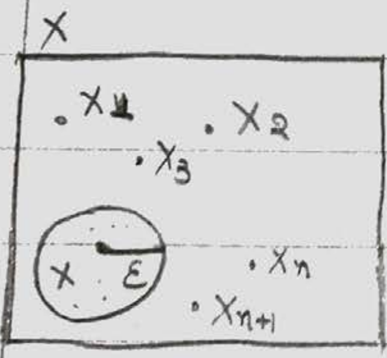
Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

Έστω $\emptyset \neq \Omega$. **Ακολουθία** στο Ω είναι μια συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \Omega$.

Όροι της ακολουθίας είναι οι τιμές $x(1), x(2), \dots\dots, x(n), \dots\dots$ που τους γράφουμε $x_1, x_2, \dots\dots, x_n, \dots\dots$

Την ακολουθία την συμβολίζουμε με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_n$, (x_n)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μας ενδιαφέρουν **ακολουθίες στο X**.



Ορισμός: Έστω (x_n) ακολουθία στον (X, d) και $x \in X$. Λέμε ότι η **(x_n) συγκλίνει στο x** και γράφουμε $x_n \to x$, αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ ισχύει $\boxed{d(x_n, x) < \varepsilon}$ $\iff$ $\forall n \geq n_0$ ισχύει $\boxed{x_n \in B(x, \varepsilon)}$

Βασικές Προτάσεις

Πρόταση 1

$x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0$

Πρόταση 2 (Μοναδικότητα Ορίου)

Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y \Rightarrow x = y$

Πρόταση 3

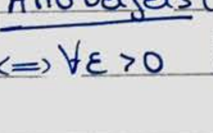
Αν $x_n \to x \Rightarrow$ η (x_n) είναι φραγμένη

(δηλ. $\exists M > 0$ και $x_0 \in X$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(x_0, M)$

Ισοδύναμα αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X)

Πρόταση 4

Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x, y)$



Αποδείξεις (Π.1): $x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x) < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon \iff \underbrace{d(x_n, x)}_{a_n} \to 0$

(Π.2): Έστω $\varepsilon > 0$. Θ.δ.ο. $0 \leq d(x, y) < \varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν έχουμε $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

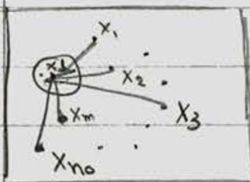
Αφού $x_n \to x$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1 \quad d(x_n, x) < \varepsilon/2$

Αφού $x_n \to y$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2 \quad d(x_n, y) < \varepsilon/2$

Παίρνουμε $N \geq \max\{n_1, n_2\}$.

Τότε $d(x,y) \leq d(x_N, x) + d(x_N, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow 0 \leq d(x,y) < \varepsilon$.

(Π.3): Παίρνουμε $\varepsilon = 1$. Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x) < 1$



Παίρνουμε $M > \max\{1, d(x_1, x), \ldots\ldots, d(x_{n_0}, x)\}$

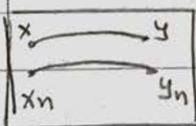
Τότε $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x) < M$ άρα η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- $n > n_0$: Τότε $d(x_n, x) < 1 < M$
- $n \leq n_0$: Απο τον ορισμό του M

$$\underbrace{d(x_n, x)}_{x_n \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}} \leq \max\{1, d(x_1, x), \ldots\ldots, d(x_{n_0}, x)\} < M.$$

(Π.4): Έχουμε την ανισότητα των τεσσάρων σημείων

$$|\underset{b_n}{\underbrace{d(x_n, y_n)}} - \underset{b}{\underbrace{d(x,y)}}| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \xrightarrow{\Pi.1} 0 + 0 = 0$$



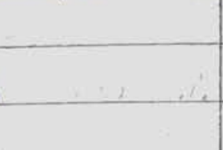
Άρα $b_n = d(x_n, y_n) \to d(x,y) = b$

Άσκηση

Στον (X, δ) (διακριτό μ.χ.) μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα ανν είναι τελικά σταθερή.

Ορισμός: Η (x_n) λέγεται τελικά σταθερή, αν $\exists x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \quad x_n = x$

Υπενθύμιση: $\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}$



Αν $0 < \varepsilon \leq 1$ τότε $B(x, \varepsilon) = \{x\}$

Λύση: ($\Rightarrow$) Έστω ότι $x_n \xrightarrow{\delta} x$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1/2$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\delta(x_n, x) < 1/2$ ($\Leftrightarrow x_n \in B(x, 1/2)$) $\overset{\delta = 0 \text{ ή } 1}{\Longrightarrow}$ $\forall n \geq n_0$ $\delta(x_n, x) = 0$ $\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n = x$.

($\Leftarrow$) Ισχύει σε κάθε μ.χ. Έστω (x_n) τελικά σταθερή ακολουθία $\exists x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $x_n = x$. Θ.δ.ο. $x_n \to x$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Για το n_0 που ορίσαμε παραπάνω έχουμε ότι $d(x_n, x) = 0 < \varepsilon$ (αφού $x_n = x$)

Σημείωση: ① "Άλγεβρα" των ορίων δεν έχει νόημα να μελετήσουμε σε τυχόντα (X, d):
π.χ. αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ "δεν μπορώ να μιλήσω για την $x_n + y_n$" – πρόσθεση στον (X, d) γενικά δεν υπάρχει.
② Σε γενικό (X, d) δεν έχουμε διάταξη ($\leq$, ανισότητες) και κατ' επέκταση δεν μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της αύξουσας ή φθίνουσας ακολουθίας.
③ Σε χώρο με νόρμα έχουμε "κάποια άλγεβρα ορίων".
Αν (x_n), (y_n) είναι δύο ακολουθίες στον $(X, \|\cdot\|)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι $x_n + y_n$, λx_n

Επαγόμενη μετρική: $d(x, y) \overset{\text{ορσ}}{=} \|x - y\|$ και $x_n \to x \overset{\text{π.δ}}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$

Τώρα, αν $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq$ $\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 + 0 = 0$, δηλ. $x_n + y_n \to x + y$

Ομοίως, $\|\lambda x_n - \lambda x\| = \|\lambda (x_n - x)\| = |\lambda| \|x_n - x\| \to 0$, δηλ. $\lambda x_n \to \lambda x$

Βασικές Ακολουθίες (ακολουθίες Cauchy)

Ορισμός: Έστω (X, d) μ.χ. και (x_n) ακολουθία στο X.
Η (x_n) λέγεται βασική, αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Απειροστικός II : (x_n) βασική $\Longleftrightarrow$ (x_n) συγκλίνουσα

- Η "$\Longleftarrow$" ισχύει σε κάθε μ.χ.
- Η "$\Longrightarrow$" δεν ισχύει σε κάθε μ.χ.

Βασικές Προτάσεις

Πρόταση 5

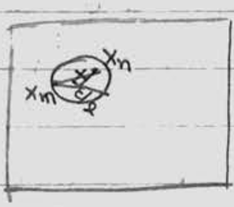
Αν $x_n \to x \Rightarrow$ η (x_n) είναι βασική.

Πρόταση 6

Αν (x_n) είναι βασική $\Rightarrow$ (x_n) είναι φραγμένη

(Αυτές οι δύο προτάσεις ισχύουν σε καθε μ.χ.)

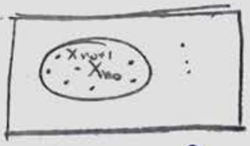
Αποδείξεις (Π.5):



Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $d(x_n, x) < \varepsilon/2$
Έστω $n, m \geq n_0$. Έχουμε:

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(Π.6): Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική $\exists n_0 \in \mathbb{N}$
$\forall n, m \geq n_0$: $d(x_n, x_m) < 1$.
Ειδικότερα, $\forall n \geq n_0$ $d(x_n, x_{n_0}) < 1$



αυτό δεν σημ ότι $x_n \to x_{n_0}$

Ορίζουμε $M > \max\{1, d(x_{n_1}, x_{n_0}), \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$
Διακρίνοντας περιπτώσεις βλέπουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x_{n_0}) < M$
Άρα, η (x_n) είναι φραγμένη.

Παραδείγματα (Βασικές Ακολουθίες που δεν συγκλίνουν)

(α) Θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ με μετρική την $|p-q|$
(βλέπουμε το $\mathbb{Q}$ σαν μ. υπόχωρο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)
Θέτουμε $q_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$

Παρατήρηση: Στον $\mathbb{R}$ έχουμε $q_n \xrightarrow{|\cdot|} e \notin \mathbb{Q}$

- Εδώ έχουμε δυο μ.χ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και τον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$
- Αφού $q_n \to e$ στο $\mathbb{R}$, η (q_n) είναι βασική στο $\mathbb{R}$.
- Δηλ. $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq n_0 \quad |q_n - q_m| < \varepsilon$ στο $\mathbb{R}$.

$$\Downarrow$$

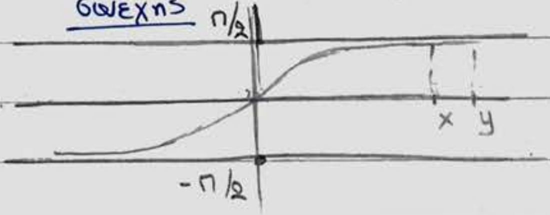
η (q_n) είναι βασική στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

- Όμως, η (q_n) δεν είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Έστω ότι είναι. Τότε $\exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $|q_n - q| \to 0 \Rightarrow q_n \xrightarrow{|\cdot|} q$
Όμως, $q_n \to e$ στο $\mathbb{R}$. Άρα $e = q$ στο $\mathbb{R}$, δηλ. $e \in \mathbb{Q}$ άτοπο

(β) Θεωρούμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan x$
Η f είναι 1-1 (γν. αύξουσα), δηλ. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$.

συνεχής



Η $d(x,y) \overset{\text{ορ}}{=} |f(x) - f(y)| = |\arctan x - \arctan y|$ είναι μετρική.

Παρατήρηση: $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$

(1) Η (x_n) είναι βασική στον $(\mathbb{R}, d)$

Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq n_0 \quad |\arctan x - \pi/2| < \varepsilon/2$.

Αν $n, m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) = d(n,m) = |\arctan n - \arctan m| \leq$
$\leq |\arctan n - \pi/2| + |\pi/2 - \arctan m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(2) Έστω ότι $x_n = n \xrightarrow{d} y \in \mathbb{R}$

Τότε $d(n,y) \to 0 \Rightarrow |\arctan n - \arctan y| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \arctan y = \arctan n - (\arctan n - \arctan y) \to \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Άρα, $\arctan y = \frac{\pi}{2}$ άτοπο, διότι η arctan δεν παίρνει την τιμή $\frac{\pi}{2}$. Δηλ. βρήκαμε βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, d)$ η οποία δεν συγκλίνει.

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X,d) λέγεται πλήρης, αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο X είναι συγκλίνουσα.

(*) Είδαμε ότι υπάρχουν μ.χ. που δεν είναι πλήρης ($(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}, d)$)

Υπακολουθίες

Ορισμός: Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d). Υπακολουθία της (x_n) είναι κάθε ακολουθία $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$ όπου $k_n \in \mathbb{N}$ $k_1 < k_2 < \ldots$

Αυστηρά: $\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$, $(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$.
k γν. αύξουσα

Υπακολουθία υπακολουθίας: $\mathbb{N} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$
$(x \circ k \circ \lambda)(n) = x \circ k(\lambda_n) = x(k_{\lambda_n}) = x_{k_{\lambda_n}}$

Πρόταση 7

Αν $x_n \to x \Rightarrow$ κάθε υπακολουθία της $x_{k_n} \to x$

Πρόταση 8

Αν (x_n) είναι βασική και κάποια $x_{k_n} \to x \Rightarrow x_n \to x$

Ισχύουν σε <u>κάθε</u> μ.χ.

Λήμμα: Αν (k_n) είναι γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

[Απεί. ΙΙ: με επαγωγή ως προς το n αποδεικνύεται]

Αποδείξεις (Π.7): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:
(*) " αν $s \geq n_0$ τότε $d(x_s, x) < \varepsilon$ ". Έστω $n \geq n_0 \Rightarrow \underset{s}{k_n} \geq n \geq n_0$
Απο τη (*) με $s = k_n$ έχουμε $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$.
Άρα $x_{k_n} \to x$.
(Π.8): Έστω $\varepsilon > 0$.
- $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall s, k \geq n_1 \quad d(x_s, x_k) < \varepsilon/2$ ((x_n) βασική)
- $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2 \quad d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$ ($x_{k_n} \to x$)

Παίρνουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Έστω $n \geq n_0$
(i) $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1$, δηλ. $k_n, n \geq n_1$ άρα $d(x_{k_n}, x_n) < \varepsilon/2$
(ii) $n \geq n_0 \geq n_2 \Rightarrow d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$
Άρα, $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Άρα $x_n \to x$.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει σε όλους τους μετρικούς χώρους:

"σε κάποιους μ.χ. υπάρχουν κάποιες φραγμένες ακολουθίες, που δεν έχουν καμία συγκλίνουσα υπακολουθία"

→ Έστω X απειροσύνολο και δ η διακριτή μετρική στο X.
Ο (X,δ) είναι φραγμένος: $diam(X) = 1 < \infty$.
Έστω (x_n) ακολουθία στο X με όρους διαφορετικούς ανά 2

- Η (x_n) είναι φραγμένη
- Αν $\exists (x_{k_n})$ συγκλίνουσα, τότε αυτή είναι τελικά σταθερή, άτοπο

7/10/21

Είδαμε ότι το Θ. Bolzano-Weierstrass <u>δεν</u> ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο

Παράδειγμα 1

X = απειροσύνολο, δ = διακριτή μετρική στο X

Θεωρούμε (x_n) στο X τ.ω. $m \neq n \Rightarrow x_n \neq x_m$

(υπάρχει γιατί το X είναι απειροσύνολο)

Η (x_n) είναι φραγμένη, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(x_1, 2)$ $(\delta(x_n, x_1) = 1 < 2)$

Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) τ.ω. $x_{k_n} \xrightarrow{\delta} x_0 \in X$

Τότε η (x_{k_n}) είναι βασική: $\exists n_0$ $\forall n, m \geq n_0$ $\delta(x_{k_n}, x_{k_m}) < 1/2$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$ $x_{k_n} = x_{k_m}$ <u>άτοπο</u> (οι x_{k_n} είναι διαφ. ανά δύο)

Παράδειγμα 2

$\ell_\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \text{η } (x_n) \text{ είναι φραγμένη}\}$ $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$

$d(x,y) = \|x-y\|_\infty = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορίζουμε $x_n = (0,0,0,\dots\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-οστη θέση}}}{1},0,0,\dots\dots)$ $\quad \forall n \ \|x_n\|_\infty = 1$

$\forall n \ x_n \in B(0,2)$

(x_n) φραγμένη

Επίσης, αν $m \neq n$, τότε $d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_\infty = 1$ (1)

x_n	0	0	$\dots$			0	1	0	$\dots$	
x_m	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	0	0	$\dots$	
$x_n - x_m$	0	0	$\dots$	-1	$\dots$	0	1	0	$\dots$	

Έστω ότι (x_n) έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in \ell_\infty$.

Τότε $\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \ \ 1 \overset{(1)}{=} \|x_{k_n} - x_{k_m}\| < 1/2$ άτοπο

Ορισμός: Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα: **Κάθε** ακολουθία (x_n) στον (X,d) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε ο (X,d) λέγεται (ακολουθιακά) **συμπαγής** (Κεφάλαιο 6)

Πρόταση

Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} \qquad d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^2}$$

Απόδειξη: $(m=3)$ Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$

Γράφουμε $x_n = (a_n, b_n, \gamma_n)$ όπου $a_n, b_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

1. Η (x_n) είναι φραγμένη: $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall n \ x_n \in B(0,M) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x_n\|_2 < M \Rightarrow \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2} < M$

Τότε: $|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2} < M$ και όμοια $|b_n|, |\gamma_n| < M$

δηλ. οι $(a_n), (b_n), (\gamma_n)$ είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}$

x_1	a_1	b_1	γ_1
x_2	a_2	b_2	γ_2
x_3	a_3	b_3	γ_3
x_4	a_4	b_4	γ_4
x_5	a_5	b_5	γ_5
x_6	a_6	b_6	γ_6
x_7	a_7	b_7	γ_7
x_8	a_8	b_8	γ_8

· Η (a_n) είναι φραγμένη στο $\mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$
· Θεωρούμε την (b_{k_n}).
Η (b_{k_n}) είναι φραγμένη, γιατί η (b_n) είναι φραγμένη ($\forall n\ |b_n| < M$)
Άρα $\exists b_{k_{\lambda_n}}$ (υπακολουθία της (b_{k_n})) τ.ω. $\boxed{b_{k_{\lambda_n}} \to b \in \mathbb{R}}$
Τότε $a_{k_n} \to a \Rightarrow \boxed{a_{k_{\lambda_n}} \to a}$

Θεωρούμε την $(\gamma_{k_{\lambda_n}})$. Αυτή είναι φραγμένη (από το M) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to \gamma \in \mathbb{R}$

· Αφού $a_{k_{\lambda_n}} \to a \Rightarrow a_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to a$ (ως υπακολουθία της $a_{k_{\lambda_n}}$)

· Αφού $b_{k_{\lambda_n}} \to b \Rightarrow b_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to b$ (– " – της $b_{k_{\lambda_n}}$)

Τότε $x_{k_{\lambda_{\mu_n}}} = \left(a_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, b_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, \gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}}\right) \to \underbrace{(a, b, \gamma) = x}_{\text{όριο υπακολ. της } (x_n)}$

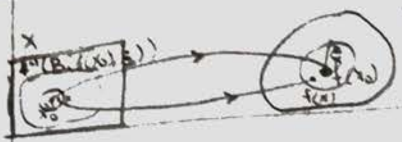
Έχουμε $\|x - x_{k_{\lambda_{\mu_n}}}\|_2^2 = \underbrace{(a - a_{k_{\lambda_{\mu_n}}})^2}_{\downarrow\ 0} + \underbrace{(b - b_{k_{\lambda_{\mu_n}}})^2}_{\downarrow\ 0} + \underbrace{(\gamma - \gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}})^2}_{\downarrow\ 0} = 0$

Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

(Κεφάλαιο 4)

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Ορισμός: Έστω $f: (X, d) \to (X, \sigma)$ και $x_0 \in X$.
Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, αν $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τ.ω. αν $x \in X$ και $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.



$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon) \iff$

$\iff B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$

<u>Υπενθύμιση</u>: Αν $f: X\to Y$, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, τότε

$f(A)=\{f(x): x\in A\}$ και $f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$

<u>Θεώρημα</u> (Αρχή της Μεταφοράς)

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ και $x_0\in X$. Τ.α.ε.ι.:

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0

(β) $\forall (x_n)$ στο X με $x_n \xrightarrow{d} x_0$ ισχύει ότι $f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(x_0)$

(γ) $\forall (x_n)$ στο X με $x_n\to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ στο Y είναι συγκλίνουσα

<u>Απόδειξη</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω (x_n) στο X με $x_n\to x_0$. Θ.δ.ο. $f(x_n)\to f(x_0)$.

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, $\exists \delta>0$

$d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. (*)

Αφού $x_n\to x_0$ <u>$\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.</u> $\forall n\geq n_0$ $d(x_n,x_0)<\delta$.

Τότε <u>$\forall n\geq n_0$</u> από την (*) έχουμε <u>$d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$</u>

(β) $\Rightarrow$ (α) Με άτοπο. Έστω ότι η f <u>δεν</u> είναι συνεχής στο x_0.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x$
$d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

Τότε $\exists \varepsilon>0$ τ.ω. $\forall \delta>0$.
<u>Υπάρχει</u> $x\in X$ τ.ω. $d(x,x_0)<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$. (*)

Εφαρμόζουμε την (*) με $\delta=1/n$, $n=1,2,\dots$

βρίσκουμε $x_n\in X$: $d(x_n,x_0)<1/n$ <u>αλλά</u> $\sigma(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$

$x_n\to x_0$ $\quad$ $f(x_n)\not\to f(x_0)$

<u>άτοπο</u>

<u>Σημείωση</u>: Στην πραγματικότητα δ.ο. αν η f δεν είναι συνεχής συνεχής $\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ και (x_n) τ.ω. $x_n\to x_0$ <u>και</u> $\sigma(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$ $\forall$

Άσκηση

(β) $\iff$ (γ)

<u>Λύση</u>: Η (β) $\Rightarrow$ (γ) είναι απλή: Έστω (z_n) στο X με $z_n \to x_0$.
Από το (β) έχουμε $f(z_n) \to f(x_0)$. Άρα η $f(z_n)$ είναι συγκλίνουσα
(γ) $\Rightarrow$ (β) Παίρνουμε $x_n \to x_0$ και δεχόμενοι το (γ) θ.δ.ο. $f(x_n) \to f(x_0)$.
Ορίζουμε $z_n = (x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, x_0, x_4, x_0, \dots)$, δηλ.

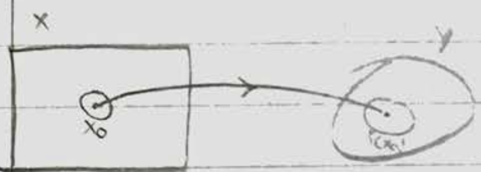
$$z_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k-1 \\ x_0, & n = 2k \end{cases} \quad . \text{ Έχουμε } \left.\begin{array}{l} z_{2k-1} = x_k \to x_0 \\ z_{2k} = x_0 \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow z_n \to x_0$$

Από το (γ) $f(z_n) \xrightarrow{\sigma} y \in Y$. Τότε $f(\underset{x_0}{\overset{}{z_{2k}}}) \to y \Rightarrow \boxed{y = f(x_0)}$
$z_{2k} = x_0 \to$ σταθερή

Άρα $f(z_{2k-1}) \to y = f(x_0) \Rightarrow f(x_k) \to f(x_0)$

Άσκηση 1

Κάθε $f : (X, \delta) \to (Y, \sigma)$ είναι συνεχής



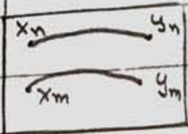
<u>Λύση</u>: Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = 1/2$ (ανεξάρτητο του ε, πάντα ίδιο)
Αν $x \in X$ και $\delta(x, x_0) < 1/2 \Rightarrow x = x_0$, άρα $\sigma(\underbrace{f(x), f(x_0)}_{=}) = 0 < \varepsilon$

Άσκηση 2

Έστω $(x_n), (y_n)$ βασικές ακολουθίες στον (X, d).
Ν.δ.ο. η $a_n = d(x_n, y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$

Λύση: $|a_n - a_m| = |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \underset{\text{ανισότητα 4 σημείων}}{\le} d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$ (*)

Έστω $\varepsilon > 0$.



- (x_n) βασική $\Rightarrow \exists n_1 : \forall n, m \geq n_1 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$
- (y_n) βασική $\Rightarrow \exists n_2 : \forall n, m \geq n_2 \quad d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| \underset{*}{\le} d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Απλές Συνέπειες της Αρχής Μεταφοράς

Πρόταση 1

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ και $g : (Y, \sigma) \to (Z, \tau)$.
Υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο $x_0 \in X$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$. Τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.
Ειδικότερα, αν οι f και g είναι συνεχείς $\Rightarrow g \circ f$ είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $x_n \in X$ με $x_n \to x_0$

- f είναι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$
- η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ και $f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) \Rightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$.
Από την αρχή της μεταφοράς για την $g \circ f$ στο x_0, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Πρόταση 2

Έστω $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
Τότε οι $f + g$, λf, $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leftarrow$ επιτρέπεται (στο $\mathbb{R}$)
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \leftarrow$ στο $\mathbb{R}$ & $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \leftarrow$ στο $\mathbb{R}$

<u>Απόδειξη</u>: Παίρνω $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$
$\Rightarrow f(x_n) g(x_n) \to f(x_0) g(x_0)$ και $\lambda f(x_n) \to \lambda f(x_0)$ και
$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$

<u>Μετρική γινόμενο</u>

Έστω $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots\ldots, (X_k, d_k)$ μετρικοί χώροι.
Θεωρούμε το $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k = \{x = (x(1), \ldots, x(k)) : x(i) \in X_i\}$
Θέλουμε να ορίσουμε μια μετρική στο $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$
που να "σχετίζεται φυσιολογικά" με τις $d_1, d_2, \ldots, d_k$

<u>Ζητάμε</u>

$$(*) \quad \left[\begin{array}{l} x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(k)) \xrightarrow{\rho} x = (x(1), \ldots, x(k)) \\ \text{αν} \quad x_n(1) \xrightarrow{d_1} x(1) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad x_n(k) \xrightarrow{d_k} x(k) \end{array}\right]$$

Μια μετρική ρ στο $X_1 \times \ldots \times X_k$ που ικανοποιεί την $(*)$
θα την λέμε <u>μετρική γινόμενο</u> (των $d_1, \ldots, d_k$)

<u>Σημείωση</u>: Στη συνέχεια του μαθήματος, αν $(X, d), (Y, \sigma)$
είναι δύο μ.χ. και γράφουμε "ο μ.χ. $X \times Y$" θα εννοούμε
πάντα ότι στον $X \times Y$ έχουμε μια μ.χ. των d και σ

<u>Πρόταση</u>

Υπάρχουν πάντα μετρικές γινόμενο στο $X_1 \times \ldots \times X_k$

<u>Απόδειξη</u>: (Άσκηση 1) Έστω $x=(x(1),\dots,x(k))$ και $y=(y(1),\dots,y(k))$ στο $X_1\times\dots\times X_k$.

- $\rho_\infty(x,y)=\max\{d_1(x(1),y(1)),\dots,d_k(x(k),y(k))\}$
- $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(x(j),y(j))^p\right)^{1/p}$, $1\leq p<\infty$

Η ρ_p είναι μετρική γινόμενο των $d_1,\dots,d_k$ στο $X_1\times\dots\times X_k$

(α) <u>Η ρ_p είναι μετρική</u>

Τριγωνική Ανισότητα: $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(x(j),y(j))^p\right)^{1/p}=(*)$

$d_j(x(j),y(j))\leq d_j(x(j),z(j))+d(z(j),y(j))$

$(*)\leq\left(\sum_{j=1}^{k}[\underbrace{d_j(x(j),z(j))}_{a_j}+\underbrace{d_j(z(j),y(j))}_{b_j}]^p\right)^{1/p}\underset{\text{Minkowski}}{\overset{\text{Ανισ.}}{\leq}}$

$\leq\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(x(j),z(j))^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{k} d_j(z(j),y(j))^p\right)^{1/p}=\rho_p(x,z)+\rho_p(z,y)$

(β) <u>Η ρ_p είναι μετρική γινόμενο των $d_1,\dots,d_k$</u>

$x_n\xrightarrow{\rho_p}x\iff\rho_p(x_n,x)\xrightarrow{n\to+\infty}0\iff\left(\sum_{j=1}^{k}\underbrace{d_j(x_n(j),x(j))^p}_{\rho_p(x_n,x)}\right)^{1/p}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\iff$

$|a_i|\leq\left(\sum_{j=1}^{k}|a_j|^p\right)^{1/p}$ $\iff\forall j=1,2,\dots,k\quad d_j(x_n(j),x(j))\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\iff$

$\iff\forall j=1,\dots,k\quad x_n(j)\xrightarrow[n\to+\infty]{d_j}x(j)$

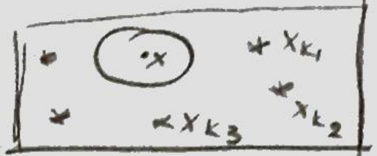
<u>Άσκηση 4</u>

Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d) και $x\in X$.

(α) Αν $x_n\to x\in X\Rightarrow$ κάθε υπακολουθία $x_{k_n}\to x$.

(β) Αν κάθε (x_{k_n}) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $x\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n\to x$



<u>Λύση</u>: (β) Υποθέτουμε ότι $x_n \not\to x$

$\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. άπειροι όροι της (x_n) έξω από την $B(x,\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (x_{k_n})$ τ.ω. $\forall n$ $x_{k_n} \notin B(x,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall n$ $d(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$.

Η (x_{k_n}) <u>δεν</u> μπορεί να έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

<u>άτοπο</u>

Ασκήσεις (Κεφαλαίων 1 και 2)

(1.4) Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο. οι $\rho_1 = \min\{d,1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$, $d_a = d^a$ $(0<a<1)$ είναι μετρικές

Λύση: $\boxed{\rho_1}$ Τριγωνική ανισότητα. Έστω $x,y,z \in X$. Ζητάμε $\rho_1(x,y) \le \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) \iff \min\{d(x,y),1\} \le \min\{d(x,z),1\} + \min\{d(z,y),1\}$. Έχουμε $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow \min\{d(x,y),1\} \le \min\{\underbrace{d(x,z)}_{t} + \underbrace{d(z,y)}_{s}, 1\}$

Α.ν.δ.ο. $\min\{t+s,1\} \le \min\{t,1\} + \min\{s,1\}$ $\forall t,s \ge 0$

- Αν $t \ge 1$ ή $s \ge 1 \Rightarrow \min\{t,1\} + \min\{s,1\} \ge 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \min\{t+s,1\} = 1 \le \min\{t,1\} + \min\{s,1\}$
- Αν $t \le 1$ και $s \le 1 \Rightarrow$ Ζητάμε $\min\{t+s,1\} \le \underset{\min\{1,t\}}{t} + \underset{\min\{1,s\}}{s}$ ισχύει

$\boxed{\rho_2}$ Ζητάμε $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$ $\forall x,y,z \in X$

Θεωρούμε την $g(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \ge 0$ $\left[g'(t) = \frac{1+\cancel{t}-\cancel{t}}{(1+t)^2} > 0 \Rightarrow g \uparrow\right]$

Αφού $\underbrace{d(x,y)}_{t} \le \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{s}$ έχουμε $g(t) \le g(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \le$$

$$\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}.$$

$\boxed{\rho_3}$ Ζητάμε $d(x,y)^a \le d(x,z)^a + d(z,y)^a$

Έχουμε $d(x,y)^a \le \Big(\underbrace{d(x,z)}_{t} + \underbrace{d(z,y)}_{s}\Big)^a \overset{?}{\le} \underbrace{d(x,z)^a}_{t} + \underbrace{d(z,y)^a}_{s}$

Άρα θέλουμε: $\forall t,s>0 \quad (t+s)^a \le t^a+s^a \iff \left(\frac{t}{s}+1\right)^a \le \underbrace{\left(\frac{t}{s}\right)}_{y}^a+1$

Ισοδύναμα: $\forall y \ge 0 \quad (y+1)^a \le y^a+1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(y) = y^a+1-(y+1)^a$, $y \ge 0$.

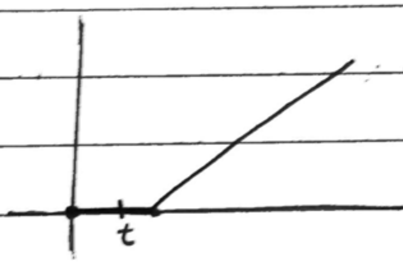
Έχουμε $h(0)=0$ και $h'(y) = ay^{a-1} - a(y+1)^{a-1} = \frac{a}{y^{1-a}} - \frac{a}{(y+1)^{1-a}} > 0$

γιατί $y<y+1 \Rightarrow y^{1-a} < (y+1)^{1-a}$ $\quad \boxed{0<a<1 \Rightarrow 1-a>0}$

1.9 (α) Έστω $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ αύξουσα με $f(0)=0$ και υποπροσθετική $\forall x,y \ge 0$: $f(x+y) \le f(x)+f(y)$ και $f(x)>0$ $\forall x>0$. Ν.δ.ο. αν d είναι μια μετρική στο $X \ne \emptyset$ τότε η $f\circ d$ είναι μετρική στο X.

Λύση: 1. $f\circ d(x,y) = f(\underbrace{d(x,y)}_{\ge 0}) \ge 0$ (γιατί $\forall t \ge 0$ $f(t) \ge f(0)=0$)

≥ 0 ⇝ άρα καλά ορισμένη.



επειδή f αύξουσα δεν σημαίνει γνησίως, για αυτό μας χρειάζεται η $f(x)>0$ $\forall x>0$ συνθήκη, γιατί αλλιώς μπορεί να είχαμε το παρ. σχήμα.

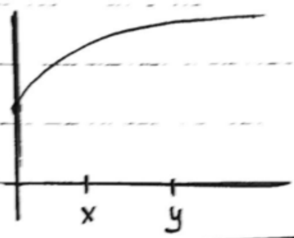
Επίσης $f\circ d(x,y)=0 \iff f(d(x,y))=0 \underset{f(t)>0}{\overset{\forall t}{\iff}} d(x,y)=0 \overset{d \text{ μετρ.}}{\iff} x=y$

2. $f\circ d(y,x) = \underbrace{f(d(y,x)) = f(d(x,y))}_{=} = f\circ d(x,y)$

3. Έστω $x,y,z \in X$ $\quad \underbrace{f(d(x,y)) \le f(d(x,z)+d(z,y))}_{\le \text{ και } f \text{ αύξουσα}} \underset{f \text{ υποπροσθετική}}{\le} f(d(x,z)) + f(d(z,y))$

(B) Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Ν.δ.ο. f κοίλη $\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $x\mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x>0$ φθίνουσα $\underset{(ii)}{\Longrightarrow}$ f υποπροσθετική

<u>Λύση</u>: (i)



$$\boxed{\begin{gathered} f((1-t)u+tv)\geq(1-t)f(u)+tf(v) \\ \forall\, 0<t<1 \end{gathered}}$$

Έστω $0<x<y$

Έχουμε $x=\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot 0+\frac{x}{y}\cdot y \Longrightarrow$

$$\overset{f \text{ κοίλη}}{\Longrightarrow} f(x)\geq\left(1-\frac{x}{y}\right)\underbrace{f(0)}_{\geq 0}+\frac{x}{y}f(y)\geq$$

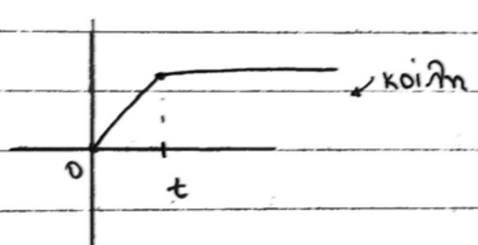
$$\geq\frac{x}{y}f(y)\Longrightarrow\frac{f(x)}{x}\geq\frac{f(y)}{y}$$

(ii)

$$\left.\begin{aligned} x<x+y &\Longrightarrow \frac{f(x+y)}{x+y}\leq\frac{f(x)}{x}\Longrightarrow\frac{x}{x+y}f(x+y)\leq f(x) \\ y<x+y &\Longrightarrow \frac{f(x+y)}{x+y}\leq\frac{f(y)}{y}\Longrightarrow\frac{y}{x+y}f(x+y)\leq f(y) \end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

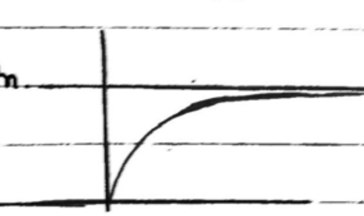
$$\overset{(+)}{\Longrightarrow}\underbrace{\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\right)}_{\frac{x+y}{x+y}=1}f(x+y)\leq f(x)+f(y)\Longrightarrow f(x+y)\leq f(x)+f(y)$$

Στην <u>Άσκηση 1.4</u>: $\rho_1(x,y)=\min\{d(x,y),1\}=f(d(x,y))$, όπου $f(t)=\min\{t,1\}$



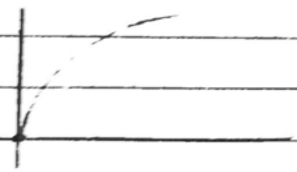
$\rho_2(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=f(d(x,y))$, όπου $g(t)=\frac{t}{1+t}$ $g'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$,

$g''(t)=\frac{-2}{(1+t)^3}<0$ άρα είναι κοίλη.



$\rho_3(x,y) = d_a(x,y) = d(x,y)^a = h(d(x,y))$, όπου $h(t) = t^a$

$h'(t) = a t^{a-1} > 0$, $h''(t) = a(a-1) t^{a-2} < 0$, γιατί $0<a<1$.



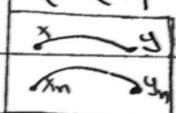
2.5 Έστω (X,d) μ.χ. Θεωρούμε τα $X \times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο τ. Ν.δ.ο. η $d: (X\times X, \tau) \to \mathbb{R}$ με $(x,y) \mapsto d(x,y)$ είναι συνεχής συνάρτηση

<u>Λύση</u>: τ μετρική γινόμενο: $(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau} (x,y) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$

Α.ν.δ.ο. (από αρχή μεταφοράς) "αν $(x_n,y_n) \xrightarrow{\tau} (x,y) \Rightarrow d(x_n,y_n) \to d(x,y)$"

Αφού η τ είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$

Γράφουμε: $|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \le \underbrace{d(x_n,x)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{d(y_n,y)}_{\downarrow\, 0} \to 0$.

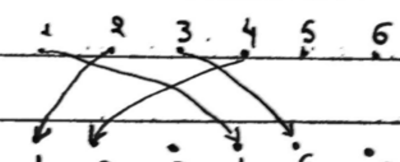


2.10 Έστω (x_n) στον (X,d). Ν.δ.ο. $x_n \to x \in X$ ανν η $(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots\dots)$ συγκλίνει στο x

<u>Λύση</u>: $\boxed{y_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k-1 \\ x, & n = 2k \end{cases}}$ $(\Rightarrow)$ $\left.\begin{matrix} y_{2k-1} = x_k \to x \\ y_{2k} = x \to x \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{Απει II}} y_n \to x$

$(\Leftarrow)$ Έχουμε $y_n \to x$, άρα κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο x.
Ειδικότερα, $x_k = y_{2k-1} \to x$

σ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
μετάθεση, αν
είναι 1-1 κ επί

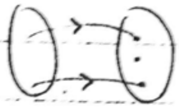


$y_1 = x_{\sigma(1)} = x_4$
$y_2 = x_{\sigma(2)} = x_1$

(2.11) Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d) με $x_n \to x$.
Αν $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \Rightarrow$ η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x

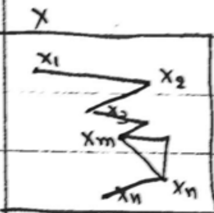
(*) Η y_n __δεν__ είναι απαραίτητα υπακολουθία της (x_n), γιατί οι φυσική $\sigma(n)$ __δεν__ είναι απαραίτητα αύξουσα.

__Λύση__: Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $N\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq N$ $d(y_n,x)<\varepsilon$ $\iff d(x_{\sigma(n)},x)<\varepsilon$. Έχουμε $x_n \to x$. Άρα για το δοθέν $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall k>n_0$ $d(x_k,x)<\varepsilon$. Δηλ. __αν__ $d(x_k,x)\geq\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow k\in\{1,2,\dots,n_0\}$. Τώρα $d(y_n,x)\geq\varepsilon \Rightarrow d(x_{\sigma(n)},x)\geq\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \sigma(n)\in\{1,2,\dots,n_0\} \Rightarrow n\in\sigma^{-1}(\{1,2,\dots,n_0\})$ που έχει το πολύ n_0 στοιχεία, γιατί η σ είναι 1-1. $=A_{n_0}$



Θέτουμε $N=\max(A_{n_0})$. Τότε αν $n>N$ έχουμε $n\notin A_{n_0} \Rightarrow \sigma(n)>n_0 \Rightarrow d(x_{\sigma(n)},x)<\varepsilon \Rightarrow d(y_n,x)<\varepsilon$

(2.13) Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d). Λέμε ότι η (x_n) έχει __φραγμένη κύμανση__, αν $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1})<\infty$



(α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση $\Rightarrow$ είναι βασική (άρα και φραγμένη). Ισχύει αντίστροφο;
(β) Αν η (x_n) είναι βασική $\Rightarrow$ έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση
(γ) Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία ανν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

__Λύση__: (α) Βασική ιδέα: Αν $m>n \overset{(*)}{\Rightarrow} d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x_{n+1})+\dots+d(x_{m-1},x_m)$
Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k,x_{k+1})$ συγκλίνει,
η $S_n=\sum_{k=1}^{n} d(x_k,x_{k+1})$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η (S_n) είναι βασική.

Άρα, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 : |S_{m-1} - S_{n-1}| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) + \ldots\ldots + d(x_{m-1}, x_m) < \varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow} d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι βασική.

<u>Το αντίστροφο δεν ισχύει</u>: Παράδειγμα στο $\mathbb{R}$

Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ συγκλίνει (Liebniz)

Ορίζουμε $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$.

• Η (x_n) συγκλίνει στο $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$. Άρα είναι βασική

• $|x_{n+1} - x_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$

Άρα η (x_n) <u>δεν</u> έχει φραγμένη κύμανση.

[Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow (x_n)$ βασική
και συγκλίνει

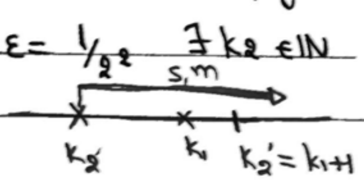
Αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| = \infty$]

(β) Θα βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τ.ω. $d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, δηλ.

η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση.

Αφού η (x_n) είναι βασική, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ τω $\forall s, m \geq k_1$
$d(x_s, x_m) < 1/2$. Για $\varepsilon = 1/2^2$ $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ με $k_2 > k_1$ τω $\forall s, m \geq k_2$
$d(x_s, x_m) < 1/2^2$



Έχω $k_2, k_1 \geq k_1$, οπότε $d(x_{k_2}, x_{k_1}) < 1/2$.

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ τω. $\forall s = 1, \dots, n-1$
$d(x_{k_s}, x_{k_{s+1}}) < \frac{1}{2^s}$. Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$. $\exists\, k_{n+1} > k_n$ τω.

$\forall s, m \geq k_{n+1}$ $d(x_s, x_m) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Τότε $k_{n+1}, k_n \geq k_n \Rightarrow d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$

Με επαγωγή προκύπτει η (x_{k_n})

(γ) $(\Rightarrow)$ Έστω (x_{k_n}) βασική υπακολουθία της $(x_n) \Rightarrow$
$\overset{(\beta)}{\Rightarrow} \exists\, (x_{k_{n_\lambda}})$ υπακολουθία της (x_{k_n}) (άρα και της (x_n))
που έχει φραγμένη κύμανση

$(\Leftarrow)$ Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) που έχει φραγμένη κύμανση. Από το (α) η (x_{k_n}) είναι βασική.

2.9 Έστω $1 \leq p < \infty$ και $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_p$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x(n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.
Ν.δ.ο. $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x - x(n)\|_p \to 0$ Ισχύει το ίδιο στον ℓ_∞;

<u>Λύση</u>: $\cdot\ \|y\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}$

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$
$x(n)$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	0	0	$\dots$
$x-x(n)$	0	0	0	$\dots$	0	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$

$\|x - x(n)\|_p = \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, διότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$

$\cdot\ \|y\|_\infty = \sup\{|y_k| : k \in \mathbb{N}\} \rightsquigarrow$ για φραγμένες ακολουθίες.

ℓ_∞

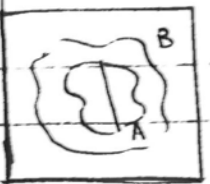
x	1	1	1	$\dots$	1	1	1	$\dots$
$x(n)$	1	1	1	$\dots$	1	0	0	$\dots$
$x-x(n)$	0	0	0	$\dots$	0	1	1	$\dots$

n

$\|x - x(n)\|_\infty = 1 \not\to 0 \quad \forall n$

(1.6) (β) $A \subseteq B \subseteq (X,d) \Rightarrow diam(A) \le diam(B)$

↳ άνω φράγμα για το $\{d(x,y) : x,y \in A\}$



$\sup \Gamma \le \lambda \Leftrightarrow \lambda$ άνω φράγμα.

<u>Λύση</u>: Έστω $x,y \in A \Rightarrow x,y \in B$ (διότι $A \subseteq B$) $\Rightarrow d(x,y) \le diam(B)$

Άρα $\underbrace{\sup\{d(x,y) : x,y \in A\}}_{= diam(A)} \le diam(B)$.

(γ) Αν $A,B \subseteq X \Rightarrow diam(A\cap B) \overset{(i)}{\le} \max\{diam(A), diam(B)\} \le$
$\le \max\{diam(A), diam(B)\} \overset{(ii)}{\le} diam(A\cup B)$

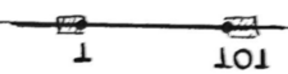
<u>Λύση</u>: Για την (i) ανισότητα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A\cap B \in A &\Rightarrow diam(A\cap B) \le diam(A) \\ A\cap B \in B &\Rightarrow diam(A\cap B) \le diam(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow diam(A\cap B) \le \max\{diam(A), diam(B)\}$$

Για την (ii) ανισότητα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A \subseteq A\cup B &\Rightarrow diam(A) \le diam(A\cup B) \\ B \subseteq A\cup B &\Rightarrow diam(B) \le diam(A\cup B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \max\{diam(A), diam(B)\} \le diam(A\cup B)$$

Είναι σωστό ότι $^{(*)}$ $diam(A\cup B) \le diam(A) + diam(B)$;;;



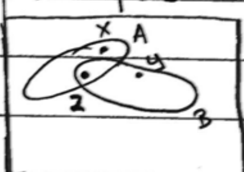
$A = \{1\} \longrightarrow diam(A) = 0$

$B = \{101\} \longrightarrow diam(B) = 0$

$A\cup B = \{1, 101\} \longrightarrow diam(A\cup B) = 100$

Άρα <u>ΟΧΙ</u>.

Αν όμως $A\cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ η (*) ισχύει. Έστω $z \in A\cap B$ και $x,y \in A\cup B$.



- Αν $x \in A$, $y \in B \Rightarrow d(x,y) \le \overset{\in A}{d(x,z)} + \overset{\in B}{d(z,y)} \le diam(A) + diam(B)$
- Αν $x,y \in A$: $d(x,y) \le diam(A)$
- Αν $x,y \in B$: $d(x,y) \le diam(B)$.

Άρα $\forall x,y \in A\cup B$: $d(x,y) \le diam(A) + diam(B) \Rightarrow diam(A\cup B) \le diam(A) + diam(B)$

14/10/21

Τοπολογία Μετρικών Χώρων

Ορισμός: Έστω (X,d) μ.χ., $x\in X$, $r>0$.

- Η ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r:

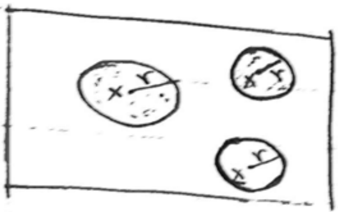
$$B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}.$$

- Η κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r:

$$\hat{B}(x,r)=\{y\in X: d(x,y)\le r\}.$$

- Η σφαίρα με κέντρο το x και ακτίνα r

$$S(x,r)=\{y\in X: d(x,y)=r\}$$



$$\hat{B}(x,r)=B(x,r)\cup S(x,r)$$

Παραδείγματα

(1) Στον (X,δ) έχουμε $B(x,r)=\begin{cases}\{x\}, & \text{αν } 0<r\le 1\\ X, & \text{αν } r>1\end{cases}$

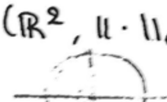
$$\hat{B}(x,r)=\begin{cases}X, & \text{αν } r>1\\ \{x\}, & \text{αν } 0<r<1\\ X, & \text{αν } r=1\end{cases} \qquad S(x,r)=\begin{cases}\emptyset, & \text{αν } r\neq 1\\ X\setminus\{x\}, & \text{αν } r=1\end{cases}$$

(2) Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$

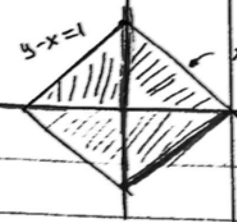
- $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}: |y-x|<r\}=(x-r,x+r)$
- $\hat{B}(x,r)=\{y\in\mathbb{R}: |y-x|\le r\}=[x-r,x+r]$
- $S(x,r)=\{x-r,x+r\}$

(3) Στον $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$

- $B_2(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{x^2+y^2}<1\}$

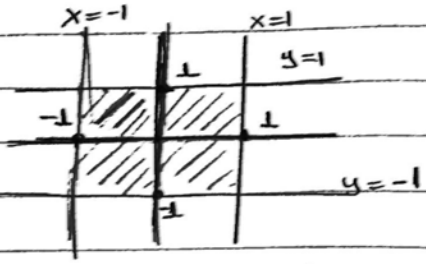


· $B_1(0,1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\}$



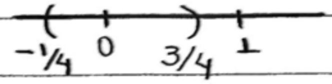
ρόμβος

· $B_\infty(0,1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<1,\ |y|<1\}$



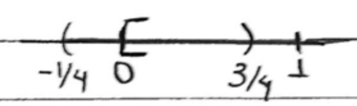
τετράγωνο

(4) $([0,1], |\cdot|)$ $\quad B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \left\{ y\in[0,1] : \left|y-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2}\right\} =$

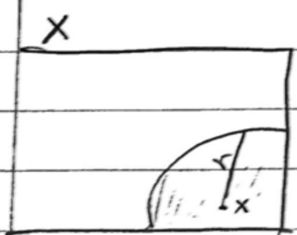


$= \left\{ y\in\mathbb{R} : 0\le y\le 1,\ -\frac{1}{4}<y<\frac{3}{4}\right\}$

Άρα



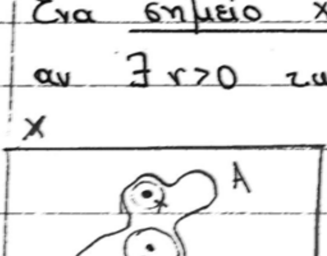
$= [0, 3/4)$.



Πρέπει τα σημεία της μπάλας να ανήκουν στον μ.χ.

Δύο ειδικές κλάσεις υποσυνόλων ενός μ.χ. (ανοικτά & κλειστά)

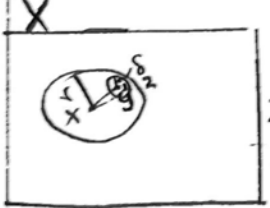
Ορισμός (εσωτερικό σημείο): Έστω (X,d) μ.χ. και $A\subseteq X$. Ένα σημείο x του A λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν $\exists\, r>0$ τ.ω. $B(x,r)\subseteq A$



<u>Ορισμός</u> (ανοικτό σύνολο): Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται <u>ανοικτό</u>, αν κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A:
"$\forall x \in A \ \exists r>0$ τ.ω. $B(x,r) \subseteq A$."

<u>Παραδείγματα</u>

① Κάθε ανοικτή μπάλα $B(x,r)$, $x \in X$, $r>0$ είναι ανοικτό σύνολο



<u>Απόδειξη</u>: Έστω $y \in B(x,r)$. Ξέρουμε ότι $d(x,y)<r$. Παίρνουμε $\delta = r - d(x,y)$. Θ.δ.ο. $B(y,\delta) \subseteq B(x,r)$. Έστω $\boxed{z \in B(y,\delta)}$. Τότε

$$d(z,x) \le \underbrace{d(z,y)}_{<\delta} + d(y,x) < \delta + d(y,x) = r$$

Άρα $\boxed{z \in B(x,r)}$

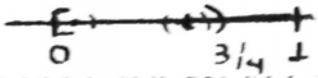
② Στον (X,δ) <u>κάθε</u> $A \subseteq X$ είναι ανοικτό.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x \in A$. Τότε $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} \subseteq A$.
Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του A.
Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, το A είναι ανοικτό.

③ Το $\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι είναι. Παίρνουμε τυχόντα $q \in \mathbb{Q}$.
Το q είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{Q} \Rightarrow \exists r>0$:
$B(q,r) = (q-r, q+r) \subseteq \mathbb{Q}$ <u>άτοπο</u>, γιατί $\exists$ άρρητος $\xi \in (q-r, q+r)$

④ Στον $[0,1]$ με τη συνήθη μετρική.



Το $[0,3/4) = B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ είναι ανοικτό

Στο $\mathbb{R}$ το $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ <u>δεν</u> είναι ανοικτό ↙ έχει σημασία ο μ.χ.

<u>Πρόταση</u> (βασικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών συνόλων)

Έστω (X,d) μ.χ.

(α) Το ϕ και το X είναι ανοικτά σύνολα

(β) Αν $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι ανοικτά σύνολα $\Rightarrow$
$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

(γ) Αν $\{G_i, i\in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: (α) X ανοικτό: Έστω $x\in X$. Παίρνουμε $r=1$ (οποιοδήποτε $r>0$).
Τότε $B(x,1)\subseteq X$, δηλ. το x είναι εσωτερικό σημείο του X.
ϕ ανοικτό: Έστω ότι δεν είναι. Τότε $\exists\, x\in\phi$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο του ϕ ↳ <u>άτοπο</u>
[$x\in\phi \Rightarrow x$ εσ. σημείο του ϕ ⇝ η συνεπαγωγή ισχύει]

(β) Έστω $x\in G_1\cap G_2\cap\ldots\cap G_n$. Τότε: $x\in G_1 \overset{G_1\text{ αν.}}{\Longrightarrow} \exists\, r_1>0 : B(x,r_1)\subseteq G_1$

$x\in G_2 \overset{G_2\text{ αν.}}{\Longrightarrow} \exists\, r_2>0 : B(x,r_2)\subseteq G_2$

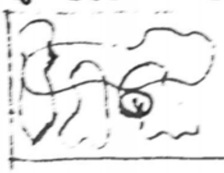
$\vdots$

$x\in G_n \overset{G_n\text{ αν.}}{\Longrightarrow} \exists\, r_n>0 : B(x,r_n)\subseteq G_n$

Θέτουμε $r=\min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}>0$ $\boxed{\forall k\ r_k\geq r}$

Τότε $\forall k=1,\ldots,n$ $B(x,r)\subseteq B(x,r_k)\subseteq G_k \Rightarrow B(x,r)\subseteq G_1\cap\ldots\cap G_n$.

(γ) Έστω $G_i, i\in I$ ανοικτά. Έστω $x\in\bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow \exists\, i_0\in I$ τ.ω. $x\in G_{i_0}$

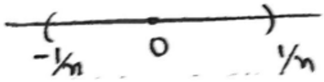


Αφού το G_{i_0} είναι ανοικτό $\exists\, r>0$ τ.ω.
$B(x,r)\subseteq G_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I} G_i$. Άρα, το x είναι εσωτερικό σημείο του $\bigcup_{i\in I} G_i$

<u>Παράδειγμα</u>

Τομή άπειρων το πλήθος υποσυνόλων δεν είναι <u>απαραίτητα</u> ανοικτό σύνολο.

<u>Στο $\mathbb{R}$</u>



$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ — ανοικτό, $n=1,2,\ldots$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\} \Rightarrow$ <u>ΔΕΝ</u> είναι ανοικτό

Αν ήταν, αφού είναι μη-κενό, θα περιέχει διάστη-μα

<u>Πρόταση</u> (Περιγραφή των Ανοικτών Συνόλων μέσω Ακολουθιών)

Έστω (X,d) μ.χ. και $G \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το G είναι ανοικτό

(ii) Για κάθε ακολουθία <u>x_n στο X</u> η οποία συγκλίνει σε κάποιο <u>$x \in G$</u> $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. <u>$\forall n \geq n_0 \; x_n \in G$</u>

<u>Απόδειξη</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Αφού $x \in G$ και το G είναι ανοικτό, $\exists r > 0$ τω. $B(x,r) \subseteq G$. Αφού $x_n \to x \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n \geq n_0 \; d(x_n, x) < r \Rightarrow \forall n \geq n_0 \; x_n \in B(x,r) \subseteq G$ $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \; x_n \in G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το G <u>δεν</u> είναι ανοικτό.

$\exists x \in G$ που <u>δεν</u> είναι εσωτερικό σημείο του G. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall r > 0$ η $B(x,r)$ <u>δεν</u> περιέχεται στο G.

Εφαρμόζοντας το για $r = 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ <u>δεν</u> περιέχεται στο G $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_n \in X : x_n \notin G$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

• Αφού: $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$ έχαμε $x_n \to x \overset{\text{υπόθεση}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in G$ <u>άτοπο</u> $(\forall n \quad x_n \notin G)$

<u>Ορισμός</u> (κλειστό σύνολο): Έστω (X,d) μ.χ. και $F \subseteq X$.
Λέμε ότι το F είναι <u>κλειστό</u>, αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό

<u>Πρόταση</u> (Βασικές Ιδιότητες της Οικογένειας των Κλειστών Συνόλων)

Έστω (X,d) μ.χ.
(α) Το $\emptyset$ και το X είναι κλειστά σύνολα.
(β) Αν $F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n$ είναι κλειστά σύνολα $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ το $F_1 \cup F_2 \cup \ldots\ldots \cup F_n$ είναι κλειστό.
(γ) Αν $\{F_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια κλειστών συνόλων $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό σύνολο.

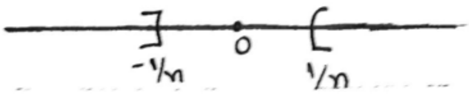
<u>Απόδειξη</u>: (α) Το $\emptyset$ είναι κλειστό, γιατί το $X \setminus \emptyset = X$ ανοικτό.
Το X είναι κλειστό, γιατί το $X \setminus X = \emptyset$ ανοικτό
(β) Έστω $F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n$ κλειστά. Τότε τα $F_1^c, F_2^c, \ldots\ldots, F_n^c$ είναι ανοικτά $(F^c = X \setminus F) \overset{\text{Πρόταση}}{\Longrightarrow} F_1^c \cap F_2^c \cap \ldots\ldots \cap F_n^c$ ανοικτό $\Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{F_1}{\underset{\parallel}{(F_1^c)^c}} \cup \ldots\ldots \cup \underset{F_n}{\underset{\parallel}{(F_n^c)^c}} = (F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c)^c$ κλειστό

$\boxed{(A^c)^c = A}$

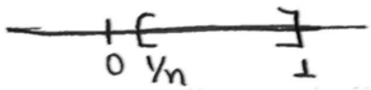
(γ) Έστω $F_i, i \in I$ κλειστά σύνολα. Τα $F_i^c, i \in I$ είναι ανοικτά
$\overset{\text{Πρόταση}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \in I} F_i^c$ ανοικτό $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (F_i^c)^c = \left(\bigcup_{i \in I} F_i^c\right)^c$ κλειστό

<u>Παράδειγμα</u> (Άπειρη Ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι απαραίτητα κλειστό σύνολο)

• $F_n = \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, +\infty\right)$ – κλειστό



$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ – δεν είναι κλειστό γιατί $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \{0\}$ δεν είναι ανοικτό

• 

$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $n \geq 2$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1] \to$ όχι κλειστό, γιατί το συμπλήρωμα όχι ανοικτό

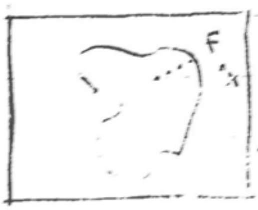
<u>Πρόταση</u> (Περιγραφή των Κλειστών συνόλων μέσω Ακολουθιών)

Έστω (X,d) μ.χ. και $F \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

(i) Το F είναι κλειστό σύνολο

(ii) Για κάθε ακολουθία <u>(x_n) στο F</u> η οποία συγκλίνει σε κάποιο <u>$x \in X$</u> ισχύει ότι <u>$x \in F$</u>.

<u>Απόδειξη</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι $\exists (x_n)$ στο F τ.ω. $x_n \to x \notin F$.



Τότε $x \in X\setminus F$ και το $X\setminus F$ είναι ανοικτό.
Από γνωστή Πρόταση $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $x_n \in X\setminus F$
<u>άτοπο</u>, γιατί όλοι οι $x_n \in F$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Απαγωγή σε άτοπο.
Έστω ότι το F <u>δεν</u> είναι κλειστό σύνολο. Τότε το $X\setminus F$ <u>δεν</u> είναι ανοικτό. Υπάρχει $x \in X\setminus F$ που <u>δεν</u> είναι εσωτερικό σημείο του $X\setminus F$.

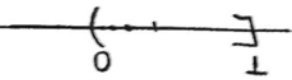
X

Τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ $B\left(x,\frac{1}{n}\right)\not\subseteq X\setminus F$, δηλ. $\exists x_n\notin X\setminus F$ τ.ω. $x_n\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\Rightarrow x_n\in F$ και $d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$

Τότε $\underline{x_n\in F}$ και $\underline{x_n\to x}$. Από την υπόθεση (ii) παίρνουμε ότι $x\in F$ άτοπο.

Παραδείγματα

① Το $(0,1]$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.



$x_n=\frac{1}{2^n}\in(0,1]$ $x_n=\frac{1}{2^n}\to 0\notin(0,1]$

② Στον (X,δ) κάθε $A\subseteq X$ είναι κλειστό.

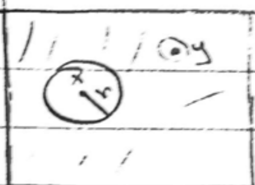
· Έστω $A\subseteq X$. Το $X\setminus A$ είναι ανοικτό (έχουμε δει ότι όλα τα $A\subseteq X$ είναι ανοικτά στον (X,δ))

$\overset{\text{ορσ}}{\Rightarrow}$ A κλειστό

③ Κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο.

α΄-τρόπος: Δ.ο. το $X\setminus\hat{B}(x,r)=\{y\in X: d(y,x)>r\}$ είναι ανοικτό

X



Έστω $y\in X\setminus\hat{B}(x,r)\Rightarrow d(y,x)>r$.

(*) Θα βρούμε $\delta>0$ τ.ω. $B(y,\delta)\cap\hat{B}(x,r)=\emptyset$ $\Rightarrow B(y,\delta)\subseteq X\setminus\hat{B}(x,r)\Rightarrow y$ εσωτερικό σημείο του $X\setminus\hat{B}(x,r)$.

Ορίζουμε $\boxed{\delta=d(y,x)-r>0}$. Έστω ότι $\exists z\in B(y,\delta)\cap\hat{B}(x,r)$.

Τότε $d(z,y)<\delta$ και $d(z,x)\le r$.

Άρα $d(y,x)\le d(y,z)+d(z,x)<\delta+r\Rightarrow\boxed{\delta>d(y,x)-r}$ άτοπο

β΄-τρόπος: Παίρνουμε $x_n\in\hat{B}(x,r)$, υποθέτουμε ότι $x_n\to y\in X$ και δ.ο. $y\in\hat{B}(x,r)$.

· $d(x_n,x)\le r$ Ζητάμε $d(y,x)\le r$

· $x_n\to y\in X$

" $x\to x$ "

$u_n\to u$
$v_n\to v$
$d(u_n,v_n)\to (u,v)$

Έχουμε $d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) \leq d(y,x_n) + r \longrightarrow 0 + r = r \Rightarrow$
$\Rightarrow d(y,x) \leq r$

Αν $a_n \geq b$ και $a_n \to a$ $\Rightarrow a \geq b$

④ Το $\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, γιατί δεν περιέχει διάστημα

$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\in \mathbb{Q}} \longrightarrow e \notin \mathbb{Q}$

⑤ Το $[a,b]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Έστω $\underline{x_n \in [a,b]}$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

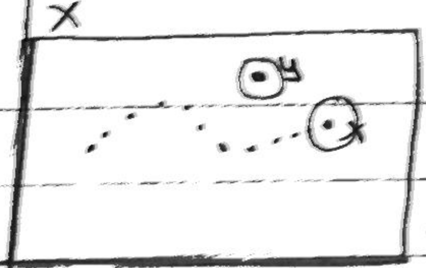
$$\forall n \quad a \leq \underset{\downarrow \atop x}{x_n} \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b]$$

⑥ Σε κάθε μ.χ. τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.
Άρα όλα τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά.

- Έστω (x_n) στο $\{x\}$. Τότε $x_n = x \quad \forall n$.
  Αν $\underset{x}{\underset{\parallel}{x_n}} \to y \in X \Rightarrow y = x \in \{x\}$

- $\{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\} = \underset{\text{κλειστό}}{\{x_1\}} \cup \underset{\text{κλειστό}}{\{x_2\}} \cup \dots \cup \underset{\text{κλειστό}}{\{x_n\}}$ = κλειστό σύνολο ως πεπερασμένη ένωση κλειστών.

⑦ Έστω $x_n \to x$ στον (X,d).
Το σύνολο $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό σύνολο.



Δ.ο. το $X \setminus F$ είναι ανοικτό

Έστω $y \in X \setminus F$

- $y \neq x$ $\quad \exists \delta > 0 : B(y,\delta) \cap B(x,\delta) = \emptyset$ $\quad$ π.χ. $\delta = \frac{d(y,x)}{3}$
- $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x,\delta) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_n \notin B(y,\delta)$
- $x_1, \dots, x_{n_0} \neq y$ (γιατί $y \notin F$) $\Rightarrow \exists \delta' > 0 : x_1, \dots, x_{n_0} \notin B(y,\delta')$.

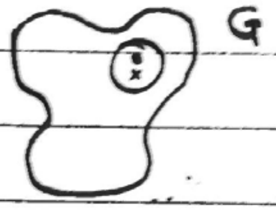
Θέτουμε $r = \min\{\delta, \delta'\} > 0$. Τότε $\to x \notin B(y,r) \Rightarrow B(y,r) \subseteq X \setminus F$

$\to \forall n \quad x_n \notin B(y,r)$

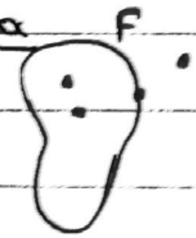
19/10/21

Ανοιχτά και κλειστά σύνολα

• $G \subseteq X$ ανοικτό, αν $\forall x \in G\ \exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq G$



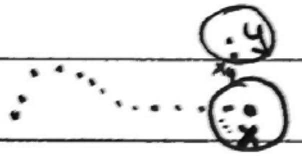
• $F \subseteq X$ κλειστό, αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Ισοδύναμα
" $\forall (x_n)$ στο F τ.ω. $x_n \to x \in X$ έχουμε $x \in F$ "



Παράδειγμα

Έστω (x_n) στον (X,d) τ.ω. $x_n \to x \in X$.
Τότε το $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό.

Λύση: Θ.δ.ο. το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in X \setminus F$.



Τότε $y \neq x$, $y \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αφού $y \neq x$, αν πάρουμε $0 < \delta < \frac{d(x,y)}{2}$, τότε
$B(x,\delta) \cap B(y,\delta) = \emptyset$. Θ.δ.ο. $\boxed{B(y,\delta) \subseteq X \setminus F}$

• Αφού $x_n \to x$ $\exists n_0 : \forall n > n_0$ $x_n \in B(x,\delta) \Rightarrow \forall n > n_0$ $x_n \notin B(y,\delta)$

• Για κάθε $n = 1, \ldots, n_0$ ξέρουμε ότι $x_n \neq y$.

Άρα $\exists \delta_n > 0$ (π.χ. $0 < \delta_n < d(x_n, y)$) τ.ω. $x_n \notin B(y, \delta_n)$.

Ορίζουμε $r=\min\{\delta,\delta_1,\dots,\delta_{n_0}\}>0$. Τότε $x\notin B(y,r)$ και $\forall n$ $x_n\notin B(y,r)$

$\Rightarrow B(y,r)\cap F=\emptyset \Rightarrow B(y,r)\in X\setminus F$.

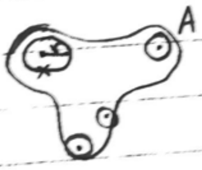
Πρόταση 1

Έστω $A\subseteq (X,d)$. Τότε το A είναι ανοικτό ανν γράφεται ως ένωση ανοικτών μπαλών : $A=\bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Κάθε $B(x_i,r_i)$, $i\in I$ είναι ανοικτό σύνολο και οποιαδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ ανοικτό $\Rightarrow A$ ανοικτό.

($\Rightarrow$) Έστω $A\subseteq X$ ανοικτό. $\forall x\in A$ $\exists r_x>0$ τ.ω. $B(x,r_x)\subseteq A$.



Τότε $A\subseteq \bigcup_{x\in A} B(x,r_x)\subseteq A \Rightarrow \bigcup_{x\in A} B(x,r_x)=A$

Πρόταση 2

Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

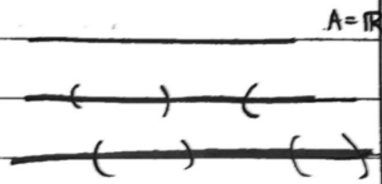
Ανοιχτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

(a,b) όπου $a<b$ $a,b\in\mathbb{R}$

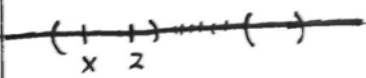
$(-\infty,b)$, $b\in\mathbb{R}$

$(a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

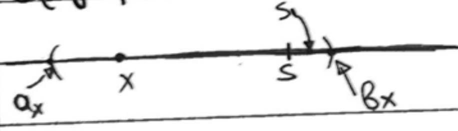


<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x\in A$. (ξέρουμε ότι το x είναι εσωτερικό σημείο A)



$\exists\, \delta_x>0 : (x-\delta_x, x+\delta_x)\subseteq A$.

Ορίζουμε $a_x=\inf\underbrace{\{t<x : (t,x]\subseteq A\}}_{A_x}$ και $b_x=\sup\underbrace{\{s>x : [x,s)\subseteq A\}}_{B_x}$



$(\underset{t}{x-\delta_x}, x]\subseteq A$ και $[x, \underset{s}{x+\delta})\subseteq A$

(*) Ενδέχεται να έχουμε $a_x=-\infty$ ή $b_x=+\infty$.

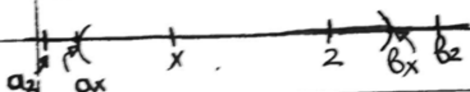
<u>Ισχυρισμός</u>: $(a_x,b_x)\subseteq A$

• $[x,b_x)\subseteq A$. Έστω $x<s<b_x$. $\exists\, s_1>s$, $s_1\in B_x$ τω. $[x,s_1)\subseteq A$

Τότε $s\in[x,s_1) \Longrightarrow \underline{s\in A}$

• $(a_x,x]\in A$ όμοια.

<u>Ισχυρισμός</u>: Έστω $x\in A$. Αν $z\in(a_x,b_x) \Longrightarrow (a_z,b_z)=(a_x,b_x)$



Έχουμε $[z,b_x)\subseteq A \Longrightarrow b_x\leq\sup B_z=b_z$

Όμοια $a_z\leq a_x$

$B_z=\{s>z : [z,s)\subseteq A\}$

$b_x\in B_z$

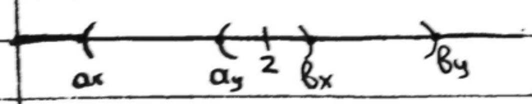
<u>Άρα</u> $(a_x,b_x)\subseteq(a_z,b_z)$

<u>Όμως</u>: $x\in(a_x,b_x) \Longrightarrow x\in(a_z,b_z) \Longrightarrow (a_z,b_z)\subseteq(a_x,b_x)$

όπως πριν αλλάζοντας τους ρόλους των x και z

Τελικά, $(a_x,b_x)=(a_z,b_z)$

<u>Ισχυρισμός</u>: Αν $x,y\in A$ και $(a_x,b_x)\cap(a_y,b_y)\neq\emptyset \Longrightarrow (a_x,b_x)=(a_y,b_y)$



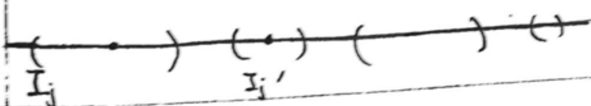
Απόδειξη: Έστω $z\in(a_x,b_x)\cap(a_y,b_y)$

- $z\in(a_x,b_x) \Rightarrow (a_z,b_z)=(a_x,b_x)$
- $z\in(a_y,b_y) \Rightarrow (a_z,b_z)=(a_y,b_y)$

Γράφουμε $A=\bigcup_{x\in A}(a_x,b_x)$.

Τα (a_x,b_x) ταυτίζονται ή είναι ξένα. Τα παίρνουμε μία φορά το καθένα, τα συμβολίζουμε I_j, $j\in J$. και έχουμε $A=\bigcup_{j\in J} I_j$ και τα I είναι ξένα.

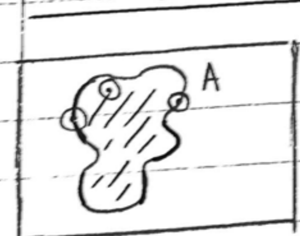
Το σύνολο J είναι αριθμήσιμο. Επιλέγουμε ρητό $q_j\in I_j$



και η απεικόνιση $f: J\to\mathbb{Q}$ με $f(j)=q_j\in I_j$ είναι 1-1, γιατί τα I_j είναι ξένα.

Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο
$\Rightarrow J$ αριθμήσιμο

Εσωτερικό - κλειστή θήκη - σημεία συσσώρευσης - σύνορο



① Το εσωτερικό του A: όλα τα $x\in A$ για τα οποία $\exists\delta>0: B(x,\delta)\subseteq A$

② Η κλειστή θήκη του A: όλα τα $x\in A$ για τα οποία $\forall\delta>0\ \ B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$ (τα $x\in X$ που μπορώ να προσεγγίσω όσο καλά θέλω με σημεία του A)

Ορισμός: Το εσωτερικό του $A\subseteq(X,d)$, A° ή $\text{int}(A)$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A, δηλ.

$x\in A^\circ \overset{ορσ}{\Longleftrightarrow} \exists\delta>0: B(x,\delta)\subseteq A$

Παρατηρήσεις - Παραδείγματα

① $A^\circ \subseteq A$ $\quad (x \in A^\circ \Longleftrightarrow \exists \delta > 0 : \underset{x\in}{B(x,\delta)} \subseteq A \Longrightarrow x \in A)$

② A ανοικτό $\Longrightarrow A = A^\circ$

(αν $x \in A$ και το x είναι εσωτερικό σημείο του A, άρα $x \in A^\circ$, δηλ. $A \subseteq A^\circ$)

③ $A = (0,1] \rightsquigarrow A^\circ = (0,1)$

αφού $1 \notin A^\circ$

④ $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow \mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ (αν $x \in \mathbb{Q}^\circ \Longrightarrow \exists \delta > 0$ τ.ω. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \mathbb{Q}$ άτοπο αφού στο $(x-\delta, x+\delta)$ υπάρχουν άρρητοι)

Πρόταση (ιδιότητες του εσωτερικού)

Έστω $A, B \subseteq (X, d)$

(1) $A^\circ \subseteq A$

(2) Το A° είναι ανοικτό σύνολο

(3) A ανοικτό $\Longleftrightarrow A^\circ = A \Longleftrightarrow A \subseteq A^\circ$

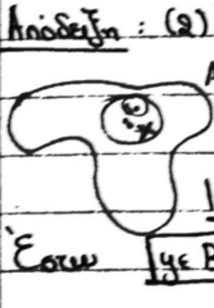
(4) Αν $A \subseteq B \Longrightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

(5) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ και $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$

(6) Αν $V \subseteq A$ και το V ανοικτό, τότε $V \subseteq A^\circ$

(6′) Το A° είναι η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A

Απόδειξη: (2) Έστω $x \in A^\circ$. Θα βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq A^\circ$.



Το x είναι εσωτερικό σημείο του A, άρα $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq A$.

Ισχυρισμός: Για το ίδιο δ: $B(x,\delta) \subseteq A^\circ$.

Έστω $\boxed{y \in B(x,\delta)}$. Η $B(x,\delta)$ είναι ανοικτό σύνολο, άρα

$\exists r>0 : \underline{B(y,r)\subseteq B(x,\delta)}$. Τότε $B(y,r)\subseteq A \Rightarrow y$ εσωτερικό σημείο του A, δηλ. $\boxed{y\in A^\circ}$, δηλ. $B(x,\delta)\subseteq A^\circ$

(3)($\Leftarrow$) Αν $A\subseteq A^\circ$ αφού $A^\circ\subseteq A$ (από το (1)) έχουμε $A=A^\circ$.
Αφού το A° είναι ανοικτό (από το (1)) και $A=A^\circ \Rightarrow A$ ανοικτό

(4)

Έστω $x\in A^\circ$, $\exists \delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)\subseteq A \underset{\text{υπόθεση}}{\subseteq} B$

Άρα $B(x,\delta)\subseteq B \Rightarrow x\in B^\circ$

(5) $\left.\begin{aligned} A\cap B\subseteq A &\overset{(4)}{\Rightarrow} (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \\ A\cap B\subseteq B &\overset{(4)}{\Rightarrow} (A\cap B)^\circ\subseteq B^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ\cap B^\circ$

Έστω $x\in A^\circ\cap B^\circ$. Αφού $x\in A^\circ$ $\exists \delta_1>0 : B(x,\delta_1)\subseteq A$.

Αφού $x\in B^\circ$ $\exists\delta_2>0 : B(x,\delta_2)\subseteq B$.

Αν $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B(x,\delta)\subseteq B(x,\delta_1)\subseteq A \\ B(x,\delta)\subseteq B \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(x,\delta)\subseteq A\cap B$ $\underline{\text{δηλ.}}$ $x\in(A\cap B)^\circ$

$\left.\begin{aligned} A\subseteq A\cup B \\ B\subseteq A\cup B \end{aligned}\right\} \overset{(4)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} A^\circ\subseteq (A\cup B)^\circ \\ B^\circ\subseteq (A\cup B)^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^\circ\cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$

(6) $V\subseteq A \overset{(4)}{\Rightarrow} \underset{\substack{\| \\ V}}{V^\circ} \subseteq A^\circ \Rightarrow V\subseteq A^\circ$

γιατί V ανοικτό

<u>Παράδειγμα</u>: Η ισότητα $A^\circ\cup B^\circ=(A\cup B)^\circ$ <u>δεν</u> ισχύει γενικά

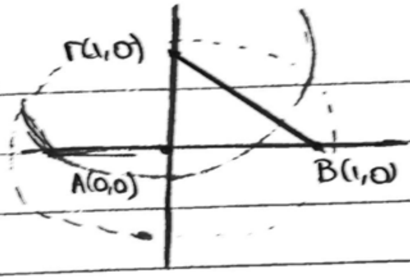
Έχουμε $(\underset{\substack{\| \\ A}}{\mathbb{Q}} \cup \underset{\substack{\| \\ B}}{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})})^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$

Όμως, $\mathbb{Q}^\circ=\emptyset$ και $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ=\emptyset$

(6') Αν πάρω οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του A, έστω V $\Rightarrow V\subseteq A^\circ \Rightarrow A^\circ$ περιέχει την ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A και A° περιέχεται σε αυτή την ένωση γιατί είναι ανοικτό και είναι ένα από αυτά τα V

Προφορική Απόδειξη

Ένα παράδειγμα:



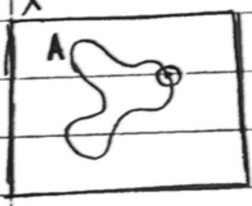
$X=\{A,B,\Gamma\}$ με την Ευκλείδεια μετρική

$B(A,1.1)=\{A,B,\Gamma\}$

$B(\Gamma,1.3)=\{A,\Gamma\}$

Κλειστή Θήκη

Ορισμός: ① Έστω (X,d). Το $x\in X$ λέγεται σημείο επαφής του A, αν $\forall \delta>0$ $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$.



② Η κλειστή θήκη του A ($\bar{A}$ ή $cl(A)$) είναι το σύνολο όλων των σημείων επαφής του A.

Παραδείγματα

① 

$A=(0,1]$

$\bar{A}=[0,1]$

② $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, γιατί $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall\delta>0$ $(x-\delta,x+\delta)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

③ $\mathbb{Q}$ στο $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ $\rightsquigarrow$ $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}$ (γιατί το $\mathbb{Q}$ είναι ολόκληρος ο χώρος)

Πρόταση (Χαρακτηρισμός του Σημείου Επαφής)

$x\in\bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)$ στο A τ.ω. $x_n\to x$

Απόδειξη: ($\Longrightarrow$) Έστω $x\in\bar{A}$. $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε $B(x,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$.
Άρα $\exists\, x_n\in A$ τ.ω. $x_n\in B(x,\frac{1}{n}) \Rightarrow d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to 0$.
Άρα η (x_n) είναι στο A και $x_n\to x$.

($\Leftarrow$) Ξέρουμε ότι $\exists\,(x_n)$ στο A τ.ω. $x_n \to x$. Έστω $\delta>0$.
Αφού $x_n \to x$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $d(x_n,x)<\delta$, δηλ.
....  $x_{n_0} \in A$ και $x_{n_0} \in B(x,\delta) \Rightarrow B(x,\delta)\cap A \neq \emptyset$

<u>Πρόταση</u> (Ιδιότητες της Κλειστής Θήκης)

Έστω $A,B \subseteq (X,d)$.

(1) $A \subseteq \bar{A}$

(2) $\bar{A}$ κλειστό σύνολο

(3) A κλειστό $\Leftrightarrow A=\bar{A}$

(4) $A\subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

(5) $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$ και $\overline{A\cap B} \subseteq \bar{A}\cap\bar{B}$

(6) Αν F κλειστό και $A\subseteq F \Rightarrow \bar{A}\subseteq F$

<u>Απόδειξη</u>: (1) Έστω $x\in A$, $\forall \delta>0$ $x\in B(x,\delta)\cap A \Rightarrow B(x,\delta)\cap A \neq \emptyset$
Άρα $x\in\bar{A}$.

(2) Έστω (x_n) ακολουθία στο $\bar{A}$ τ.ω. $x_n \to x \in X$. Θ.δ.ο. $\boxed{x\in\bar{A}}$

 Έστω $\delta>0$. Αφού $x_n\to x$ $\exists\, n_0 : \forall n\geq n_0$ $d(x_n,x)<\delta/2$
Παίρνουμε ένα τέτοιο n: $B\left(x_n,\frac{\delta}{2}\right) \subseteq B(x,\delta)$ (*)

Ζητάμε $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$
Αν $d(y,x_n)<\delta/2$
$d(y,x)\leq d(y,x_n)+d(x_n,x)$
$< \delta/2+\delta/2=\delta$

Αφού $x_n\in\bar{A}$ $\exists\, z\in A\cap B(x_n,\delta/2)$
<u>Τότε</u> $z\in A$ και $z\in B(x,\delta)$ από την (*)
Δηλ. $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$

(3) ($\Rightarrow$) Ξέρουμε ότι $A\subseteq\bar{A}$. Έστω $x\in\bar{A}$. Από την προηγούμενη πρόταση $\exists\, x_n\in A$ τ.ω. $x_n\to x$. Όμως A κλειστό, άρα $x\in A$.
($\Leftarrow$) Από το (2) το $\bar{A}$ είναι κλειστό, δηλ. $A=\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

(4) Έστω $x\in\bar{A}$. Έστω $\delta>0$. Έχουμε $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$, γιατί $x\in\bar{A}$
και $B(x,\delta)\cap A\subseteq B(x,\delta)\cap B$, γιατί $A\subseteq B$.
Άρα, $B(x,\delta)\cap B\neq\emptyset$, αφού το $\delta>0$ ήταν τυχόν $x\in\bar{B}$.

(5) $$\left.\begin{array}{l}A\subseteq A\cup B\\ B\subseteq A\cup B\end{array}\right\} \xRightarrow{(4)} \bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cup B}$$

<u>Ομοίως</u> $$\left.\begin{array}{l}A\cap B\subseteq A\\ A\cap B\subseteq B\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$$

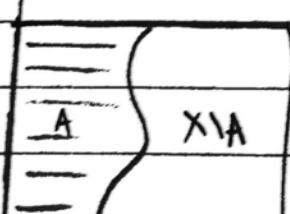
Για την $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ έστω $x\in\overline{A\cup B}$. Υπάρχουν $x_n\in A\cup B$ τ.ω. $x_n\to x$.
Είτε υπάρχουν άπειροι όροι x_n στο A είτε άπειροι όροι x_n στο B.
Στην 1η περίπτωση: $\exists\,(x_{k_n})$ υπακολουθία της (x_n) στο A
Αφού $x_n\to x$ έχουμε $x_{k_n}\to x$. Συνεπώς, $x\in\bar{A}$.
Στην 2η περίπτωση: Ομοίως συμπεραίνουμε ότι $x\in\bar{B}$.
Σε κάθε περίπτωση, $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$.

Παράδειγμα

$A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \leadsto \bar{A}=\mathbb{R}$ και $\bar{B}=\mathbb{R}$
$\bar{A}\cap\bar{B}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$ ενώ $\overline{A\cap B}=\bar{\emptyset}=\emptyset$
Άρα εδώ $\overline{A\cap B}=\emptyset\subsetneq\mathbb{R}=\bar{A}\cap\bar{B}$

(6) Αφού $$F\supseteq A\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ F,\ \text{γιατί } F \text{ κλειστό}}}{\bar{F}}\supseteq\bar{A}\Rightarrow F\supseteq\bar{A}.$$

<u>Θεώρημα</u> (Δυϊσμός εσωτερικού και κλειστής θήκης)



Έστω $A\subseteq(X,d)$
① $X\setminus A^{\circ}=\overline{X\setminus A}$
② $X\setminus\bar{A}=(X\setminus A)^{\circ}$

Απόδειξη: $x \notin A^{\circ} \Longleftrightarrow \forall \delta > 0$ η $B(x,\delta)$ δεν περιέχεται στο A
$\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 : B(x,\delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \overline{X \setminus A}$.

21/10/21

Σημεία συσσώρευσης - μεμονωμένα σημεία

Ορισμός: Έστω A υποσύνολο του (X,d). Θα λέμε ότι το $x\in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αν $\forall \delta>0$ $\exists\, y\neq x$, $y\in A$ τω. $d(y,x)<\delta$.

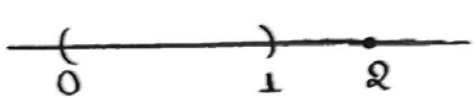
Ισοδύναμα "$\forall \delta>0 : B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$"

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A λέγεται παράγωγο σύνολο του A και συμβολίζεται A'.

Ορισμός: Ένα $x\in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A, αν $\exists \delta>0$ τω. $A\cap B(x,\delta)=\{x\}$.

Σημείωση: (Για $A=x$) Ένα $x\in X$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του X αν $\exists\delta>0$ τω. $B(x,\delta)=\{x\}$, $\boxed{\text{δηλ. } X\cap B(x,\delta)=B(x,\delta)}$

Παραδείγματα

(1) 

$A=(0,1)\cup\{2\}$

$A'=[0,1]$ και το 2 είναι μεμονωμένο σημείο.

(2) $\mathbb{Q}$  $\forall \xi\in\mathbb{R}$

Σε κάθε διάστημα υπάρχουν άπειροι ρητοί. $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

(3) (X,δ) κάθε $x\in X$ είναι μεμονωμένο σημείο του X.

Για $\delta=1/2$ έχουμε $B(x,\delta)=\{x\}$.

Είδαμε ότι: $x\in\bar{A} \iff \exists\,(x_n)$ στο A τ.ω. $x_n \to x$

Πρόταση 1

Έστω $A \subseteq (X,d)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Το x είναι σ.σ. του A ($x\in A'$)

(β) $\forall \delta>0$ στην $B(x,\delta)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A

(γ) Υπάρχει (x_n) στο A τ.ω. $\forall n$ $x_n \neq x$ και $x_n \to x$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x\in A'$ και έστω $\delta>0$

το $B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})$ είναι μη κενό.

Έστω ότι είναι πεπερασμένο. Το γράφουμε $\{y_1,\dots,y_N\}$

Θεωρούμε $0<r<\min\{\underbrace{d(y_1,x)}_{>0},\dots,\underbrace{d(y_N,x)}_{>0}\}<\delta$

Παρατηρούμε ότι $r<\delta$. γιατί $y_1\neq x$

Αφού $x\in A'$, $\exists\, z\in A$, $z\neq x$ τ.ω. $d(z,x)<\delta$.

Τότε $z\in B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})$ και $\forall j=1,\dots,N$ $d(z,x)\leq d(y_j,x) \Rightarrow z\neq y_j$ άτοπο

(β) $\Rightarrow$ (γ) Για $\delta=1$ $\exists\, x_1\in X$, $x_1\neq x$ τ.ω. $d(x_1,x)<1$

Για $\delta=1/2$ στην $B(x,1/2)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_2\in A$, $x_2\neq x$ τ.ω. $d(x_2,x)<1/2$.

[Μάλιστα μπορούμε να πάρουμε $x_2\neq x_1$]

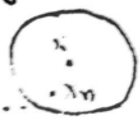
Για $\delta=\frac{1}{n+1}$ και αν έχουμε επιλέξει τα $x_1,\dots,x_n$, στην $B(x,\frac{1}{n+1})$

υπάρχουν άπειρα σημεία του A. Επιλέγουμε $x_{n+1}\neq x, x_1,\dots,x_n$ τ.ω.

$d(x_{n+1},x)<\frac{1}{n+1}$. Έτσι φτιάχνουμε (x_n) στο A: $x_n\neq x$, οι x_n

είναι διαφορετικοί ανά δύο και $d(x_n,x)<\frac{1}{n} \Rightarrow x_n\to x$.

(γ) $\Rightarrow$ (α) Έχουμε $x\in X$ και (x_n) στο A με $x_n\neq x$ και $x_n\to x$



Έστω $\delta>0$. Για μεγάλο n έχουμε:

$x_n\in B(x,\delta)$
Επίσης $x_n\in A$, $x_n\neq x$ $\Big\}\Rightarrow B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$

Άρα $x\in A'$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $A\subseteq(X,d)$ πεπερασμένο, τότε το A <u>δεν</u> έχει σ.σ.

[Αν $x\in A'$ $\Rightarrow \exists\delta>0$ το $B(x,\delta)\cap A$ είναι <u>άπειρο</u> από το (β) της Πρότασης. Ειδικότερα, το A είναι άπειρο.]

<u>Πρόταση 2</u>

Για κάθε $A\subseteq(X,d)$ $\quad \bar{A}=A\cup A'$

<u>Απόδειξη</u>: "$\subseteq$" Έστω $x\in\bar{A}$.

(i) Αν $x\in A$ έχουμε και $x\in A\cup A'$

(ii) Αν $x\notin A$ θ.δ.ο. $x\in A'$ οπότε $x\in A\cup A'$.

Έστω $\delta>0$. Αφού $x\in\bar{A}$ $\boxed{\exists y\in A}$, $\boxed{y\in B(x,\delta)}$

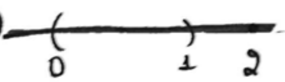
Αφού $y\in A$ και $x\notin A$ $\Rightarrow \boxed{y\neq x}$. Άρα $\forall\delta>0: B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$

"$\supseteq$" · $A\subseteq\bar{A}$ γνωστό

· $A'\subseteq\bar{A}$. Έστω $x\in A'$ και $\delta>0$.

Έχουμε $B(x,\delta)\cap A\supseteq B(x,\delta)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$, γιατί $x\in A'$

Άρα $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset \Rightarrow x\in\bar{A}$.

π.χ. (1)


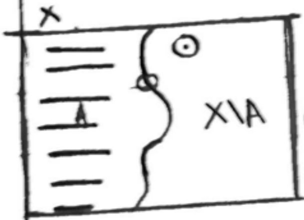
$\bar{A}=[0,1]\cup\{2\}$

$A=(0,1)\cup\{2\}$ και $A'=[0,1]$

(2) $\mathbb{Q}$

$\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ $\quad\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$.

Θεώρημα (Δυϊσμός εσωτερικού και κλειστής θήκης)



Για κάθε $A \subseteq (X,d)$

(1) $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$

(2) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$

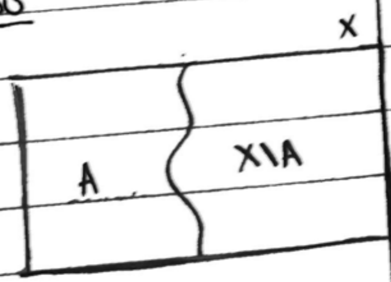
Απόδειξη: (1) $x \in X \setminus \bar{A} \iff x \notin \bar{A} \iff \exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \cap A = \emptyset \iff$
$\iff \exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq X \setminus A \iff x \in (X \setminus A)^\circ$.
(2) $x \in X \setminus A^\circ \iff x \notin A^\circ \iff \forall \delta > 0$ η $B(x,\delta)$ δεν περιέχεται στο A.
$\iff \forall \delta > 0 : B(x,\delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{X \setminus A}$

Ορισμός: Έστω $A \subseteq (X,d)$. Το $x \in X$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν $\forall \delta > 0$ $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x,\delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ (*)
Το σύνορο $\partial(A)$ ή $bd(A)$ είναι το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A

Από τον ορισμό φαίνεται αμέσως ότι $\boxed{x \in \partial(A) \iff x \in \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}}$
Δηλ. $\boxed{\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}}$. Ειδικότερα, το $\partial(A)$ είναι πάντα κλειστό.

Ασκήσεις

30 Βασικές Ιδιότητες του συνόρου



(α) $\partial(A) = \partial(X \setminus A)$
(β) $\bar{A} = \partial(A) \cup A^\circ$
(γ) $X = A^\circ \cup \partial(A) \cup (X \setminus A)^\circ$
(δ) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$
(ε) Το A είναι κλειστό $\iff \partial(A) \subseteq A$

Λύση: (δ) Το έχουμε δει

(α) $\partial(X\setminus A) \overset{(\delta)}{=} \overline{X\setminus A} \cap \overline{\underbrace{(X\setminus A)^c}_{A}} = \overline{X\setminus A} \cap \overline{A} \overset{(\delta)}{=} \partial(A)$.

(β) "$\supseteq$" $\left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \\ \partial(A) \overset{(\delta)}{=} \overline{A} \cap \overline{X\setminus A} \subseteq \overline{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow A^\circ \cup \partial(A) \subseteq \overline{A}$

"$\subseteq$" Έστω $x\in\overline{A}$. Υποθέτουμε ότι $x\notin A^\circ$ και θ.δ.ο. $x\in\partial(A)$.

$\boxed{\text{Έστω } \delta>0}$ Αφού $x\in\overline{A}$ έχουμε $\boxed{B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset}$.

Αφού $x\notin A^\circ$ έχουμε "$B(x,\delta)$ δεν περιέχεται στο A" $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{B(x,\delta)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset}$. Από τον ορισμό, $x\in\partial(A)$.

(γ) $\underbrace{A^\circ\cup\partial(A)}\cup(X\setminus A)^\circ \overset{(\beta)}{=} \overline{A}\cup(X\setminus A)^\circ = \overline{A}\cup(X\setminus\overline{A}) = X$.

Ξέραμε ότι $(X\setminus A)^\circ = X\setminus\overline{A}$, οπότε

(ε) ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό $\partial(A) \overset{(\beta)\text{ ή }(\delta)}{\subseteq} \overline{A} \underset{A\text{ κλειστό}}{=} A$

($\Longleftarrow$) Από το (β): $\overline{A} = \partial(A)\cup A^\circ \underset{\text{υποθ.}}{\subseteq} A\cup A^\circ \underset{A^\circ\subseteq A}{\subseteq} A\cup A = A$

Επίσης, πάντα ισχύει ότι $A\subseteq\overline{A}$

Άρα $\overline{A}=A \iff A$ κλειστό.

24 ✓

καλό να θυμόμαστε

(α) $\overline{A} = A\cup A'$

(β) Το A' είναι κλειστό σύνολο

(γ) Αν $A\subseteq B\subseteq X \Longrightarrow A'\subseteq B'$

(δ) $A' = (\overline{A})'$

(ε) $(A')'\subseteq A'$

Λύση: (β) Έστω $x_n\in A'$ και έστω ότι $x_n\to x$. Θ.δ.ο. $x\in A'$

Έστω $\delta>0$. Αφού $x_n\to x$ $\exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x_n\in B(x,\delta)$

↳ ανοιχτό σύνολο

Υπάρχει $r>0$ τ.ω. $B(x_n,r)\subseteq B(x,\delta)$.

Αφού $x_n\in A'$ στην $B(x_n,r)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A

Άρα, στην $B(x,\delta)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A.

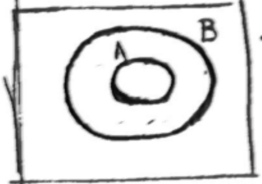
Αυτό σημαίνει ότι $x\in A'$.

(γ) Έστω $x\in A'$. Παίρνουμε τυχόν $\delta>0$. Τότε:

$B(x,\delta)\cap A$ άπειρο σύνολο

$B(x,\delta)\cap A \subseteq B(x,\delta)\cap B$, γιατί $A\subseteq B$ $\Big\} \Rightarrow$ $B(x,\delta)\cap B$ άπειρο σύνολο

Άρα $x\in B'$



$\leftarrow \partial A \not\subseteq \partial B$ ενώ $A\subseteq B$

Η πρόοδος θα γίνει όταν έχουμε κάνει 2/3 της ύλης περίπου, δηλ. σε πέντε εβδομάδες από τώρα περίπου. (28/11 ή 4/12) Θα ανακοινωθεί δύο εβδομάδες πριν η ημερομηνία της προόδου.

(δ) "$\subseteq$" $A\subseteq \bar{A} \Rightarrow A'\subseteq (\bar{A})'$

"$\supseteq$" Έστω $x\in(\bar{A})'$. Έστω $\delta>0$. Υπάρχει $\underbrace{y\in\bar{A},\ y\neq x,\ y\in B(x,\delta)}_{\text{γιατί } x\in(\bar{A})'}$

Υπάρχει $r>0$ με $r<d(y,x)$ ($\rightarrow y\neq x$) τ.ω. $(*)\ B(y,r)\subseteq B(x,\delta)$. Αφού $y\in\bar{A}$ $\exists z\in B(y,r)$, $z\in A$.

Τότε: ① $z\in B(y,r)\Rightarrow d(z,y)<r<d(x,y)\Rightarrow z\neq x$

② $z\in A$

③ $z\in B(y,r)\Rightarrow z\in B(x,\delta)$ από την $(*)$

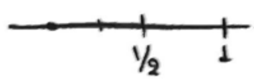
Άρα $x\in A'$.

Παρατήρηση

$\boxed{\begin{array}{l}\bar{B}=B\cup B' \\ \Rightarrow B'\subseteq \bar{B}=B\end{array}}$

(ε) Από το (β) το A' είναι κλειστό. Αφού $B'\subseteq B$ για κάθε κλειστό σύνολο για $B=A'$ παίρνουμε $(A')'\subseteq A'$.

<u>Παράδειγμα</u>: $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$



$A'=\{0\}$, $(A')'=\emptyset$, γιατί A' είναι πεπερασμένο

Άρα $(A')'\subseteq A'$

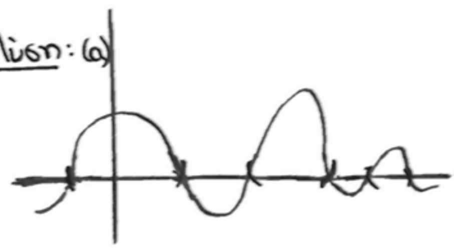
① $F, G \subseteq (X,d)$, G ανοικτό, F κλειστό.
Ν.δ.ο. $F \setminus G$ κλειστό και $G \setminus F$ ανοικτό.

Λύση: • $F \setminus G = F \cap G^c$ = κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων
(F: κλειστό, G^c: κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού)

• $G \setminus F = G \cap F^c$ = ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων
(G: ανοικτό, F^c: ανοικτό, γιατί F κλειστό)

③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ν.δ.ο.
(α) το $G = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ είναι ανοικτό
(β) το $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ είναι κλειστό

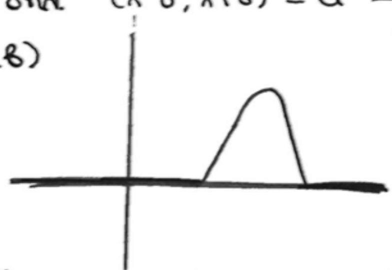
Λύση: (α)



Έστω $x \in G$. Τότε $f(x) > 0$.
Η f είναι συνεχής στο x, άρα $\exists \delta > 0$
τ.ω. $\forall y \in (x-\delta, x+\delta)$ $|f(x) - f(y)| < \frac{f(x)}{2}$
$\Rightarrow 0 < \frac{f(x)}{2} < f(y) < \frac{3f(x)}{2} \Rightarrow 0 < f(y)$.

Δηλ. $\forall y \in (x-\delta, x+\delta)$ $y \in G$,
δηλ. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G \Rightarrow x$ εσωτερικό σημείο του G

(β)



Έστω (x_n) στο F τ.ω. $x_n \to x \in \mathbb{R}$ (θ.δ.ο. $x \in F$)
$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } \forall n \ f(x_n) = 0 \ (\text{διότι } x_n \in F) \\ x_n \to x \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} \underset{\overset{\parallel}{0}}{f(x_n)} \to f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0$$

Δεύτερος τρόπος: $\mathbb{R} \setminus F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$
= ανοικτό ως ένωση δύο ανοικτών (ανοικτό το είδαμε, ανοικτό όμοια)

④ Κάθε κλειστό διάστημα είναι αριθμήσιμη τομή αν. διαστ.
Κάθε ανοικτό — " — — " — ένωση κλ. διαστημάτων

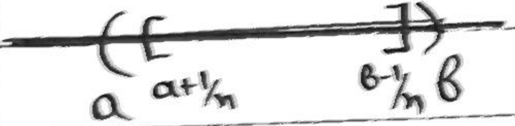
$$[a,\beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \beta + \frac{1}{n}\right)$$

<u>Λύση</u>: "$\subseteq$" - Απλό $\forall n$ $[\alpha,\beta] \subseteq \left(\alpha-\frac{1}{n}, \beta+\frac{1}{n}\right)$

"$\supseteq$" Έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\alpha-\frac{1}{n}, \beta+\frac{1}{n}\right)$ $\forall n$

Για κάθε n, $x \in \left(\alpha-\frac{1}{n}, \beta+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha}}{\alpha-\frac{1}{n}} < x < \underset{\substack{\downarrow \\ \beta}}{\beta+\frac{1}{n}} \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$

$\Rightarrow x \in [\alpha,\beta]$.



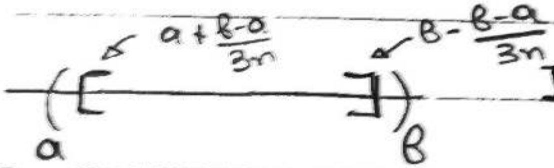
Βρίσκω n_0 τ.ω. $\alpha+\frac{1}{n_0} < \alpha$

26/10/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίου 3)

④ (β) Κάθε ανοικτό διάστημα γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.

Λύση:



$$I_n = \left[\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n}, \ \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n}\right]$$

Ισχύει ότι $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} < \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ισχυρισμός: $(\alpha,\beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

"$\supseteq$" $\forall n \quad I_n \subseteq (\alpha,\beta) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq (\alpha,\beta)$

"$\subseteq$" Έστω $x \in (\alpha,\beta)$. Τότε $\alpha < x < \beta$.

- $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} \longrightarrow \alpha < x \Longrightarrow$ για μεγάλο n, $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} < x$
- $\beta - \frac{\beta-\alpha}{3n} \longrightarrow \beta > x \Longrightarrow$ για μεγάλο n, $x < \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n}$

Δηλαδή, για μεγάλα n, $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{3n} < x < \beta - \frac{\beta-\alpha}{3n} \Longrightarrow x \in I_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

⑤ Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $A \subseteq (X,d)$ είναι κλειστό.

Λύση: Δ.ο. πρώτα το $\{x\}$ είναι κλειστό $\forall x \in X$.
Έστω $u_n \in \{x\}$ και $u_n \to u$
Έχουμε αναγκαστικά $u_n = x$ $\forall n$,
δηλ. η (u_n) είναι σταθερή ίση με x και συγκλίνει στο x.
Δηλ. $u = x \in \{x\}$.

Αν $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ πεπερασμένο σύνολο, τότε
$A = \underbrace{\{x_1\}}_{\text{κλειστό}} \cup \ldots \cup \underbrace{\{x_m\}}_{\text{κλειστό}} =$ κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων.

② Ν.δ.ο. κάθε $A \subseteq (X,d)$ γράφεται ως τομή ανοιχτών συνόλων

Λύση: • Έστω $B \subseteq X$. Τότε $B = \bigcup_{x \in B} \{x\} =$ ένωση κλειστών

• Έστω $A \subseteq X$. Γράφουμε $\underbrace{X \setminus A}_{= B} = \bigcup_{i \in I} F_i$, F_i κλειστά $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = (X \setminus A)^c = \bigcap_{i \in I} F_i^c$, $F_i^c = G_i$ ανοιχτό

⑩ Έστω $A, B \subseteq (X,d)$
(α) Αν $A \cup B = X \Rightarrow \bar{A} \cup B^\circ = X$
(β) Αν $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap B^\circ = \emptyset$

Λύση:

(α) "$\subseteq$" Προφανές (ο X είναι ο χώρος)
"$\supseteq$" Έστω $x \in X$. Υποθέτουμε ότι $x \notin \bar{A}$ και θ.δ.ο. $x \in B^\circ$. Αφού $x \notin \bar{A}$ $\exists \delta > 0$ τω. $B(x,\delta) \cap A = \emptyset \overset{A \cup B = X}{\Longrightarrow} B(x,\delta) \subseteq B \Rightarrow x \in B^\circ$.
$[y \in B(x,\delta) \Rightarrow y \notin A$ και $y \in \underbrace{A \cup B}_{= X} \Rightarrow y \in B]$

$\boxed{\text{Προσοχή: Από την } A \cup B = X \not\Rightarrow B = X \setminus A}$

(β) Έστω $x\in \bar{A}\cap B^\circ$

· Αφού $x\in B^\circ$, $\exists \delta_1>0$: $B(x,\delta_1)\subseteq B$

· Αφού $x\in \bar{A}$, $\forall \delta>0$: $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$.

Ειδικότερα, $B(x,\delta_1)\cap A\neq\emptyset$. άτοπο. Διότι παίρνω $y\in B(x,\delta_1)\cap A$ $\Rightarrow \boxed{y\in A}$ και $y\in B(x,\delta_1)\subseteq B \Rightarrow \boxed{y\in B}$. Άρα $A\cap B\neq\emptyset$ άτοπο

(11) Για κάθε $A,B\subseteq (X,d)$:

(α) $(A\setminus B)^\circ \subseteq A^\circ\setminus B^\circ$ και (β) $\bar{A}\setminus\bar{B}\subseteq \overline{A\setminus B}$

Λύση: (α) Έστω $x\in (A\setminus B)^\circ$: $\exists\delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)\subseteq A\setminus B = A\cap B^c \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x,\delta)\subseteq A$ και $B(x,\delta)\subseteq B^c$

$\Downarrow$ $\boxed{x\in A^\circ}$

$\Downarrow$ $x\in (B^c)^\circ = (X\setminus B)^\circ \underset{\text{θεώρημα}}{=} X\setminus\bar{B}$

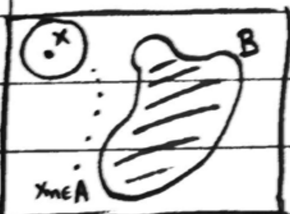
$\Downarrow$ $x\notin\bar{B} \Rightarrow x\notin B^\circ$ (αφού $B^\circ\subseteq B\subseteq\bar{B}$)

Σημείωση: Αυτό που δείξαμε είναι ισχυρότερο, $(A\setminus B)^\circ\subseteq A^\circ\setminus\bar{B}$

(β) Έστω $x\in\bar{A}\setminus\bar{B}$

· 1ος τρόπος: Παίρνω τυχόν $\delta>0$ και δ.ο. $B(x,\delta)\cap(A\setminus B)\neq\emptyset$

· 2ος τρόπος: Βρίσκω $x_n\in A\setminus B$ τ.ω. $x_n\to x$.



$\exists\delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)\cap B=\emptyset$ (γιατί $x\notin\bar{B}$) (*)

Υπάρχουν $x_n\in A$ τ.ω. $x_n\to x$ (γιατί $x\in\bar{A}$)

Αφού $x_n\to x$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\delta) \overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\forall n\geq n_0$ $x_n\notin B$. Συνεπώς, το τελικό τμήμα της $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ είναι στο $A\setminus B$ και συγκλίνει στο x.

⑥ Κάθε σφαίρα $S(x,r)=\{y\in X : d(y,x)=r\}$ είναι κλειστό σύνολο.
Μπορεί να συμβεί $S(x,r)=\phi$;

<u>Λύση</u>: • $X \setminus S(x,r) = \underset{d(y,x)<r}{B(x,r)} \cup (X \setminus \underset{d(y,x)>r}{\hat{B}(x,r)})$ = ανοικτό, γιατί

$B(x,r)$ ανοικτό και $\hat{B}(x,r)$ κλειστό $\Rightarrow X\setminus \hat{B}(x,r)$ ανοικτό

<u>Άλλος τρόπος</u>: Θεωρούμε $y_n \in S(x,r)$ τω. $y_n \to y \in X$.
Τότε $\underset{r}{\underset{\shortparallel}{d(y_n,x)}} \to d(y,x)$. Άρα $d(y,x)=r \Rightarrow y\in S(x,r)$

$\boxed{|d(y,x)-d(y_n,x)| \le d(y_n,y) \to 0}$

Μπορεί $S(x,r)=\phi$ σε κάποιους μ.χ.
Στον (X,δ) $\forall x\in X$: $S(x,1/2)=\phi$ <u>και</u> $S(x,3)=\phi$

(γιατί $x\neq y \Rightarrow \delta(x,y)=1$)
Αυτό <u>δεν</u> μπορεί να γίνει σε χώρους με νόρμα.

⑦ Έστω (X,d) μ.χ., $x\in X$ και $\varepsilon>0$.
Εξετάστε αν ισχύει πάντοτε $\overline{B(x,\varepsilon)} = \hat{B}(x,\varepsilon)$

<u>Λύση</u>: • $B(x,\varepsilon) \subseteq \underset{\hookrightarrow \text{κλειστό}}{\hat{B}(x,\varepsilon)} \Rightarrow \overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$

<u>Υπενθύμιση</u>: Αν $A\subseteq F$ και F κλειστό $\Rightarrow \bar{A}\subseteq F$

$\hat{B}(x,\varepsilon)=\{y\in X : d(y,x)\le\varepsilon\}$
$B(x,\varepsilon)=\{y\in X : d(y,x)<\varepsilon\}$

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει πάντα.
Στον (X,δ) και $x\in X \Rightarrow B(x,1)=\{x\} \Rightarrow$ (↳ κλειστό και ανοιχτό)
$\Rightarrow \overline{B(x,1)}=\{x\}$.
Όμως, $\hat{B}(x,1) = X \neq \{x\} = \overline{B(x,1)}$
↳ αν το X έχει παραπάνω από ένα στοιχεία.

(15) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Ν.δ.ο.: $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\overline{B(x,\varepsilon)} = \hat{B}(x,\varepsilon)$

Λύση: Έχουμε δει $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x,\varepsilon)$ (σε κάθε μ.χ.)

Θεωρούμε $y \in \hat{B}(x,\varepsilon)$ και δ.ο. $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$

• Αν $y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$ (γιατί γενικά $A \subseteq \overline{A}$)

• Θεωρούμε $y \in S(x,\varepsilon)$, δηλ. $\|y-x\| = \varepsilon$

Παίρνουμε σημεία $z_t = (1-t)x + ty$, όπου $0 < t < 1$.

Ισχυρισμός: $z_t \in B(x,\varepsilon)$

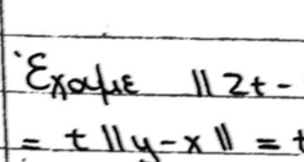
Έχουμε $\|z_t - x\| = \|(1-t)x + ty - x\| = \|-tx + ty\| = \|t(y-x)\| =$
$= t\|y-x\| = t\varepsilon < \varepsilon$.

Θεωρούμε $y_n = z_{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x + \left(1-\frac{1}{n}\right)y \in B(x,\varepsilon)$ (από τον ισχυρισμό)

Ισχυρισμός: $y_n \to y$. Άρα, $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$

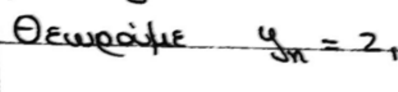
Έχουμε $\|y - y_n\| = \|y - \frac{1}{n}x - (1-\frac{1}{n})y\| = \|-\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}y\| =$
$= \|\frac{1}{n}(y-x)\| = \frac{1}{n}\|y-x\| = \frac{1}{n}\cdot\varepsilon \to 0$

(27)* Έστω (X,d) μ.χ. και $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$



Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$ την απόσταση του x από το A.

(α) $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$



(β) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in X$

(γ) Το $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό και το $B_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό

(δ) Αν $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \Rightarrow \forall x \in X$ $d(x,B) = d(x,A)$.

Λύση: (α) $d(x,A)=0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists y\in A$ τ.ω. $d(y,x)<\varepsilon.^{(1)} \Rightarrow$

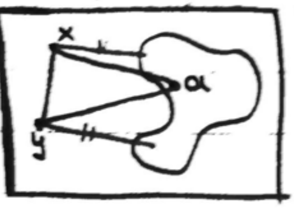
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \Leftrightarrow x\in\overline{A}$

Για την πρώτη "$\Leftarrow$" : το $\{d(x,y): y\in A\}\subseteq [0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\inf\{d(x,y):y\in A\}}_{= d(x,A)}\geq 0$. Όμως, $d(x,A)\leq d(x,y)\ \forall y\in A$

και λόγω της (1) : $d(x,A)<\varepsilon\ \ \forall \varepsilon>0 \Rightarrow d(x,A)\leq 0$.

(β)



Θεωρούμε τυχόν $\alpha\in A$. Έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} d(x,\alpha)\leq d(x,y)+d(y,\alpha) \\ \text{Επίσης}: d(x,A)\leq d(x,\alpha)\end{array}\right\} \Rightarrow d(x,A)\leq d(x,y)+d(y,\alpha)$

$\Downarrow$

$\underbrace{d(x,A)-d(x,y)}_{\text{σταθερό}}\leq d(y,\alpha)\quad \forall \alpha\in A$

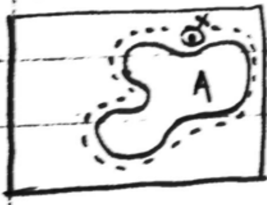
$\Rightarrow d(x,A)-d(x,y)\leq \inf\{d(y,\alpha): \alpha\in A\}=d(y,A)$

Δηλ. $d(x,A)-d(y,A)\leq d(x,y)$

Λόγω συμμετρίας, ισχύει και η $d(y,A)-d(x,A)\leq d(x,y)$

Άρα έχουμε το (β).

(γ) Έστω $x\in A_\varepsilon$. Τότε $d(x,A)<\varepsilon$ Παίρνουμε $\boxed{\delta=\varepsilon-d(x,A)>0}$



Αν $y\in B(x,\delta)$ από το (β) έχουμε

$d(y,A)\leq d(y,x)+d(x,A)<\delta+d(x,A)=\varepsilon$.

Άρα $y\in A_\varepsilon$, δηλ. $\exists \delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta)\subseteq A_\varepsilon$

$B_\varepsilon=\{x\in X: d(x,A)\leq\varepsilon\}$ κλειστό.

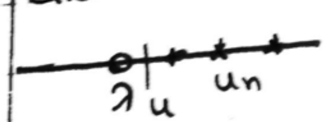
Έστω $x_n\in B_\varepsilon$ και $x_n\to x\in X$.

Τότε $d(x,A)\overset{(β)}{\leq} d(x,x_n)+d(x_n,A)\leq d(x,x_n)+\varepsilon \longrightarrow \varepsilon$

διατί $x_n\in B_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,B)\leq\varepsilon$

διατί $x_n\to x \Rightarrow d(x_n,x)\to 0$

Έπεται ότι $d(x,A)\leq\varepsilon \Rightarrow x\in B_\varepsilon$.



$\left.\begin{array}{l}: \lambda\leq u_n \\ u_n\to u\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\leq u$

<u>Παρατήρηση</u>: $A \subseteq B \Rightarrow \{d(x,y): y \in A\} \subseteq \{d(x,y): y \in B\}$
$\Rightarrow \inf\{d(x,y): y \in B\} \leq \inf\{d(x,y): y \in A\} \Rightarrow d(x,B) \leq d(x,A)$

(δ) <u>Εδώ</u> $\forall x \in X \quad d(x,\bar{A}) \leq d(x,B) \leq d(x,A)$

Για να τελειώσει η άσκηση α.ν.δο. $d(x,A) \leq d(x,\bar{A})$

Έστω $y \in \bar{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. $\exists z \in A$ τω. $d(y,z) < \varepsilon$

Άρα $d(x,A) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon \Rightarrow$

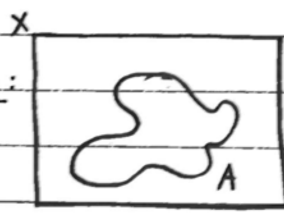
$\Rightarrow d(x,A) - \varepsilon < d(x,y) \quad \forall y \in \bar{A} \Rightarrow d(x,A) - \varepsilon \leq \inf\{d(x,y): y \in \bar{A}\}$

$\Rightarrow d(x,A) - \varepsilon \leq d(x,\bar{A})$. $\qquad d(x,\bar{A})$

Αφού αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ έπεται $d(x,A) \leq d(x,\bar{A})$

(29) Έστω (X,d) μ.χ. Κάθε κλειστό $A \subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων.
Επίσης, κάθε ανοικτό $B \subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

<u>Λύση</u>:



$\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n = \{x \in X: d(x,A) < \frac{1}{n}\}$
Στο (γ) της προηγούμενης άσκησης (27) είδαμε ότι κάθε G_n είναι ανοικτό.

<u>Ισχυρισμός</u>: $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bar{A}$ (και επειδή A κλειστό $\bar{A} = A$, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = A$)

· $\bar{A} \underset{27(\alpha)}{=} \{x \in X: d(x,A) = 0\} \subseteq \{x \in X: d(x,A) < \frac{1}{n}\} = G_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $\bar{A} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$

· Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ τότε $\forall n \quad 0 \leq d(x,A) < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,A) = 0 \overset{27(\alpha)}{\Rightarrow} x \in \bar{A}$.

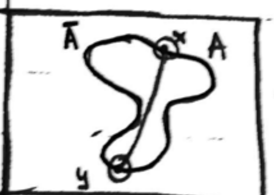
Έστω B ανοικτό $\Rightarrow X \setminus B$ κλειστό $\Rightarrow X\setminus B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n ανοικτό
$\Rightarrow B = (X\setminus B)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c$ και το $F_n := G_n^c$ κλειστό.

Ορολογία

G_δ - σύνολο είναι μια αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων
F_δ - σύνολο είναι μια αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων

Η Άσκηση 29 μας λέει ότι σε κάθε μ.χ. τα κλειστά σύνολα είναι G_δ - σύνολα και τα ανοιχτά σύνολα είναι F_δ - σύνολα

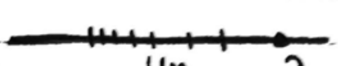
(12) (X,d) μ.χ. $\phi \neq A \subseteq X$. Τότε $diam(\bar{A}) = diam(A)$.
(*) Ισχύει ότι $diam(A^\circ) = diam(A)$;



Λύση: Γενικά, $A \subseteq B \Rightarrow diam(A) \leq diam(B)$
"supremum πάνω από περισσότερα ζευγάρια δεξιά"
Άρα $diam(A) \leq diam(\bar{A})$

Έστω $x, y \in \bar{A}$. Υπάρχουν ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στο A τω. $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Τότε: ① $d(x_n, y_n) \leq diam(A)$ $\forall n$, γιατί $x_n, y_n \in A$
② $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y)$ βγαίνει με την ανισότητα 4 σημείων



$u_n \leq \lambda$ & $u_n \to u$
$\Rightarrow u \leq \lambda$

Από ① & ② $d(x,y) \leq diam(A)$
Αφού τα $x, y \in \bar{A}$ ήταν τυχόντα,
$diam(\bar{A}) = \sup\{d(x,y) : x, y \in \bar{A}\} \leq diam(A)$

Παράδειγμα (στο $\mathbb{R}$) όπου $diam(A^\circ) < diam(A)$

$A = (0,1) \cup \{4\}$

$diam(A) = 4$

$A^\circ = (0,1)$ $\quad diam(A^\circ) = 1 < diam(A) = 4$

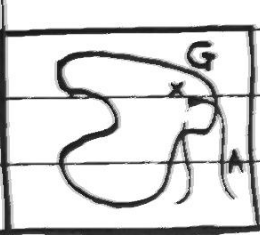
(17) $G \subseteq (X,d)$. Ν.δ.ο τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) G ανοικτό

(β) $\forall A \subseteq X \quad G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$

(γ) $\forall A \subseteq X \quad \overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

Λύση: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x \in G \cap \bar{A}$. Αφού $x \in \bar{A}$ $\exists (x_n)$ στο A τω $x_n \to x$. Αφού $x \in G$ και το G ανοικτό ξέρουμε ότι $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in G$.



(χαρακτηρισμός ανοικτού συνόλου με ακολουθίες)

Δηλ. η $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ είναι στο $G \cap A$ και συγκλίνει στο x

$\Rightarrow x \in \overline{G \cap A}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $A \subseteq X$. Έχουμε $G \cap \bar{A} \subseteq \underbrace{\overline{G \cap A}}_{\text{κλειστό}} \overset{(β)}{\Rightarrow} \overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$

$\left.\begin{array}{l} B \subseteq F \\ F \text{ κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{B} \subseteq F$

Αντίστροφα, $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow G \cap A \subseteq G \cap \bar{A} \underset{\text{κλειστής θήκης}}{\overset{\text{μονοτ.}}{\Longrightarrow}} \overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \bar{A}}$

(γ) $\Rightarrow$ (α) Παίρνω $A = G^c$. Εφαρμόζω την υπόθεση:

$\overline{G \cap \overline{(X \setminus G)}} = \overline{G \cap (X \setminus G)} = \bar{\emptyset} = \emptyset \Rightarrow G \cap \overline{(X \setminus G)} = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X \setminus G} \subseteq X \setminus G \Rightarrow X \setminus G$ κλειστό $\Rightarrow G$ ανοικτό.

2/11/21

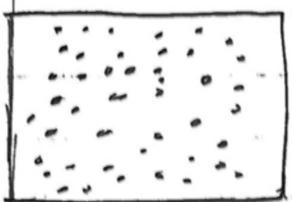
Πυκνά Σύνολα – Διαχωρίσιμοι μ.χ.

Ορισμός: Έστω (X, d) μ.χ.. Ένα $D \subseteq X$ λέγεται **πυκνό**, αν $\overline{D} = X$.

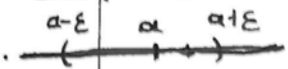
Παραδείγματα

(α) Ο X είναι πάντα πυκνό $\subseteq X$ $(\overline{X} = X)$

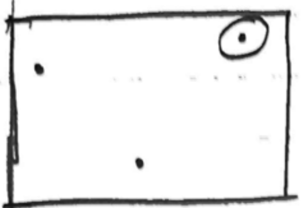
(β) Στο $\mathbb{R}$, το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά σύνολα. Έχουμε δει ότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$



(γ) Στο $\mathbb{R}$ το $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι ανοικτό και πυκνό σύνολο.



(αρκεί να παρατηρήσαμε ότι $a \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{a\}}$)



Το σημείο που βγάζω δεν πρέπει να είναι μεμονωμένο σημείο, για να έχουμε πυκνό σύνολο

Πρόταση (Χαρακτηρισμός των πυκνών συνόλων)

Έστω (X, d) μ.χ. και $D \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) D πυκνό: $\overline{D} = X$

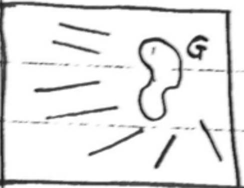
(β) $\forall x \in X$ $\exists (y_n)$ στο D τ.ω. $y_n \to x$

(γ) $\forall x \in X$ και $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

(δ) $\forall$ ανοικτό $G \subseteq X$, $G \cap D \neq \emptyset$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (δ) Έστω $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό

X.



Έστω ότι $G \cap D = \emptyset$. Τότε $D \subseteq \underbrace{X \setminus G}_{\text{κλειστό}} \Rightarrow$

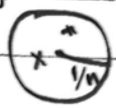
$\Rightarrow \underset{X}{\underset{\|}{\bar{D}}} \subseteq X \setminus G \Rightarrow X \subseteq X \setminus G$ άτοπο

αφού $G \neq \emptyset$

Αν $A \subseteq F$ και F κλειστό $\Big\} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

(δ) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η $B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ ανοικτό σύνολο. Από το (δ) με $G = B(x,\varepsilon)$ έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

(γ) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x \in X$. Για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ έχουμε $y_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap D$



$\Rightarrow y_n \in D$ και $d(y_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, δηλ. $y_n \to x$.

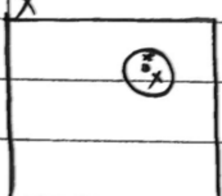
(β) $\Rightarrow$ (α) Ζητάμε $X \subseteq \bar{D}$ (ο αντίστροφος εγκλεισμός πάντα ισχύει)
Έστω $x \in X$. Από το (β) $\exists\, (y_n)$ στο D τ.ω. $y_n \to x \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \bar{D}$ (χαρακτηρισμός του σημείου επαφής)

Παράδειγμα

$X = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) \quad 1 \leq p < \infty$

Τότε το $D = \{ q = (q_1, \ldots, q_m) : q_i \in \mathbb{Q} \}$ είναι πυκνό $\subseteq X$

Λύση: Έστω $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ και έστω $\varepsilon > 0$.

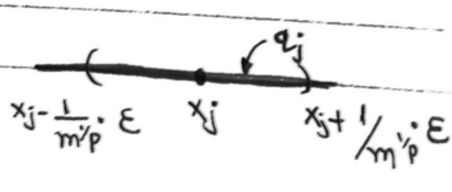


Ζητάμε ρητούς $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ τ.ω. αν $q = (q_1, \ldots, q_m) \in D$ να έχουμε $\|x - q\|_p < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j - q_j|^p < \varepsilon^p$

Αρκεί να βρω $q_j \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $|x_j - q_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{m} \quad j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_j - q_j| < \frac{1}{m^{1/p}} \cdot \varepsilon$



Τέτοιο q_j υπάρχει από πυκνότητα ρητών.

<u>Τελικά</u>: Βρίσκουμε $q_j \in \mathbb{Q} : |x_j - q_j| < \frac{1}{m^{1/p}} \cdot \varepsilon$. $j=1,\dots,m$

Ορίζουμε $q=(q_1,\dots,q_m) \in D$. Τότε $\|x-q\|_p^p = \sum_{j=1}^{m} |x_j-q_j|^p$

$$< \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m}\cdot \varepsilon^p = \varepsilon^p \Rightarrow \|x-q\|_p < \varepsilon \Rightarrow q \in B(x,\varepsilon)$$

<u>Άσκηση 35</u>

Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο.

(α) Αν D πυκνό $\subseteq X$, τότε για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ ισχύει $\overline{D\cap G} = \overline{G}$

(β) Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό $\subseteq X$ και D πυκνό $\subseteq X$, τότε το $G\cap D$ είναι πυκνό $\subseteq X$. Ισχύει το ίδιο αν <u>δεν</u> υποθέσουμε ότι G ανοικτό;

(γ) Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών συνόλων είναι πυκνό σύνολο (σε κάθε μ.χ.);

<u>Λύση</u>: (α) Έχουμε $D\cap G \subseteq G \Rightarrow \overline{D\cap G} \subseteq \overline{G}$

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$

$\boxed{A\subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}}$

Έχουμε $B(x,\varepsilon)\cap G \neq \emptyset$ (γιατί $x\in\overline{G}$) και ανοικτό σύνολο (τομή δύο ανοικτών συνόλων)

$x \in \overline{D\cap G}$

$B(x,\varepsilon)\cap(D\cap G) \neq \emptyset$

Αφού το D είναι πυκνό,

$(B(x,\varepsilon)\cap G)\cap D \neq \emptyset$

$B(x,\varepsilon) \overset{\shortparallel}{\cap} (G\cap D) \neq \emptyset$

Άρα $x \in \overline{G\cap D}$

(β) Από το (α) έχουμε $\overline{G \cap D} = \overline{G}$.
Όμως, $\overline{G} = X$, γιατί το G είναι πυκνό, άρα $\overline{G \cap D} = X \Rightarrow$
$\Rightarrow$ το $G \cap D$ είναι πυκνό.
Χωρίς την υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό δεν ισχύει.
Το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$
που δεν είναι πυκνό

(γ) Από το (β) αν G_1, G_2 είναι ανοικτά πυκνά $\subseteq (X, d)$
τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι ανοικτό και πυκνό σύνολο.
Επαγωγικά, αν $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι ανοικτά και πυκνά
$\subseteq X \Rightarrow$ το $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ είναι ανοικτό και πυκνό $\subseteq X$.

(*) Αν όμως $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών $\subseteq X$
τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ δεν είναι απαραίτητα πυκνό σύνολο.

Παράδειγμα

Παίρνουμε X τον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Μπορούμε να γράψουμε
$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$.
(*) • Κάθε G_n είναι ανοικτό και πυκνό
• $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{q_n\}^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}\right)^c = \mathbb{Q}^c = \emptyset$ που δεν είναι πυκνό.

Γενική Παρατήρηση

(α) Αν x σ.σ. του (X, d) τότε το $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό
[Αυτό αποδεικνύει τη (*) γιατί κάθε $q \in \mathbb{Q}$ είναι σ.σ. του $\mathbb{Q}$]

Απόδειξη: Αν $y \in X \setminus \{x\}$, τότε $y \in \overline{X \setminus \{x\}}$
Αν $y = x$, αφού x είναι σ.σ. του X, $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{X \setminus \{x\}}$, δηλ. $\overline{X \setminus \{x\}} = X$

(β) Αν x είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε για κάθε πυκνό $D \subseteq X$ πρέπει να έχουμε $x \in D$

Απόδειξη: Αφού x μεμονωμένο σημείο, $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) = \{x\}$
Όμως, αν D πυκνό έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x\} \cap D \neq \emptyset \Rightarrow x \in D$.
Ειδικότερα, το $X \setminus \{x\}$ δεν είναι πυκνό.

Παράδειγμα (όπως το προηγούμενο το $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$)

Δεν μπορούμε να δώσουμε σε πλήρη μ.χ. ισχύει το Θεώρημα Baire: "Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό σύνολο"

Υπενθύμιση: Αριθμήσιμα και Υπεραριθμήσιμα σύνολα

① Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοπληθικά (γραφ. $A \approx B$) αν $\exists f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$

② A πεπερασμένο, αν $A = \emptyset$ ή αν $\exists m \in \mathbb{N}$ τω. $A \approx \{1, 2, \ldots\ldots, m\}$

A άπειρο, αν δεν είναι πεπερασμένο.

A <u>άπειρο αριθμήσιμο</u>, αν $A \approx \mathbb{N}$

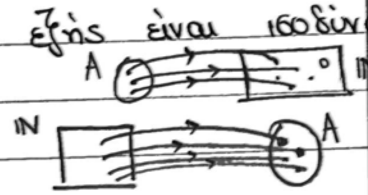
A <u>αριθμήσιμο</u>, αν είτε είναι πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο

A <u>υπεραριθμήσιμο</u>, αν δεν είναι αριθμήσιμο

(3) Αν A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε
$\exists\, f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$. <u>Τότε</u> $A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\} = f(\mathbb{N})$

Αν ορίσουμε $a_n = f(n)$ έχουμε μια <u>αρίθμηση</u> του A
$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

(4) Έστω A ένα σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:



- Το A είναι αριθμήσιμο
- Υπάρχει $f: A \to \mathbb{N}$ 1-1
- Υπάρχει $g: \mathbb{N} \to A$ επί

Μας διευκολύνουν

(5) Το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο αριθμήσιμα σύνολα

(6) Αν $A_1, \ldots, A_m$ είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το
$A_1 \times \ldots \times A_m$ είναι αριθμήσιμο (το δείχναμε για δύο σύνολα και μετά επαγωγή)

(a_1, b_1) (a_1, b_2) (a_1, b_3) ...
(a_2, b_1) (a_2, b_2) (a_2, b_3) ...
(a_3, b_1)

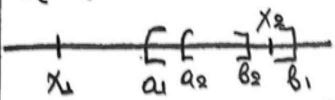
Έτσι αποδεικνύεις ότι $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

(7) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αριθμήσιμων συνόλων, τότε
το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(8) Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

(9) Το $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \overset{\text{ορσ}}{=} \{ x=(x_k)_{k=1}^{\infty} : \forall k \ \ x_k=0 \text{ ή } 1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο (διαγώνιο επιχείρημα Cantor)

<u>Απόδειξη (8)</u>: Έστω ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφεται $\mathbb{R}=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$



$\exists\, [a_1,b_1]$ τ.ω. $x_1 \notin [a_1,b_1]$

$\exists\, [a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$ τ.ω. $x_2 \notin [a_2,b_2]$

Επίσης $x_1 \notin [a_2,b_2]$. Επαγωγικά βρίσκουμε ακολουθία <u>κιβωτισμένων διαστημάτων</u> $[a_n,b_n] \supseteq [a_{n+1},b_{n+1}]$, $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x_1,\dots,x_n \notin [a_n,b_n]$.

Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$

Έστω $z\in\mathbb{R}$ τ.ω. $z\in[a_n,b_n]$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Υπάρχει $m\in\mathbb{N}$: $z=x_m$ (διότι έχουμε υπόθεση ότι $\mathbb{R}=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$)

Από κατασκευή $z=x_m \notin [a_m,b_m] \Rightarrow z \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ <u>άτοπο</u>

<u>Απόδειξη (9)</u>: Έστω ότι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο, δηλ. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ όπου $a_n=(a_{n1},a_{n2},\dots)$, $a_{nk}=0$ ή 1

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{array}{llll} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots \end{array}$$

Ορίζουμε $b=(b_1,b_2,\dots,b_n,\dots)$ όπου $\boxed{b_n=1-a_{nn}} \neq a_{nn}$

Τότε $b\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, άρα $\exists\, k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $b=a_k \Rightarrow \forall n \ \ b_n=a_{kn}$

$\Rightarrow b_k=a_{kk}$ <u>άτοπο</u>

Διαχωρίσιμοι μ.χ.

<u>Ορισμός</u>: Ένας μ.χ. (X,d) λέγεται διαχωρισιμός, αν έχει αριθμήσιμο πυκνό σύνολο, δηλ. αν $\exists D \subseteq X$ αριθμήσιμο τ.ω. $\bar{D} = X$.

(α) <u>Πως δείχνουμε ότι ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος</u>;

- Ορίζουμε "κατάλληλο" D
- Δείχνουμε ότι D είναι αριθμήσιμο (<u>ένα D φτάνει</u>)
- Δείχνουμε ότι $\bar{D} = X$

Παραδείγματα

① Ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος.

Είδαμε ότι το $D = \{q = (q_1, \ldots, q_m) : q_j \in \mathbb{Q}\}$ πυκνό υποσύνολο.
Επίσης, $D = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{m\text{-φορές}}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

άρα το D είναι <u>αριθμήσιμο</u>.

② Ο $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος.

$$\left[x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \ \underline{\text{και}} \ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \right]$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $D_m = \{q = (q_1, \ldots, q_m, 0, 0, \ldots) : q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}\}$.
<u>Τότε</u> $D_m \approx \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^m \Rightarrow D_m$ αριθμήσιμο.
Στη συνέχεια ορίζουμε $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = \{q = (q_1, \ldots, q_m, 0, 0, \ldots) : q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}\}$
$\hookrightarrow D$ αριθμήσιμο

<u>Ισχυρισμός</u>: Το D είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_p

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$.

Έχουμε $x \in \ell_p \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ τω. $\boxed{\sum_{k=1+m}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}}$ (*)

$$\begin{array}{c|cccccccc} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & \\ q & q_1 & q_2 & \cdots & q_m & 0 & 0 & \cdots & \in D_m \subseteq D \end{array}$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ βρίσκουμε ρητό q_k τω. $\boxed{|x_k - q_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2m}}$ (**)

και ορίζουμε $q = (q_1, \ldots, q_m, 0, 0, \ldots) \in D_m \Rightarrow \boxed{q \in D}$

Έχουμε $\|x - q\|_p^p = \sum_{k=1}^{m} |x_k - q_k|^p + \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k - 0|^p <$

$< \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^p}{2m} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$

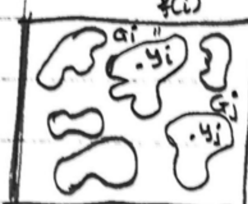
Συνεπώς, $\|x - q\|_p < \varepsilon$

(Β) <u>Πως δείχνουμε ότι ο (X, d) δεν είναι διαχωρίσιμος;</u>

<u>Χρήσιμη Πρόταση</u>

Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μ.χ. και $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια μη-κενών και ξένων ανά δύο ανοικτών υποσυνόλων του X. Τότε το I είναι αριθμήσιμο σύνολο

<u>Απόδειξη</u>: X διαχωρίσιμος $\Rightarrow \exists D$ αριθμήσιμο πυκνό $\subseteq X$



Ορίζουμε $f : I \to D$ με $f(i) = y_i \in G_i \cap D$

(τέτοιο y_i υπάρχει, γιατί G_i ανοικτό $\neq \emptyset$ & D πυκνό)

<u>Η f είναι 1-1</u>

Η f είναι 1-1

Αν $i \neq j$ και $f(i) = f(j) \Rightarrow f(i) \in G_i \cap D$ & $f(j) = f(i) \in G_j \cap D$

$\Rightarrow D \cap G_i \cap G_j \neq \emptyset$ άτοπο (τα G_i είναι ξένα ανά δύο)

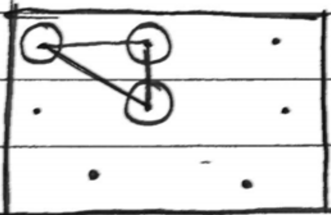
Όμως το D είναι αριθμήσιμο $\Rightarrow \exists\, g : D \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$

Άρα $I \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} \mathbb{N}$

Η $g \circ f : I \to \mathbb{N}$ είναι 1-1 $\Rightarrow I$ αριθμήσιμο.

Με βάση αυτή την πρόταση για ν.δ.ο. ο (X,d) ΔΕΝ είναι διαχωρίσιμος, αρκεί να βρούμε υπεραριθμήσιμη οικογένεια ξένων μη-κενών ανοικτών υποσυνόλων του X.

Συνήθως παίρνουμε τα G_i να είναι ανοικτές μπάλες της ίδιας ακτίνας τα σημεία ενός υπεραριθμήσιμου συνόλου. Αυτά πρέπει "να απέχουν πολύ" ανά δύο.



Προσπαθούμε να βρούμε $A = \{x_i : i \in I\} \subseteq X$ υπεραριθμήσιμο τ.ω. $\forall i \neq j \;\; d(x_i, x_j) \geq \varepsilon > 0$

Τότε $\underbrace{B(x_i, \varepsilon/2)}_{= G_i}$ είναι ξένες

Παραδείγματα

(1) (X, δ), X υπεραριθμήσιμο

Οι $\underbrace{B(x, 1/2)}_{= \{x\}}$, $x \in X$ είναι ξένες και υπεραριθμήσιμες το πλήθος.

Άρα ο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

(2) Ο ℓ_∞ <u>δεν</u> είναι διαχωρίσιμος.

Έστω $A = \{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} : x_k = 0 \text{ ή } 1 \}$

Κάθε $x \in A$ είναι φραγμένη ακολουθία, δηλ. $x \in \ell_\infty$.

Το A είναι υπεραριθμήσιμο (από το 9)

Αν $x \neq y$ στο A, τότε $\|x-y\|_\infty = \sup\{|x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\} = 1$

(διαφέρουν κάποια στιγμή)

Άρα, οι $B(x, \frac{1}{2})$, $\underline{\underline{x \in A}}$ είναι ξένες. (ΤΕΛΟΣ)

[Αν ο X ήταν διαχωρίσιμος, τότε το A θα έπρεπε να είναι αριθμήσιμο, άτοπο]

4/11/21

Άσκηση 19

Έστω $A \neq \emptyset$ και $A \neq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.
Τότε το A <u>δεν</u> μπορεί να είναι ταυτόχρονα ανοιχτό & κλειστό
(τα μόνα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$ & $\mathbb{R}$)

<u>Λύση</u>: Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}$ ανοικτό και κλειστό

- Υπάρχει $x \in A$
- Υπάρχει $y \notin A \Rightarrow x \neq y$

(μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y > x$)

Ορίζουμε $B = \{t \in A : x \leq t < y\}$

- $B \neq \emptyset$, γιατί $x \in A$
- B άνω φραγμένο από το y

Άρα $\exists\, s = \sup B$

- Έχουμε $s = \sup B \leq y \rightarrow$ άνω φράγμα του B

και $\boxed{s \in A}$: $\exists\, (t_n)$ στο B τ.ω. $t_n \rightarrow s$ (χαρ/σμος sup με ακολουθίες)

Όμως $t_n \in A$, άρα $s \in \bar{A} = A$, γιατί το <u>A είναι κλειστό</u>

Όμως, $y \notin A$, άρα $\boxed{s<y}$

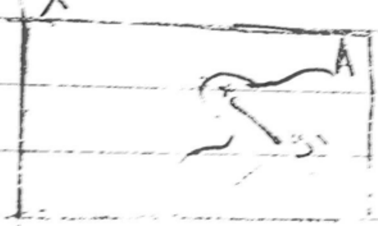
Αφού το A είναι ανοικτό και $s \in A$, $\exists \delta>0$ τ.ω. $(s-\delta, s+\delta) \subseteq A$ και μικραίνοντας το δ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s<s+\delta<y$

Αν πάρω z: $s<z<s+\delta$ τότε $\left.\begin{array}{l} z<y \\ z\in A \\ z>s\geq x \end{array}\right\} \Rightarrow z \in B$ και $z>s=\sup B$ άτοπο

Σχετικώς ανοικτά και σχετικώς κλειστά σύνολα

Έστω (X,d) μ.χ. και $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Η σχετική μετρική στο A είναι η $d_A : A\times A \to [0,+\infty)$ με $d_A(x,y) = d(x,y)$, $x,y \in A$

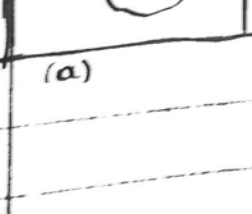


Πρόταση (Περιγραφή των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων του (A, d_A))

Έστω $B \subseteq A$.

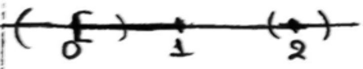
(α) Το B είναι d_A-ανοικτό $\Leftrightarrow \exists V\subseteq X$ ανοικτό τ.ω. $B = A\cap V$

(β) Το B είναι d_A-κλειστό $\Leftrightarrow \exists F \subseteq X$ κλειστό τ.ω. $B = A \cap F$



(α)

Παράδειγμα

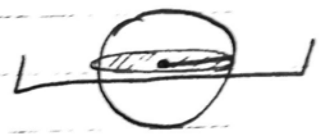


$X=\mathbb{R}$, $A=[0,1]\cup\{2\}$

$[0,1/2)$ ανοικτό $\subseteq A$

$$\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)}_{V}\cap A \quad \text{και} \quad \{2\}=\underbrace{\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2}\right)}_{V}\cap A$$

Λήμμα



Έστω $x\in A$, $\phi\neq A\subseteq (X,d)$.

Για κάθε $\varepsilon>0$: $B_{d_A}(x,\varepsilon)=B_d(x,\varepsilon)\cap A$

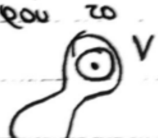
Απόδειξη: $B_{d_A}(x,\varepsilon)=\{y\in A:\ d_A(y,x)<\varepsilon\}=\{y\in A: d(y,x)<\varepsilon\}$
$=\{y\in X:\ y\in A \wedge d(y,x)<\varepsilon\} = A\cap\{y\in X: d(y,x)<\varepsilon\}$
$=A\cap B_d(x,\varepsilon)$

Απόδειξη της πρότασης: (α) ($\Rightarrow$) Έστω B d_A-ανοικτό.
Για κάθε $x\in B$ $\exists\ \varepsilon_x>0$ τ.ω. $B_{d_A}(x,\varepsilon_x)\subseteq B$.
Συνεπώς, $B=\bigcup_{x\in B} B_{d_A}(x,\varepsilon_x) \underset{\text{Λήμμα}}{=} \bigcup_{x\in B}(A\cap B_d(x,\varepsilon_x))=$

$$= A\cap\underbrace{\Big(\bigcup_{x\in B} B_d(x,\varepsilon_x)\Big)}_{V}$$

V : είναι ανοικτό, γιατί είναι ένωση από ανοικτές μπάλες του X.

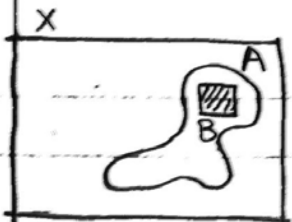
($\Leftarrow$) Έστω V ανοικτό $\subseteq X$ και θεωρούμε το $B=A\cap V$.
Θ.ν.δ.ο. το B είναι d_A-ανοικτό.
Έστω $x\in B$. Τότε $x\in A$ και $x\in V$.
Αφού το V είναι ανοικτό $\subseteq X$ $\exists\ \varepsilon>0$: $B_d(x,\varepsilon)\subseteq V \Rightarrow$



$\Rightarrow \underbrace{A\cap B_d(x,\varepsilon)}_{=B_{d_A}(x,\varepsilon)} \subseteq A\cap V = B$.

Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του $B=A\cap V$ στον (A,d_A)

(β) ($\Rightarrow$) Έστω B κλειστό υποσύνολο του (A, d_A)



Τότε το $A \setminus B$ είναι ανοικτό στον (A, d_A)
Από το (α) $\exists V$ ανοικτό στον X τ.ω. $A \setminus B = A \cap V$
Γράφουμε $B = A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \cap V) = A \cap (A \cap V)^c =$
$= A \cap (A^c \cup V^c) = \underbrace{(A \cap A^c)}_{= \emptyset} \cup (A \cap V^c) = A \cap V^c$

Αν θέσω $F = V^c$, τότε το F είναι κλειστό $\subseteq X$, γιατί V ανοικτό και $B = A \cap F$

($\Leftarrow$) Παίρνουμε F κλειστό $\subseteq X$ και θ.ν.δ.ο. το $A \cap F$ είναι κλειστό υποσύνολο του (A, d_A).

Θεωρούμε (x_n) στο $A \cap F$, η οποία συγκλίνει ως προς d_A σε κάποιο $\underline{\underline{x \in A}}$ Θ.δ.ο. $\underline{\underline{x \in A \cap F}}$.

Έχουμε $d_A(x_n, x) \to 0$, δηλ. $d(x_n, x) \to 0$
άρα $x_n \to x$ στον (X, d)

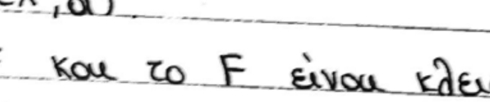
Όμως, $x_n \in A \cap F \subseteq F$ και το F είναι κλειστό $\subseteq (X, d)$
Άρα, $\underline{\underline{x \in F}}$. Τελικά, $x \in A$ και $x \in F \Rightarrow x \in A \cap F$.

Ασκήσεις

Θέμα ~ εξετάσεων (39) $X = \mathbb{R}$. Εξετάστε αν $\exists E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Το E είναι άπειρο σύνολο και δεν έχει σ.σ.

Λύση: ΝΑΙ $E = \mathbb{N}$



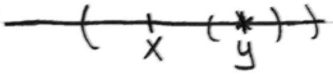
Το E είναι κλειστό, άρα α.ν.δ.ο. κανένα $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$
Το $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο, $n \notin \mathbb{N}'$

(β) Το E έχει άπειρα σ.σ. και κανένα εσωτερικό σημείο.

Λύση: ΝΑΙ $E=\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^{\circ}=\emptyset$ και $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ γιατί σε κάθε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί

(γ) Το E είναι ανοικτό, αλλά δεν έχει σ.σ.

Λύση: ΟΧΙ Αν E είναι ένα τέτοιο σύνολο, αφού $E\neq\emptyset$ παίρνουμε κάποιο $x\in E$ και αφού το E είναι ανοικτό βρίσκουμε $\delta>0$ τ.ω. $(x-\delta,x+\delta)\subseteq E$



Τότε κάθε $y\in(x-\delta,x+\delta)$ είναι σ.σ. του E

$\forall r>0$ (μικρό): $(y-r,y+r)\subseteq(x-\delta,x+\delta)\subseteq E$

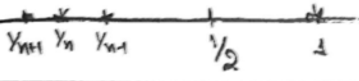
άρα στο $(y-r,y+r)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του E

(δ) Το E είναι ανοικτό και πυκνό $\subseteq\mathbb{R}$.

Λύση: ΝΑΙ $E=\mathbb{R}\setminus\{d\}$, d οποιοσδήποτε πραγματικός

(ε) Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία

Λύση: ΝΑΙ



$E=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

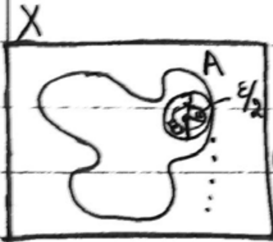
Κάθε στοιχείο του E είναι μεμονωμένο σημείο του και $E\subseteq[0,1]\Rightarrow$
$\Rightarrow E$ φραγμένο.

Τυπικά: Δ.ο. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right|\geq\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$

οπότε για $\varepsilon=\frac{1}{n(n+1)}$, $B\left(\frac{1}{n},\varepsilon\right)\cap E=\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Άρα $\frac{1}{n}\notin E'$ (είναι μεμονωμένο σημείο του E).

(45) Έστω $A \subseteq (X,d)$ ανοικτό.
Αν $x \in A$ και (x_n) στο X τ.ω. $x_n \to x$, ν.δ.ο. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:
τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq A$.



Λύση: ① Αφού A είναι ανοικτό, $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A$
② Θεωρούμε την $B(x, \varepsilon/2)$.
Αφού $x_n \to x$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1$ $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ $(x_n \in B(x, \varepsilon/2))$

③ $\exists n_2 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ορίζουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

④ Έστω $n \geq n_0$. Τότε $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ και $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Ισχυρισμός: $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq A$.

Έστω $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$. Τότε $d(y,x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα $y \in B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

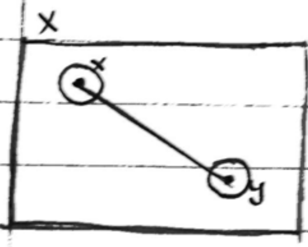
(14) Βρείτε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |\cdot|)$

Ιδέα: Ορίζουμε $D = \mathbb{Q} + \sqrt{2} = \{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Το D είναι αριθμήσιμο (ισοπληθικό με το $\mathbb{Q}$)
Το D είναι πυκνό στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\boxed{\begin{array}{c} q_n + \sqrt{2} \to \xi \\ q_n \to \xi - \sqrt{2} \end{array}}$$

Υπάρχει (q_n) στο $\mathbb{Q}$ τ.ω. $q_n \to \xi - \sqrt{2}$ (στο $\mathbb{R}$)
$\Rightarrow \underbrace{q_n + \sqrt{2}}_{\in D} \to \xi$ (στο $\mathbb{R}$) ή ισοδύναμα στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(22) Έστω (X,d) μ.χ. και $x,y\in X$, $x\neq y$.
Ν.δ.ο. αν υπάρχουν ανοικτά $U,V\subseteq X$ τ.ω. $x\in U$, $y\in V$, $\bar{U}\cap\bar{V}=\emptyset$.



<u>Λύση</u>: Παίρνουμε $\varepsilon=\dfrac{d(x,y)}{3}$

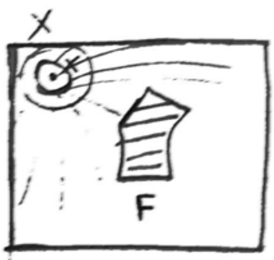
Ορίζουμε $\underset{\text{ανοικτό}, x\in U}{U=B(x,\varepsilon)}$, $\underset{\text{ανοικτό}, y\in V}{V=B(y,\varepsilon)}$

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ \bar{U}=\overline{B(x,\varepsilon)}\subseteq\hat{B}(x,\varepsilon)\\ \cdot\ \bar{V}=\overline{B(y,\varepsilon)}\subseteq\hat{B}(y,\varepsilon)\end{array}\right\}(*)$$

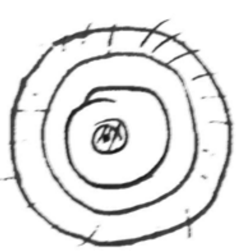
Αν $z\in\bar{U}\cap\bar{V}$ τότε $d(z,x)\leq\varepsilon$ και $d(z,y)\leq\varepsilon$ (από τις (*))
$\Rightarrow d(x,y)\leq d(x,\varepsilon)+d(y,\varepsilon)\leq 2\varepsilon=\frac{2}{3}d(x,y)<d(x,y)$ <u>άτοπο</u>

<u>Άσκηση</u>
Αν $0<r_1<r_2$ τότε $\hat{B}(x,r_1)\subseteq B(x,r_2)$

(23) Έστω (X,d) μ.χ., $F\subseteq X$ κλειστό, $x\notin F$.
Ν.δ.ο. υπάρχουν ανοικτά $U,V\subseteq X$ τ.ω. $x\in U$, $F\subseteq V$ & $\bar{U}\cap\bar{V}=\emptyset$



<u>Λύση</u>: Βρίσκουμε $0<r_1<r_2<r_3<r_4$ τ.ω.
$B(x,r_4)\cap F=\emptyset$ (F κλειστό, $x\notin F$)
Ορίζω $U=B(x,r_1)\Rightarrow\bar{U}\subseteq B(x,r_2)$
$V=X\setminus\hat{B}(x,r_3)\Rightarrow\bar{V}\subseteq X\setminus B(x,r_2)$



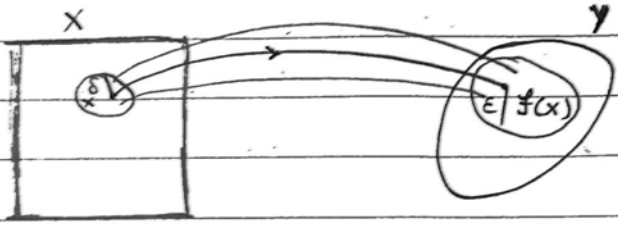
Τότε $x\in U$, $F\subseteq V$, $\bar{U}\cap\bar{V}=\emptyset$.

9/11/21

Κεφάλαιο 4: Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μ.χ.

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται συνεχής στο $x\in X$, αν "$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ τ.ω. αν $y\in X$ τ.ω. $d(y,x)<\delta$ $\Rightarrow \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$". (*)

Η f λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in X$.



(*) Ισοδύναμα $\forall \varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ τ.ω. $f(B_d(x,\delta))\subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)$

<u>Υπενθύμιση</u>: $f: X\to Y$ $\quad f(A)=\{f(x): x\in A\}$ για $A\subseteq X$

$f^{-1}(B)=\{x: f(x)\in B\}$ για $B\subseteq Y$

<u>Αρχή της Μεταφοράς</u> (Κεφ. 2)

Η $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ είναι συνεχής στο $x\in X$. <u>ανν</u> <u>$\forall (x_n)$</u> στο X με $x_n\to x$ έχουμε ότι $f(x_n)\to f(x)$.

Σημαντικό! <u>Θεώρημα</u> (Χαρακτηρισμός των συνεχών συναρτήσεων)

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

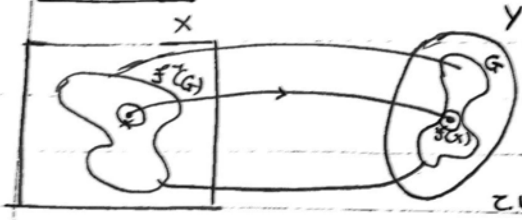
(α) Η f είναι συνεχής συνάρτηση

(β) $\forall$ ανοικτό $G\subseteq Y$ το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(γ) $\forall$ κλειστό $F\subseteq Y$ το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

"Η f είναι συνεχής αν αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά και κλειστά σε κλειστά".

<u>Απόδειξη</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό. Έστω $x \in f^{-1}(G)$.



Τότε $f(x) \in G$ και το G είναι ανοικτό.
Άρα $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subseteq G$.
Αφού η f είναι συνεχής $\exists \delta > 0$ τ.ω. $f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon) \subseteq G \Rightarrow$
$\Rightarrow B_d(x,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$, δηλ. το <u>$x$ είναι εσωτερικό σημείο του $f^{-1}(G)$</u>.

(β) $\Rightarrow$ (α) Θ.δ.ο. η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.
Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η $B_\sigma(f(x), \varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Από υπόθεση, το $f^{-1}(B_\sigma(f(x),\varepsilon))$ είναι ανοικτό στο X και περιέχει το x, άρα $\exists \delta > 0$ τ.ω.
$B_d(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B_\sigma(f(x),\varepsilon)) \Rightarrow f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)$

$A \subseteq f^{-1}(B)$
$\Downarrow$
$f(A) \subseteq B$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x (από (*))
(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Το $G = Y \setminus F$ είναι ανοικτό, και από το (β) το $f^{-1}(G) = f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοικτό $\subseteq X$

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

Επομένως, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό $\subseteq X$
(γ) $\Rightarrow$ (β) Ομοίως.

<u>Πρόταση</u> (κι άλλες ισοδυναμίες)

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Η f είναι συνεχής
(δ) Για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
(ε) Για κάθε $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$
(στ) Για κάθε $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (δ) Έστω $A\subseteq X$ και έστω $x\in\overline{A}$. (Θ.δ.ο. $f(x)\in\overline{f(A)}$)

Τότε $\exists\, x_n\in A$ τ.ω. $x_n\to x \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n)\to f(x)$

Αφού $f(x_n)\in f(A)$ και $f(x_n)\to f(x)$ έπεται ότι $f(x)\in A$.

(δ) $\Rightarrow$ (ε) Έστω $B\subseteq Y$. Εφαρμόζουμε το (δ) με $A=f^{-1}(B)$

και έχουμε: $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \overset{(!)}{\subseteq} \overline{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

$f(f^{-1}(B))\subseteq B$

(ε) $\Rightarrow$ (στ) Εφαρμόζουμε το (ε) με $B=Y\setminus C$. Έχουμε:

$$\overline{f^{-1}(Y\setminus C)}\subseteq \underset{\underset{f^{-1}(Y\setminus C^\circ)}{\parallel}}{f^{-1}(\overline{Y\setminus C})} \Rightarrow \underset{\underset{X\setminus(f^{-1}(C))^\circ}{\parallel}}{\overline{X\setminus f^{-1}(C)}} \subseteq \underset{\underset{X\setminus f^{-1}(C^\circ)}{\parallel}}{f^{-1}(Y\setminus C^\circ)}$$

$$\Rightarrow X\setminus(f^{-1}(C))^\circ \subseteq X\setminus f^{-1}(C^\circ) \Rightarrow (f^{-1}(C))^\circ\supseteq f^{-1}(C^\circ)$$

(στ) $\Rightarrow$ (β) Έστω G ανοικτό $\subseteq Y$. Εφαρμόζουμε το $C=G$.

Έχουμε $f^{-1}(\underset{\underset{G}{\parallel}}{G^\circ}) \subseteq (f^{-1}(G))^\circ \Rightarrow f^{-1}(G)\subseteq (f^{-1}(G))^\circ \Rightarrow \underset{\text{ανοικτό}}{f^{-1}(G)}$

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής, αν "$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0$ τ.ω. αν $x,y\in X$ και $d(x,y)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$"

Παραδείγματα

(1) Κάθε $f:(X,\delta)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

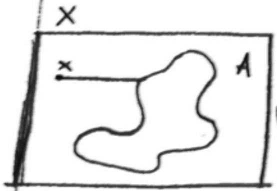
Έστω $\varepsilon>0$. Παίρνουμε $\delta=\frac{1}{2}>0$. Αν $x,y\in X$ και $\delta(x,y)<\frac{1}{2}$,

τότε $x=y \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow \sigma(f(x),f(y))=0<\varepsilon$.

(2) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα.

Ομοίως, η $g(x)=\cos(x^2)$ είναι φραγμένη και συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής

(3) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq (X,d)$ και $d_A(x) = \text{dist}(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$, $d_A : (X,d) \to \mathbb{R}$



Έχουμε δ.ο. (Άσκηση 3.27) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$ (*) $\forall x,y \in A$

Έπεται ότι η d_A είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Για δοθέν $\varepsilon > 0$ παίρνουμε $\delta = \varepsilon$.

Αν $d(x,y) < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon$

(4) Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ή οποιοδ. $\ell \in \mathbb{R}$)
Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Πρόταση</u> (Χαρακτηρισμός Μέσω Ακολουθιών)

Η $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ανν
"για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στον X με $d(x_n,y_n) \to 0$
ισχύει $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \to 0$" (*)

<u>Απόδειξη</u>: ($\Longrightarrow$) Έστω $x_n, y_n \in X$ με $d(x_n,y_n) \to 0$.

$\forall n \geq n_0$

$\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$

$\Uparrow$

$d(x_n,y_n) < \delta$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$ τ.ω.
"αν $x,y \in X$ και $d(x,y) < \delta \to \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$"
Αφού $d(x_n,y_n) \to 0$ <u>$\exists n_0 \in \mathbb{N}$</u> τ.ω. $\forall n \geq n_0$
$d(x_n,y_n) < \delta$. Από την (*) <u>$\forall n \geq n_0$</u> έχουμε <u>$\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$</u>
Άρα, $\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$

($\Longleftarrow$) Έστω ότι η f <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Τότε $\exists \varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: $\forall \delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x,y \in X$ τ.ω. $d(x,y) < \delta$, αλλά $\sigma(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$
Για $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\dots$ βρίσκουμε x_n, y_n τ.ω.

$$\boxed{d(x_n,y_n) < 1/n \text{ , αλλά } \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon}$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$d(x_n,y_n) \to 0$ $\qquad\qquad$ $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$ <u>άτοπο</u>

Στο <u>Παράδειγμα (2)</u>

· η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, γιατί αν επιλέξουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$, τότε $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$,

αλλά $f(x_n) - f(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$

$f'(x) = 2x$
y_n τω. $f(y_n) \to +\infty$
και x_n "κοντά" στο y_n

· η $g(x) = \cos(x^2)$ έχει παράγωγο $g'(x) = -2x \sin(x^2)$.

$x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \sqrt{n\pi}$

$x_n - y_n \to 0$ (άσκηση) $|g(x_n) - g(y_n)| = \left|\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right| = 1$

<u>Πρόταση</u> (Ισχύουν οι συνεπαγωγές (α) ⇒ (β) ⇒ (γ) αλλά όχι οι αντίστροφες τους)

Έστω $f: (X, d) \to (Y, \sigma)$

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

(β) Για κάθε (x_n) βασική ακολουθία στον X, η $(f(x_n))$ είναι βασική στον Y

(γ) Η f είναι συνεχής

<u>Απόδειξη</u>: (α) ⇒ (β) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$ τω. "$d(x,y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$" (*)

Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow}$ <u>$\forall n, m \geq n_0$ $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$</u>

Άρα η $(f(x_n))$ είναι βασική στο Y.

$\forall n, m \geq n_0$
$\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$
$\Uparrow$
$d(x_n, x_m) < \delta$

$x_n \to x$
$\Downarrow$
(x_n) βασική
$\Downarrow$ υπόθεση
$(f(x_n))$ βασική
$\Downarrow ?$
$f(x_n)$ συγκλίνει στο $f(x)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $x \in X$. Για ν.δ.ο. η f είναι συνεχής στο x, παίρνουμε τυχούσα $x_n \to x$ και δ.ο. $f(x_n) \to f(x)$.

Ορίζουμε $z_n : x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots$, δηλ. $z_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k-1 \\ x, & n = 2k \end{cases}$

Τότε $z_n \to x$ (γιατί $z_{2k-1} \to x$, $z_{2k} \to x$)

$\Downarrow$

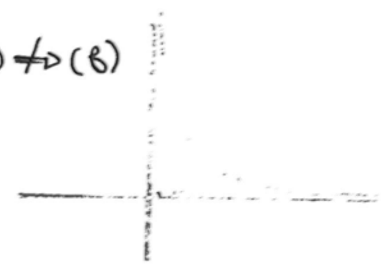
(z_n) βασική $\xRightarrow{\text{υπόθεση}}$ $(f(z_n))$ βασική

Επίσης, $f(z_{2k}) = f(x) =$ σταθερή, άρα συγκλίνουσα

Η $(f(z_n))$ είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία την $f(z_{2k}) \to f(x)$. $f(z_n) \to f(x) \Rightarrow \underset{f(x_k)}{\overset{\shortparallel}{f(z_{2k-1})}} \to f(x)$, δηλ. $f(x_k) \to f(x)$

(β) $\not\Rightarrow$ (α) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

(γ) $\not\Rightarrow$ (β)



$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{x}$

Πιο αναλυτικά

(β) $\not\Rightarrow$ (α) Έχουμε δει ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, όμως απεικονίζει "βασικές σε βασικές".
Έστω (x_n) βασική στο $\mathbb{R}$. Τότε $\exists x \in \mathbb{R}$, τω.
$x_n \to x \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n) \to f(x) \Rightarrow (f(x_n))$ συγκλίνουσα $\Rightarrow$
$\Rightarrow (f(x_n))$ βασική

(γ) $\not\Rightarrow$ (β) Η $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

Όμως, αν πάρουμε $x_n = \frac{1}{n}$, τότε η (x_n) είναι βασική
(π.χ. στο $\mathbb{R}$, $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)$ βασική)

Όμως, $f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n \to +\infty$, άρα η $(f(x_n))$ __δεν__ είναι βασική.

__Ορισμός__: Μια συνάρτηση $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ λέγεται Lipschitz με σταθερά $M>0$, αν "$\forall x,y \in X$ έχουμε $\sigma(f(x),f(y)) \leq M \cdot d(x,y)$"

__Πρόταση__

Κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής (άρα και συνεχής)

__Απόδειξη__: Έχουμε $M>0$ τ.ω. $\forall x,y \in X$ $\sigma(f(x),f(y)) \leq M \cdot d(x,y)$.
Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Αν $x,y \in X$ με $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$, τότε $\sigma(f(x),f(y)) \leq M \cdot d(x,y) <$

$< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

__Ασκήσεις__

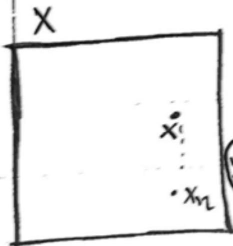
① Έστω $f,g:(X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς και D πυκνό υποσύνολο του X

(α) Το $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.
(β) Αν $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$, τότε $f \equiv g$

__Λύση__: (α) Έστω $x_n \in E$ και $x_n \to x \in X$. Θ.δ.ο. $x \in E$.
Έχουμε $f(x_n) = g(x_n)$ $\forall n$ και $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ και $g(x_n) \to g(x)$ (γιατί f,g συνεχής).

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) \longrightarrow f(x) \\ \quad \| \\ g(x_n) \longrightarrow g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Από μοναδικότητα ορίου $f(x)=g(x)$, άρα $x \in E$.

(β) Παίρνουμε τυχόν $x \in X$ και δ.ο. $f(x)=g(x)$.



Υπάρχει (x_n) στο D τ.ω. $x_n \to x$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) \longrightarrow f(x) \\ \quad \| \leftarrow \text{υπόθεση } x_n \in D \\ g(x_n) \longrightarrow g(x) \end{array}\right\} \underset{\text{ορίου}}{\overset{\text{Μοναδ.}}{\Longrightarrow}} f(x)=g(x)$$

③ $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2y+\sin(z^3y^2)} \cdot \cos(xy^4+7z^2+2) < 4\}$ ανοικτό

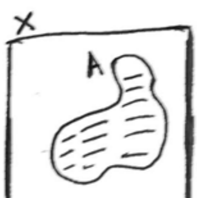
Λύση: Θεωρώ την $f(x,y,z) = e^{x^2y+\sin(z^3y^2)} \cdot \cos(xy^4+7z^2+2)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, που είναι συνεχής και έστω $\boxed{A = f^{-1}((-\infty,4))}$

$= \{(x,y,z) : \underset{<4}{f(x,y,z) \in (-\infty,4)}\}$

$\leadsto$ Το A είναι ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα του $G=(-\infty,4)$ που είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$.

④ (α) Έστω $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε $Z(f) = \{x \in X : f(x)=0\}$
Ν.δ.ο. αν η f είναι συνεχής, τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό.
(β) Αν $A \subseteq (X,d)$ κλειστό, τότε $\exists\, f:(X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. $Z(f)=A$.

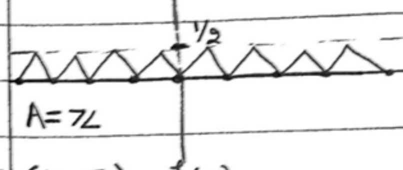
Λύση: (α) $Z(f) = f^{-1}(\underset{\uparrow \text{κλειστό} \subseteq \mathbb{R}}{\{0\}})$ = κλειστό $\subseteq X$ ως αντίστροφη εικόνα κλειστού

(β) 

Ορίζουμε $f(x) = \mathrm{dist}(x,A)$. Η f είναι Lipschitz (με σταθερά 1) άρα συνεχής.
Έχουμε $f(x)=0 \iff \mathrm{dist}(x,A)=0 \iff x \in \bar{A} = A$, ($A$ κλειστό)

Άρα $A=\{x\in X: f(x)=0\} = Z(f)$.

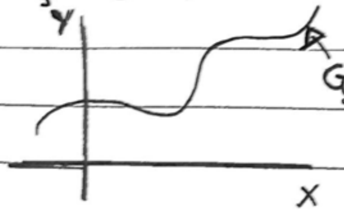
Αν $(A\neq\phi)$ Θεωρούμε την $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ με $f\equiv 1 \Rightarrow Z(f)=\phi$



$A=\mathbb{Z}$

$\text{dist}(x,\mathbb{Z}) = f(x)$

(6) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Το <u>γράφημα</u> της f είναι το $G_f = \{(x,f(x))\in X\times Y : x\in X\} \subseteq X\times Y$.



Δ.ο. αν η f είναι συνεχής, τότε το G_f είναι κλειστό $\subseteq X\times Y$ (με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο)

<u>Λύση</u>: Παίρνουμε $(x_n,y_n)\in G_f$, υποθέτουμε ότι $(x_n,y_n)\to(x,y)\in X\times Y$ και δ.ο. $(x,y)\in G_f$

$(x_n,y_n)\in G_f \Rightarrow y_n = f(x_n)$

$(x_n,y_n)\to(x,y) \xrightarrow[\text{Γινόμενο}]{\text{Μετρική}} x_n\to x$ και $y_n\to y$

$\boxed{\text{Ζητάμε } (x,y)\in G_f \text{ ανν } y=f(x)}$

$x_n\to x \overset{f \text{ συνεχής}}{\Downarrow} f(x_n)\to f(x)$, $\quad y_n\to y \overset{y_n=f(x_n)}{\Downarrow} f(x_n)\to y$

$\Downarrow$ Μοναδικότητα Ορίου

$y=f(x)$

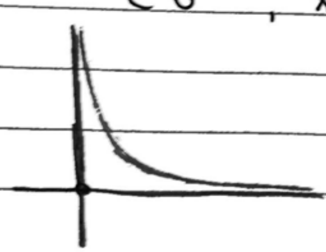
$\Downarrow$

$(x,y)=(x,f(x))\in G_f$.

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1/x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ <u>ΔΕΝ</u> είναι συνεχής στο 0.

<u>Άσκηση</u>: G κλειστό



11/11/21

Ασκήσεις

Στον $X \times Y$ θεωρούμε τυ-χουσα μετρική γινόμενο

⑥ Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Το γράφημα της f είναι το
$G_f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subseteq X \times Y$.

- Αν η f είναι συνεχής, τότε το G_f είναι κλειστό
- Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση: · Έστω $(x_n, f(x_n))$ στο G_f και έστω ότι $(x_n, f(x_n)) \to (x,y) \in X \times Y$

Θ.δ.ο. $(x,y) \in G_f$. $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = f(x)}$

Έχουμε $(x_n, f(x_n)) \to (x,y) \underset{\text{στον } X\times Y}{\overset{\mu.\Gamma.}{\Longrightarrow}} \begin{cases} x_n \to x \overset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(x) \\ f(x_n) \to y \end{cases}$

Άρα $y = f(x)$

- ΟΧΙ. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

$$G_f = \underbrace{\left\{ \left(x, \tfrac{1}{x}\right) : x > 0 \right\}}_{A} \cup \underbrace{\{(0,0)\}}_{B}$$

Η f είναι ασυνεχής στο 0, γιατί

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Το G_f είναι κλειστό: Το $B = \{(0,0)\}$ είναι κλειστό ως μονοσύ-νολο.

Το A είναι κλειστό: Έστω $\left(x_n, \frac{1}{x_n}\right) \in A$ $(x_n > 0)$ και

έστω ότι $\left(x_n, \frac{1}{x_n}\right) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ζητάμε $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ και $\boxed{x > 0}$

οπότε $(x,y) = \left(x, \frac{1}{x}\right) \in A$.

Έχουμε $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ \frac{1}{x_n} \to y \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} \to x \cdot y$. Άρα $xy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 0$ και $y = \frac{1}{x}$.

Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις

$f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Λέγεται Lipschitz, αν $\exists M > 0 : \forall x, y \in X$
$\sigma(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$
Είδαμε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{M}\right)$

<u>Παρατηρήσεις</u>: (α) Ομοιόμορφα συνεχής $\not\Rightarrow$ Lipschitz
Η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
Από την $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a, b \geq 0$ έχουμε:
$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, γιατί μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \geq y$ και τότε $\sqrt{x} = \sqrt{y + (x-y)} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|}$
Αν μας δώσουνε $\varepsilon > 0$ παίρνουμε $\delta = \varepsilon^2$ και $\forall x, y \geq 0$ με $|x-y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$
Έστω ότι η f είναι Lipschitz.
Τότε $\exists M > 0 : \forall x, y \geq 0 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M|x-y|$
Για $y = 0$ έχουμε $\forall x \geq 0 \quad \sqrt{x} \leq Mx \Rightarrow \forall x \geq 0 \quad 1 \leq \underset{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}}{M\sqrt{x}}$ <u>άτοπο</u>

(β) Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

Τότε f Lipschitz $\iff$ η f' είναι φραγμένη.

<u>Απόδειξη</u>: $(\Leftarrow)$ $\exists M>0: \forall x\in(a,b)\ \ |f'(x)|\le M$ (f' φραγμένη)

Έστω $x<y$ στο (a,b). $\exists \xi\in(x,y): f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \le M|x-y|$.

$(\Rightarrow)$ Γνωρίζουμε ότι $\exists M>0: \forall x,y\in(a,b).\ |f(x)-f(y)|\le M|x-y|$

Έστω $x_0\in(a,b)$. Έχουμε $|f'(x_0)| = \lim\limits_{x\to x_0} \underbrace{\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|}_{\le M} \le M$

SOS (γ) Είναι σωστό ότι μια (συνεχής (1) / ομοιόμορφα συνεχής (2) / Lipschitz (3)) συνάρτηση απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα σύνολα.

(1) <u>ΟΧΙ</u> $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\tan x$

Η f είναι συνεχής και $f\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mathbb{R}$

φραγμένο — μη φραγμένο

$g:(0,1)\to\mathbb{R}\quad g(x)=\frac{1}{x}$

(2) <u>ΟΧΙ</u> Η $f:(\mathbb{R},\delta)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ $f(x)=x$

- Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (κάθε $f:(\mathbb{R},\delta)\to Y$ είναι ομοιομ. συνεχής)
- Το $\mathbb{R}$ είναι δ-φραγμένο: $\mathrm{diam}_\delta(\mathbb{R})=1$
- Το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ <u>δεν</u> είναι φραγμένο ως προς την $|\cdot|$ μετρική

③ **ΝΑΙ** Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ Lipschitz με σταθερά M και έστω $A\subseteq X$ φραγμένο, δηλ. $\mathrm{diam}_d(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}<\infty$ είναι φραγμένο.

Θ.δ.ο. $\boxed{\mathrm{diam}_\sigma(f(A)) \leq M\cdot \mathrm{diam}_d(A)<\infty} \Rightarrow f(A)$ φραγμένο.

Έχουμε $\mathrm{diam}_\sigma(f(A))=\sup\{\sigma(f(x),f(y)): x,y\in A\}$.

Έστω $x,y\in A$. Τότε $\sigma(f(x),f(y))\leq M\cdot d(x,y)\leq M\cdot \mathrm{diam}_d(A)$

Έπεται ότι $\mathrm{diam}_\sigma(f(A))\leq M\cdot \mathrm{diam}_d(A)$

Ισομετρίες

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται *ισομετρία*, αν $\forall x,y\in X$: $\sigma(f(x),f(y))=d(x,y)$ ("διατηρεί τις αποστάσεις")

Παρατηρήσεις

(i) Κάθε ισομετρία είναι 1-1.

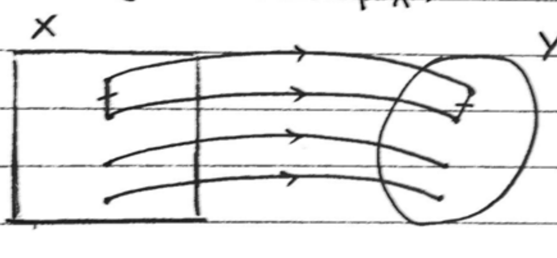
[Αν $f(x)=f(y) \Rightarrow 0=\sigma(f(x),f(y))=d(x,y)\Rightarrow x=y$]

(ii) Κάθε ισομετρία είναι Lipschitz με σταθερά 1.

(iii) Αν η ισομετρία $f:X\to Y$ είναι επί, δηλ. $f(X)=Y$, τότε και η f^{-1} είναι Lipschitz με σταθερά 1.

" $d(f^{-1}(u),f^{-1}(v))=\sigma(u,v)$ "

Τότε λέμε ότι οι (X,d), (Y,σ) ισομετρικά ισόμορφοι (ταυτίζονται ως μ.χ.)



Ισοδύναμες μετρικές

<u>Ορισμός</u>: Έστω d και σ δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο X. Λέμε ότι οι d και σ είναι <u>ισοδύναμες</u> (και γραφ. $d \sim \sigma$), αν "$\forall (x_n)$ στο X και $\forall x \in X$ ισχύει $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} x$"

<u>Παρατηρήσεις</u>

(α) Θεωρούμε την $I : (X, d) \to (X, \sigma)$, $I(x) = x$
Αυτή είναι 1-1 και επί, άρα ορίζεται η $I^{-1} : (X, \sigma) \to (X, d)$ με $I^{-1}(x) = x$. Αν οι d και σ είναι ισοδύναμες, τότε οι I, I^{-1} είναι συνεχείς.
- Αν $x_n \xrightarrow{d} x \overset{(d\sim\sigma)}{\Longrightarrow} x_n \xrightarrow{\sigma} x$, δηλ. $I(x_n) \xrightarrow{\sigma} I(x)$.
Από την αρχή μεταφοράς, η I είναι συνεχής.
- Αν $x_n \xrightarrow{\sigma} x \overset{(d\sim\sigma)}{\Longrightarrow} x_n \xrightarrow{d} x$, δηλ. $I^{-1}(x_n) \xrightarrow{d} I^{-1}(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η I^{-1} είναι συνεχής.

Ισχύει και το αντίστροφο: αν οι I, I^{-1} είναι συνεχείς, τότε $d \sim \sigma$.
(π.χ. Αν $x_n \xrightarrow{d} x \overset{(I \text{ συν.})}{\Longrightarrow} I(x_n) \xrightarrow{\sigma} I(x)$, δηλ. $x_n \xrightarrow{\sigma} x$)

(β) $d \sim \sigma \Leftrightarrow \forall F \subseteq X$ έχουμε F d-κλειστό $\Leftrightarrow F$ σ-κλειστό.
π.χ. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι F κλειστό στον (X, d)
Έστω (x_n) στο F τ.ω. $x_n \xrightarrow{\sigma} x \in X$. Αφού $d \sim \sigma$ έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$
Όμως F d-κλειστό, άρα $x \in F$.
Αυτό δ.ο. το F είναι σ-κλειστό. Ομοίως, F σ-κλειστό $\Rightarrow F$ d-κλειστό
($\Leftarrow$) Θ.δ.ο. οι I, I^{-1} είναι συνεχείς και από την προηγούμενη παρατήρηση θα έχουμε $d \sim \sigma$.
(π.χ. Η $I : (X, d) \to (X, \sigma)$ είναι συνεχής.
Πράγματι, αν $F \subseteq (X, \sigma)$ κλειστό $\Rightarrow I^{-1}(F) = F$ είναι d-κλειστό.
Ομοίως η I^{-1} είναι συνεχής)

Θεώρημα

Έστω d και σ δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο X. Τ.α.ε.ι.:

(α) Η d είναι ισοδύναμη με την σ

(β) Οι $I: (X,d) \to (X,\sigma)$, $I(x)=x$ και $I^{-1}: (X,\sigma) \to (X,d)$ είναι συνεχείς

(γ) Για κάθε $F \subseteq X$ έχουμε F d-κλειστό $\iff$ F σ-κλειστό.

(δ) Για κάθε $G \subseteq X$ έχουμε G d-ανοικτό $\iff$ G σ-ανοικτό.

Πρόταση (άσκηση)

Κάθε μετρική είναι ισοδύναμη με μια φραγμένη μετρική.

Απόδειξη: Έστω (X,d) μ.χ. Ορίζουμε $\sigma(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ [Έχουμε δει ότι η σ είναι μετρική στις ασκήσεις Κεφ.1]

- Η σ είναι φραγμένη: $\forall x,y \in X$ $\sigma(x,y) \leq 1$
- Δ.ο. $d \sim \sigma$.

(i) Αν $d(x_n,x) \to 0$ (δηλ. $x_n \xrightarrow{d} x$) δ.ο. $\sigma(x_n,x) = \dfrac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \to \dfrac{0}{1+0} = 0$

(ii) Αν $\sigma(x_n,x) \to 0 \Rightarrow \dfrac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \to 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+d(x_n,x)} \to 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+d(x_n,x)} \to 1 \Rightarrow 1+d(x_n,x) \to 1 \Rightarrow d(x_n,x) \to 0.$

$a_n \geq 0$ και $\dfrac{a_n}{1+a_n} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$. Άσκηση

Ομοιομορφισμός

Ορισμός: Έστω (X,d) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται ομοιομορφισμός, αν είναι 1-1 και επί και οι f, f^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Λέμε ότι δύο μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,σ) είναι ομοιομορφικοί, αν $\exists$ ομοιομορφισμός $f:X\to Y$

Παράδειγμα

Αν $d \sim \sigma$ ισοδύναμες μετρικές στο σύνολο X.
Τότε οι (X,d) και (X,σ) είναι ομοιομορφικοί.
Η $I:(X,d)\to(X,\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός (από τα προηγ)

Θεώρημα

Έστω $f:(X,d)\xrightarrow[\text{επί}]{1-1}(Y,\sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι ομοιομορφισμός

(β) Για κάθε (x_n) στο X και $\forall x\in X$ "$x_n \xrightarrow{d} x \iff f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(x)$"

(γ) Για κάθε $G\subseteq X$ έχουμε G d-ανοικτό $\iff f(G)$ σ-ανοικτό

(δ) Για κάθε $F\subseteq X$ έχουμε F d-κλειστό $\iff f(F)$ σ-κλειστό

Απόδειξη: Όπως στο προηγούμενο θεώρημα

Άσκηση 19

Εξετάστε αν είναι ομοιομορφικοί οι μ.χ. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ (με τη συνήθη μετρική).

Λύση: · Ο $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικός με τους $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$,
γιατί δεν υπάρχει (καν) 1-1 και επί συνάρτηση
$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
αριθμήσιμα   υπεραριθμήσιμο
("λόγω μεγέθους")

· $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ - όχι
· $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$ - όχι
· $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ - ναι

Οι $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ δεν είναι ομοιομορφικοί (ομοίως οι $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{N}$ δεν είναι)

Έστω $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ομοιομορφισμός $\mathbb{Z}' = \emptyset$ $\mathbb{Z}$
(δηλ. f είναι 1-1 & επί, f, f^{-1} συνεχείς) $\mathbb{Q}$
Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \to x = 0$ $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

Η f είναι συνεχής, άρα $f(x_n) \to f(x)$.
Όμως, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία ακεραίων, και αφού είναι
συγκλίνουσα θα είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(x)$.
Δηλ. $\exists\, n_0$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \quad f(x_n) = f(x) \xRightarrow{f\ 1\text{-}1} \forall n \geq n_0 \quad x_n = x$
δηλ. $\frac{1}{n} = 0$ άτοπο

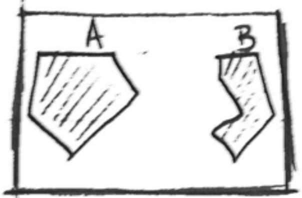
Οι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{N}$ είναι ομοιομορφικοί

Το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{N}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα.
Θεωρούμε τυχούσα $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{Z}$.
Γνωρίζουμε ότι κάθε $g: \mathbb{N} \longrightarrow (Y, \sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
$\Longrightarrow f$ συνεχής. και κάθε $h: \mathbb{Z} \to (X, d)$ - " -
$\Longrightarrow f^{-1}$ συνεχής

Το Λήμμα του Urysohn

Έστω (X,d) μ.χ. και A, B κλειστά υποσύνολα του X τ.ω. $A \cap B = \emptyset$. Τότε, υπάρχει $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνεχής με τις εξής ιδιότητες:

X



(1) $\forall x \in X \;,\; 0 \leq f(x) \leq 1$

(2) $\forall x \in A \;,\; f(x) = 0$

(3) $\forall x \in B \;,\; f(x) = 1$

Απόδειξη: Ορίζουμε $f(x) = \dfrac{\text{dist}(x,A)}{\text{dist}(x,A) + \text{dist}(x,B)} = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$

- Αν $d(x,A) + d(x,B) = 0 \Rightarrow d(x,A) = d(x,B) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \underset{A \text{ κλειστό}}{\bar{A} = A}$ και $x \in \underset{B \text{ κλειστό}}{\bar{B} = B} \Rightarrow x \in \underset{\emptyset}{\underset{\shortparallel}{A \cap B}}$, άτοπο

Άρα $\forall x \in X$ έχουμε $d(x,A) + d(x,B) > 0$ και η f είναι καλά ορισμένη.

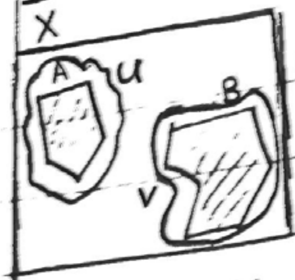
- Οι $d(x,A)$ και $d(x,B)$ είναι συνεχείς (Lipschitz με σταθ. 1)
- Προφανώς, $0 \leq f(x) \leq 1$
- Αν $x \in A \Rightarrow d(x,A) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- Αν $x \in B \Rightarrow d(x,B) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + \underset{0}{d(x,B)}} = 1$

Εφαρμογή (ισχυρότερη από άσκηση του Κεφ. 3)

Έστω $A, B \subseteq X$ κλειστά με $A \cap B = \emptyset$.

Ν.δ.ο. $\exists\, U, V \subseteq X$ ανοικτά τ.ω. $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

Λύση: Από το Λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ τ.ω. $f|_A\equiv 0$ και $f|_B\equiv 1$



Ορίζουμε $U=\{x\in X: f(x)<1/3\}=f^{-1}\left(\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\right)=$ $=$ ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού μέσω της συνεχούς f και $A\subseteq U$ (αν $x\in A \Rightarrow f(x)=0<1/3$)

Ορίζουμε $V=\left\{x\in X: f(x)>\frac{2}{3}\right\}$ Ομοίως το V είναι ανοικτό

και $B\subseteq V$. Μένει ν.δ.ο. $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.

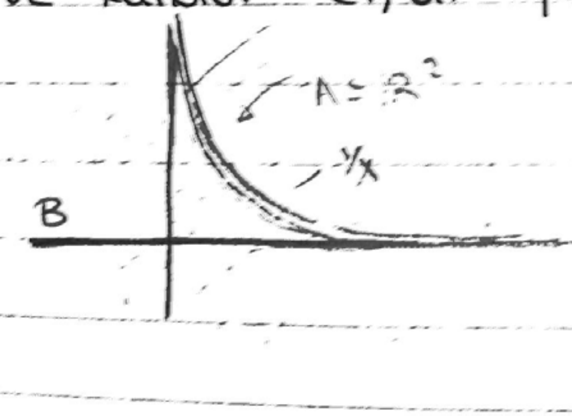
Έστω $x\in\overline{U}$. $\exists\, x_n\in U$ τ.ω. $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$ και $\forall n$ $f(x_n)<\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)\le\frac{1}{3}$, δηλ. $\overline{U}\subseteq\left\{x\in X: f(x)\le\frac{1}{3}\right\}$

Ομοίως, $\overline{V}\subseteq\left\{x\in X: f(x)\ge\frac{2}{3}\right\}$.

Ερώτηση: Αν $A,B\subseteq(X,d)$ μη κενά, η απόσταση των A και B

είναι ο αριθμός $\mathrm{dist}(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A,\ y\in B\}$

Υπάρχουν παραδείγματα ξένων κλειστών A,B σε κάποιον (X,d) με $\mathrm{dist}(A,B)=0$;



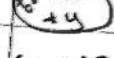
$A\cap B=\emptyset$

18/11/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίου 4)

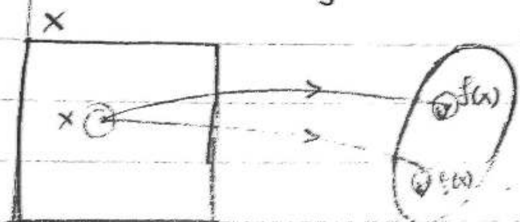
(2) Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ και $x_0 \in X$.
Η f είναι συνεχής στο x_0 ανν $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ τω.
αν $x,y \in B(x_0,\delta)$, τότε $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$.

<u>Λύση</u>: ($\Longrightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, $\exists \delta>0$ τω. αν $z \in B(x_0,\delta)$, τότε $\sigma(f(z),f(x_0))<\varepsilon/2$.
Τότε, αν $x,y \in B(x_0,\delta)$, τότε
$\sigma(f(x),f(y)) \le \sigma(f(\underset{z}{x}),f(x_0))+\sigma(f(x_0),f(\underset{z}{y})) < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$



($\Longleftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $\delta>0$ τω. $\forall x,y \in B(x_0,\delta): \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$
Αφού $\overset{y}{x_0} \in B(x_0,\delta)$, $\forall x \in B(x_0,\delta)$ έχουμε $\sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

(24) Έστω $f,g:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχείς και $f(x)\neq g(x)$



Ν.αο. $\exists r>0$ τω. $\forall y,z \in B(x,r)$ ισχύει $f(y)\neq g(z)$

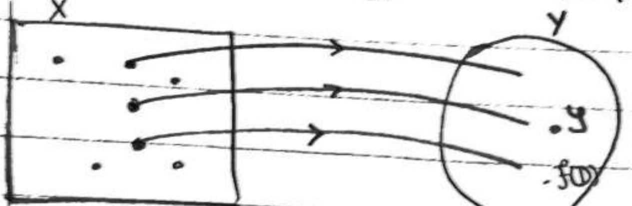
<u>Λύση</u>: Αφού $f(x)\neq g(x)$ (στον Y) $\exists \varepsilon>0$ τω.

π.χ. παίρνουμε $0<\varepsilon<\frac{\sigma(f(x),g(x))}{2}$
Βρίσκουμε r_1 για την (1) r_2 για το (2) και $r=\min\{r_1,r_2\}$

$B_\sigma(f(x),\varepsilon)\cap B_\sigma(g(x),\varepsilon)=\emptyset$ (*)
Οι f,g είναι συνεχείς στο x, $\exists r>0$ τω.
(1) $\forall y \in B_d(x,r)$ $\sigma(f(y),f(x))<\varepsilon$
(2) $\forall z \in B_d(x,r)$ $\sigma(g(z),g(x))<\varepsilon$
Άρα $\forall y,z \in B_d(x,r)$ έχουμε $f(y)\in B_\sigma(f(x),\varepsilon)$ και $g(z)\in B_\sigma(g(x),\varepsilon)$
Αν είχαμε $f(y)=g(z)$, τότε θα είχαμε
$f(y)=g(z)\in B_\sigma(f(x),\varepsilon)\cap B_\sigma(g(x),\sigma)\neq\emptyset$, <u>άτοπο</u> (από την (*))

(10) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός.
Ν.δ.ο. (X,d) διαχωρίσιμος $\iff$ (Y,σ) διαχωρίσιμος

<u>Λύση</u>: ($\Longrightarrow$) Υπάρχει D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.



Θεωρούμε το σύνολο $f(D)=\{f(d): d\in D\}$.
Η $f|_D : D\to f(D)$ είναι 1-1 και επί και το D είναι αριθμήσιμο, άρα το $f(D)$ είναι αριθμήσιμο.
<u>Το $f(D)$ είναι πυκνό</u>: $\overline{f(D)}=Y$
Έστω $y\in Y$. <u>Αφού η f είναι επί, $\exists x\in X$ τ.ω. $y=f(x)$</u>.
Αφού το D είναι πυκνό στο X, $\exists$ (d_n) στο D τ.ω. $d_n\to x$.
Η f είναι συνεχής, άρα $\underset{f(D)}{f(d_n)}\longrightarrow f(x)=y$

Άρα $y\in\overline{f(D)}$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $f:(X,d)\to(Y,d)$ συνεχής και επί.
Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε ο Y είναι διαχωρίσιμος
(Ίδια απόδειξη)

(11) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ τ.ω. "$\forall A\subseteq X$ ισχύει $f(A')\subseteq[f(A)]'$"
Ν.δ.ο. η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

f συνεχής $\Updownarrow$ ① $\forall A\subseteq X$ $f(\bar A)\subseteq\overline{f(A)}$

$\boxed{\bar A = A\cup A'}$ ②

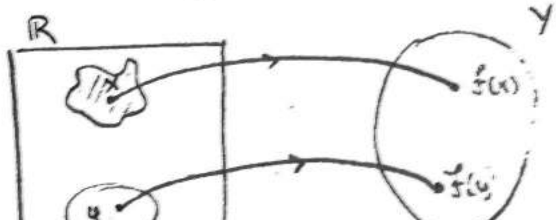
<u>Λύση</u>: Παίρνουμε τυχόν $A\subseteq X$. Έχουμε:
$f(\bar A)=f(A\cup A')=f(A)\cup f(A')$. Έχουμε $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ (κάθε σύνολο περιέχεται στην κλειστή του θήκη)
και $\overline{f(A)}=f(A)\cup[f(A)]'$ (πάλι από το ②)
$\Rightarrow [f(A)]'\subseteq\overline{f(A)}$. Έπεται ότι $f(\bar A)=f(A)\cup f(A')\subseteq\overline{f(A)}$
Από το ① η f συνεχής.

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει.
Θεωρούμε την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Η f είναι συνεχής και για $A=\mathbb{R}$ έχουμε $f(A')=f(\mathbb{R})=\{0\}$
ενώ $[f(A)]'=\{0\}'=\emptyset$.

(12) Έστω $f:\mathbb{R}\to(Y,\delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική στο Y.
Ν.δ.ο. f συνεχής $\Longleftrightarrow$ f σταθερή

<u>Λύση</u>: ($\Longleftarrow$) Κάθε σταθερή συνάρτηση μεταξύ μ.χ. είναι συνεχής
(απλό με τους ε-δ ορισμούς)
($\Longrightarrow$) Έστω $f:\mathbb{R}\to(Y,\delta)$ συνεχής συνάρτηση που <u>δεν είναι σταθερή</u>.
Τότε $\exists x,y\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(x)\neq f(y)$. Θεωρούμε το $B=\{f(x)\}\subseteq Y$

(α) $A\subseteq\mathbb{R}$ ανοικτό $\Longleftrightarrow$ το A είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων.
(β) Άσκηση Κεφ.3
A ανοικτό & κλ. $\subseteq\mathbb{R}$ $\Rightarrow A=\emptyset$ ή $A=\mathbb{R}$



Το B είναι ανοικτό <u>και</u> κλειστό ως προς τη διακριτή μετρική.
Αφού η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό και κλειστό $\subseteq\mathbb{R}$.
Από γνωστή άσκηση $f^{-1}(B)=\emptyset$ ή $f^{-1}(B)=\mathbb{R}$ <u>άτοπο</u>, γιατί $y\notin f^{-1}(B)$
$f(y)\neq f(x)$, άρα $f(y)\notin \underset{B}{\{f(x)\}}$
<u>άτοπο</u>, γιατί $x\in f^{-1}(B)$

(13) Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται <u>τοπικά φραγμένη</u>,
αν $\forall x\in X\ \exists\delta>0$ τ.ω. η $f|_{B(x,\delta)}$ να είναι φραγμένη.

(α) Αν η f είναι συνεχής, τότε είναι τοπικά φραγμένη.
Ισχύει το αντίστροφο;
(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Τότε f συνεχής $\Longleftrightarrow$ f τοπικά φραγμένη & έχει κλειστό γράφημα

__Λύση:__ (α) Έστω $x \in X$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ τ.ω. $f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon) \Rightarrow f|_{B_d(x,\delta)}$ φραγμένη

$f: A \to B$ φραγμένη $\Leftrightarrow f(A)$ φραγμένο $\subseteq B$ $\Leftrightarrow f(A)$ περιέχεται σε κάποια μπάλα του B

Το __αντίστροφο__ __δεν__ ισχύει.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

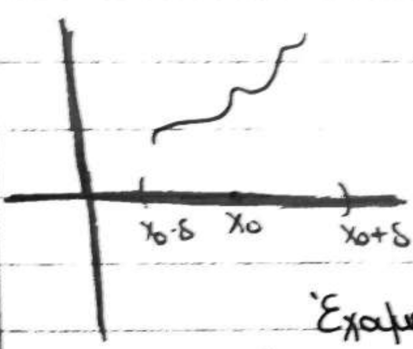
Η g είναι __φραγμένη__, άρα και τοπικά φραγμένη, αλλά δεν είναι __συνεχής σε κανένα σημείο.__

(β) ($\Longrightarrow$) Ισχύει γενικότερα για συνάρτηση $f: (X,d) \to (Y,\sigma)$. Στο (α) είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι τοπικά φραγμένη και στην Άσκηση 4.6 ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει κλειστό γράφημα.

Δίνεται ότι το $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^2$

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f __δεν__ είναι συνεχής. Αφού η f είναι τοπικά φραγμένη, $\exists \delta > 0$ τ.ω. η $f|_{(x_0-\delta, x_0+\delta)}$ να είναι φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0$ τ.ω. $\boxed{\text{"αν } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M\text{"}}$ (*)

__Άρνηση του ορισμού (με ακολουθίες)__: $\exists \varepsilon > 0$ και (x_n) στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $x_n \to x_0$ __και__ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ (**)



$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \delta$ (διότι $x_n \to x_0$)

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0$ $|f(x_n)| \leq M$. Άρα η $f(x_n)$ φραγμένη.

Από το Θ. Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{k_n})$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_{k_n}) \longrightarrow y \in \mathbb{R} \\ \text{Έχουμε και } x_{k_n} \longrightarrow x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_{k_n}, f(x_{k_n})) \in G_f \to (x_0, y)$$

Αφού το G_f είναι κλειστό, έχουμε $(x_0, y) \in G_f \Rightarrow \boxed{y = f(x_0)}$.

Τότε $f(x_{k_n}) \longrightarrow y = f(x_0)$ __άτοπο__, γιατί $\forall n$ $|f(x_{k_n}) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ (**)

(14) Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής και D πυκνό υποσύνολο του X
Σωστό ή λάθος;

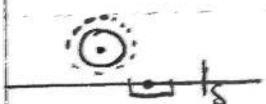
(α) $f|_D$ φραγμένη $\Longrightarrow$ f φραγμένη

(β) $f|_D$ ομοιόμορφα συνεχής $\Longrightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής

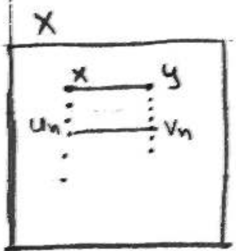
(δ) $f|_D$ 1-1 $\Longrightarrow$ f 1-1

__Λύση__: (α) ΝΑΙ $f(X) = f(\bar{D}) \subseteq \overline{f(D)}$, γιατί η f είναι συνεχής.
Η $f|_D$ φραγμένη $\Longrightarrow \exists\, y_0 \in X$ και $R>0$ τ.ω. $f(D) \subseteq B_\sigma(y_0,R)$

__Άρα__: $f(X) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq \overline{B_\sigma(y_0,R)} \subseteq \hat{B}_\sigma(y_0,R) \subseteq B_\sigma(y_0,R+1)$



(β) __ΝΑΙ__. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η $f|_D$ είναι ομ. συνεχής $\exists\, \delta>0$ τ.ω.
"αν $u,v \in D$ και $d(u,v)<\delta \Longrightarrow \sigma(f(u),f(v))<\varepsilon$". (*)
__Το ίδιο δ μας κάνει για την f__: Έστω $x,y \in X$ με $d(x,y)<\delta$



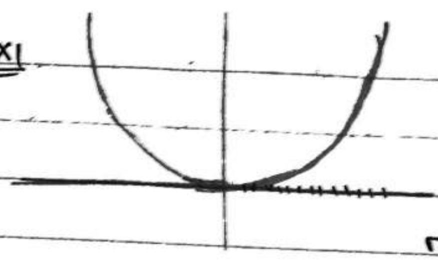
Υπάρχουν (u_n) (v_n) στο D τ.ω. $u_n \to x$ και $v_n \to y$ (D πυκνό)
Τότε $d(u_n,v_n) \to d(x,y) < \delta \Longrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$
$d(u_n,v_n)<\delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 \quad \sigma(f(u_n),f(v_n))<\varepsilon/2$

Αφού η f είναι συνεχής $f(u_n) \to f(x)$ και $f(v_n) \to f(y)$

$$\underbrace{\sigma(f(u_n),f(v_n))}_{\text{τελικά } < \varepsilon/2} \xrightarrow{\Downarrow} \sigma(f(x),f(y))$$

Άρα, $\sigma(f(x),f(y)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

(δ) <u>ΟΧΙ</u>



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Η f είναι συνεχής και <u>δεν</u> είναι 1-1. Θα ορίσουμε κατάλληλο πυκνό $D \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. αν $x \neq y$ στο D, τότε $f(x) \neq f(y)$ (δηλ. $f|_D$ 1-1)

Ορίζουμε $D = (\mathbb{Q} \cap (0,+\infty)) \cup ((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (-\infty,0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{D} = \overline{\mathbb{Q} \cap (0,+\infty)} \cup \overline{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (-\infty,0)} = [0,+\infty) \cup (-\infty,0] = \mathbb{R}$

Άρα το D είναι πυκνό.

Έστω $x \neq y$ στο D.

① Αν $x, y > 0$, τότε π.χ. $0 < x < y \Rightarrow 0 < x^2 < y^2$, δηλ. $f(x) \neq f(y)$ (ή η f είναι 1-1 στο $(0,+\infty)$)

② Αν $x, y < 0$, τότε π.χ. $x < y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (ή η f είναι 1-1 στο $(-\infty,0)$)

③ Αν $x < 0 < y$, τότε x άρρητος και y ρητός $\Rightarrow x \neq -y \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 \neq y^2$, δηλ. $f(x) \neq f(y)$ και $x \neq y$

(21) Έστω $f: (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής. Ν.α.ο.
(α) Η $g: X \times Y \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = \sigma(f(x),y)$ είναι συνεχής
(β) Το $A = \{(x,y) \in X \times Y : f(x) \in B_\sigma(y,1)\}$ είναι συνεχής

<u>Λύση</u>: (α) Έστω $(x_n, y_n) \to (x,y)$, $(x_n,y_n) \in X \times Y$

Ζητάμε
$\sigma(f(x_n),y_n) \to \sigma(f(x),y)$

Τότε $x_n \to x \xRightarrow{f \text{ συν.}} f(x_n) \to f(x)$ και $y_n \to y$ $\Big\} \Rightarrow \sigma(f(x_n),y_n) \to \sigma(f(x),y) \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x_n,y_n) \to g(x,y)$

(β) $A = \{(x,y) \in X \times Y : \sigma(f(x),y) < 1\} = \{(x,y) \in X \times Y : g(x,y) < 1\} =$
$= g^{-1}((-\infty,1)) =$ ανοικτό, γιατί η g είναι συνεχής από το (α)

$(-\infty,1)$ ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$

(22) Έστω $f:(X,d)\to\mathbb{R}$. Ν.δ.ο. f συνεχής $\iff$

$\iff \forall a\in\mathbb{R}$ το $\underbrace{\{x\in X: f(x)<a\}}_{f^{-1}((-\infty,a))}$ ανοικτό **και**

$\forall b\in\mathbb{R}$ το $\underbrace{\{x\in X: f(x)>b\}}_{f^{-1}((b,+\infty))}$ ανοικτό

Λύση: $(\Rightarrow)$ $\forall a\in\mathbb{R}$ $\{x\in X: f(x)<a\}=f^{-1}(\underbrace{(-\infty,a)}_{\text{ανοικτό}})=$ ανοικτό

$\forall b\in\mathbb{R}$ $\{x\in X: f(x)>b\}=f^{-1}(\underbrace{(b,+\infty)}_{\text{ανοικτό}})=$ ανοικτό

$(\Leftarrow)$ Αν $b<a$, τότε $\overbrace{\{x\in X: b<f(x)<a\}}^{=f^{-1}((b,a))}=\underbrace{\{x: f(x)>b\}}_{\text{ανοικτό}}\cap\underbrace{\{x: f(x)<a\}}_{\text{ανοικτό}}$

= ανοικτό ως τομή ανοικτών

b α Έστω $G\subseteq\mathbb{R}$ ανοικτό. Τότε $G=\bigcup_n (b_n,a_n)$,

όπου (b_n,a_n) ανοικτά διαστήματα ή ανοικτά ημιδιαστήματα

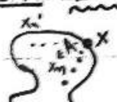
Τότε $f^{-1}(G)=\bigcup_n \underbrace{f^{-1}((b_n,a_n))}_{\text{ανοικτό}}=$ ανοικτό ως ένωση ανοικτών

(18) Έστω (X,d) μ.χ. και $A\subseteq X$.

Αν $f: A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής επέκταση $F:\bar{A}\to\mathbb{R}$ της f

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ομ. συν.
$\Updownarrow$
$\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ και
$\exists \lim_{x\to b^-} f(x)$ και f συν.

Λύση: Βήμα 1ο: Πως θα ορίσουμε το $F(x)$ για $x\in\bar{A}$



- $\exists (x_n)$ στο A τ.ω. $x_n\to x$
- Άρα η (x_n) είναι βασική (ως συγκλίνουσα)
- Η f είναι ομ. συνεχής $\to$ η $(f(x_n))$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$
- Άρα $\exists\ y=\lim f(x_n)$
- Ορίζουμε $F(x)=y=\lim f(x_n)$

Αν (x_n') μια άλλη ακολουθία στο A με $x_n'\to x$, τότε όπως πριν η $f(x_n')\to y'$.

Όμως, $d(x_n,x_n')\to 0$ (γιατί $x_n\to x$, $x_n'\to x$)

$\xrightarrow{f \text{ ομ. συνεχής}} \sigma(f(x_n),f(x_n'))\to 0$. Άρα, $\sigma(y,y')=0\Rightarrow y=y'$

$\downarrow$

$\sigma(y,y')$

Αυτό δείχνει ότι η τιμή $F(x)$ είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή της (x_n)).

Αν $x \in A$ μπορούμε να πάρουμε $x_n = x \to x$ και τότε $F(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x)$, δηλ. ότι η F είναι επέκταση της f: $F|_A \equiv f$.

Βήμα 2ο: Χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη συνέχεια της f δ.ο. και η F είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Επειδή το A είναι πυκνό στο $\bar{A}$ το έχουμε ουσιαστικά κάνει στην Άσκηση 14 (β).

στην Άσκηση ...

23/11/21

Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

Ορισμός: Ένας μ.χ. (X, d) λέγεται **πλήρης**, αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) του X είναι συγκλίνουσα (συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$)

Παραδείγματα

(α) Ο (X, δ) είναι πλήρης.

Έστω (x_n) βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \quad \delta(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$

Ειδικότερα, για $m = n_0$, έχουμε $\forall n \geq n_0 \quad \delta(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

Άρα, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, ίση με x_{n_0}, συνεπώς συγκλίνει.

(β) Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης.

Κάθε βασική ακολουθία πραγματικών συγκλίνει.

(γ) Ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$ είναι πλήρης.

· $1 \le p < \infty$: Έστω (x_n) βασική ακολουθία, $x_n = (x_{n1}, \dots\dots, x_{nm})$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n \overset{s\,m}{\ge} n_0$

$\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon \iff \left(\sum_{k=1}^{m} |x_{nk} - x_{mk}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$

Άρα, $\forall n, m \ge n_0$ και $\forall k = 1, \dots\dots, m$

$|x_{nk} - x_{mk}| \le \left(\sum_{k=1}^{m} |x_{nk} - x_{mk}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$

Άρα, $\forall k = 1, \dots, m$ η ακολουθία $(x_{nk})_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$

Από το (β) $\exists\, x_k \in \mathbb{R}$ τω. $x_{nk} \xrightarrow{n \to +\infty} x_k$

<u>Δηλ.</u>

$$\left.\begin{array}{l} x_{n1} \longrightarrow x_1 \\ x_{n2} \longrightarrow x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{nm} \longrightarrow x_m \end{array}\right\} \Rightarrow x_n = (x_{n1}, \dots\dots, x_{nm}) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x = (x_1, \dots\dots, x_m)$$

Το τελευταίο ισχύει, γιατί η μετρική που επάγεται στον $\mathbb{R}^m$ από την $\|\cdot\|_p$ είναι μετρική γινόμενο.

$$\left[\ \text{Αλλιώς, } \|x_n - x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} |\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x_{nk} - x_k}|^p\right)^{1/p} \longrightarrow 0\ \right]$$

· $p = \infty$ Όμοια - Άσκηση.

(δ) Ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ <u>δεν</u> είναι πλήρης.

Θεωρούμε την $q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Στον $\mathbb{R}$ ξέρουμε ότι $q_n \xrightarrow{|\cdot|} e \notin \mathbb{Q}$

Άρα η (q_n) είναι $|\cdot|$- βασική στον $\mathbb{R} \overset{q_n \in \mathbb{Q}}{\Longrightarrow}$ η (q_n) είναι βασική στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Έστω ότι $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ τω. $q_n \xrightarrow{|\cdot|} q$.

Τότε $q_n \longrightarrow q$ στο $\mathbb{R}$ ως προς την $|\cdot|$, όμως $q_n \to e$ στο $\mathbb{R}$.

Άρα $q = e \Rightarrow e \in \mathbb{Q}$, <u>άτοπο</u>

Πρόταση 1

(α) Αν ο (X,d) πλήρης και $F \subseteq X$ κλειστό, τότε ο (F, d_F) είναι πλήρης.
(β) Αν (X,d) μ.χ., $\emptyset \neq F \subseteq X$ και ο (F, d_F) είναι πλήρης, τότε το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(*) Με d_F συμβολίζουμε τον περιορισμό της μετρικής d στο σύνολο F

Απόδειξη: (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (F, d_F).
Δηλ. $\underbrace{\boxed{x_n \in F}}_{\substack{\cap \\ X}}$ και $\underbrace{\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \ d_F(x_n, x_m) < \varepsilon}$

$\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

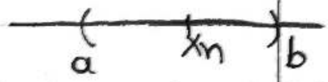
Άρα η (x_n) είναι βασική στον (X,d).
Ο X είναι πλήρης, άρα $\exists x \in X$ τ.ω. $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d} x$. Το F είναι κλειστό και $x_n \in F$, άρα $\boxed{x \in F}$.
Τότε $d_F(x_n, x) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d_F} x$.
(β) Έστω (x_n) στο F τ.ω. $x_n \xrightarrow{d} x \in X$. Θ.δ.ο. $x \in F$.
· Αφού $x_n \xrightarrow{d} x$, η (x_n) είναι d-βασική και αφού $x_n \in F$ και $d_F = d$ έχουμε ότι η (x_n) είναι d_F-βασική στο F.
Αφού ο (F, d_F) είναι πλήρης, $\exists y \in F$ τ.ω. $x_n \xrightarrow{d_F} y \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} y$.
Από μοναδικότητα του ορίου (στον X) έχουμε $x = y \in F$, δηλ. $x \in F$.

Σημείωση: Πως χρησιμοποιείται το (β) της Πρότασης;
Αν $A \subseteq (X, d)$ και το A δεν είναι κλειστό, τότε ο (A, d_A) δεν είναι πλήρης.

Παραδείγματα

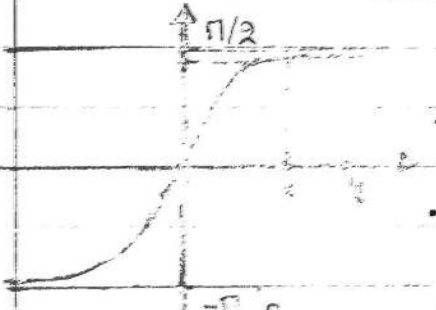
(1) Ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης: το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

(2) (a,b) με τη συνήθη μετρική: δεν είναι πλήρης μ.χ., γιατί $\overline{(a,b)} = [a,b]$



Άσκηση 2

Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη μετρική $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Ν.δ.ο. η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική στο $\mathbb{R}$, αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.



Λύση: • $f(x) = \arctan x$, $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 1-1 και επί

• $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, άρα f γν. αύξουσα

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-\pi}{2}$

Είχαμε δει ότι επειδή η f είναι 1-1, η $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ είναι μετρική (άσκηση του κεφ. 1)

① $\boxed{d \sim |\cdot|}$ (*) Βασίζεται στο ότι οι f, f^{-1} είναι συνεχείς και στην αρχή της μεταφοράς.

Έστω $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow d(x_n, x) = |\arctan x_n - \arctan x| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \arctan x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} \arctan x \xRightarrow[\substack{f^{-1} = \tan \\ \text{συνεχής}}]{} \tan(\arctan x_n) \xrightarrow[|\cdot|]{} \tan(\arctan x)$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} x$.

Έστω $x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} x \underset{\substack{f=\arctan \\ \text{συνεχής}}}{\Longrightarrow} \arctan x_n \longrightarrow \arctan x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |\arctan x_n - \arctan x| \longrightarrow 0 \Longrightarrow d(x_n, x) \longrightarrow 0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow{d} x.$

Άρα, οι $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{R}, d)$ είναι ομοιομορφικές.

<u>Ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης</u>

Θέτουμε <u>$x_n = n$</u>. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \frac{\pi}{2}$ (γιατί $n \to +\infty$)

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left| f(n) - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε $\forall n, m \geq n_0$ έχουμε $d(x_n, x_m) = d(n, m) = |\arctan n - \arctan m|$

$= |f(n) - f(m)| \leq \left| f(n) - \frac{\pi}{2} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - f(m) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Άρα, η (x_n) είναι d-βασική.

Έστω ότι $x_n = n \xrightarrow{d} x \in \mathbb{R} \overset{f \text{ συν.}}{\Longrightarrow} \arctan n \longrightarrow \arctan x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \tan(\arctan n) \longrightarrow \tan(\arctan x) \Longrightarrow n \xrightarrow{|\cdot|} x \in \mathbb{R}$ <u>άτοπο</u>, γιατί $n \xrightarrow{|\cdot|} +\infty$.

<u>Ασκήσεις</u>

(3) Έστω d_1, d_2 μετρικές στο ίδιο σύνολο X.

Υποθέτουμε ότι είναι <u>Lipschitz ισοδύναμες</u>: $\exists a, b > 0$ τω.

$\forall x, y \in X : a\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b \cdot d_1(x,y)$.

Τότε (x_n) d_1-βασική $\iff$ (x_n) d_2-βασική.

<u>Άσκηση</u>

· Επίσης · $d_1 \sim d_2$

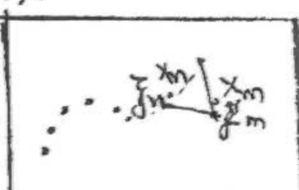
· (X, d_1) πλήρης $\iff$ (X, d_2) πλήρης

Λύση: ($\Longrightarrow$) Έστω (x_n) d_1-βασική. Έστω $\varepsilon>0$.
$\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n,m\geq n_0 \quad d_1(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{b}$.

Τότε $\forall n,m\geq n_0 \quad d_2(x_n,x_m)\leq b\cdot d_1(x_n,x_m)< \cancel{b}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{b}}$

Άρα, η (x_n) είναι d_2-βασική.
($\Longleftarrow$) Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την $d_1(x,y)\leq \frac{d_2(x,y)}{a}$

(4) Έστω (X,d) μ.χ. και D πυκνό υποσύνολο του X.
Υποθέτουμε ότι κάθε βασική ακολουθία (ξ_n) σημείων του D συγκλίνει. (σε κάποιο $x\in X$). Ν.δ.ο. ο X είναι πλήρης.



Λύση: Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο X.
(*) $\forall n\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε $\xi_n\in D$ τω. $d(\xi_n,\xi_m)<\frac{1}{n}$
(υπάρχει, γιατί το D είναι πυκνό)

Ισχυρισμός: Η (ξ_n) είναι βασική.

$d(\xi_n,\xi_m)\leq d(\xi_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,\xi_m)<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{m}<\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$. Η (x_n) είναι βασική, άρα $\exists n_1\in\mathbb{N}$ τω. $\forall n,m\geq n_1$ $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{3}$. $\exists n_2: \frac{1}{n_2}<\frac{\varepsilon}{3}$. Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$.

Τότε, $\forall n,m\geq n_0 \quad d(\xi_n,\xi_m)\leq d(\xi_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,\xi_m)<$
$<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{m}\underset{n,m\geq n_2}{\leq}\frac{1}{n_2}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{n_2}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Από υπόθεση, $\exists x\in X$ τω. $\xi_n\to x$.
Τότε, $d(x_n,x)\leq d(x_n,\xi_n)+d(\xi_n,x)<\frac{1}{n}+d(\xi_n,x)\to 0+0=0$.

Άρα, $x_n\to x$.

(5) Ν.δ.ο. ένας μ.χ. (X,d) είναι πλήρης ανν $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$ η κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) \leq \varepsilon\}$ είναι πλήρης μχ.

<u>Λύση</u>: $(\Rightarrow)$ X πλήρης + $\hat{B}(x,\varepsilon)$ κλειστό $\subseteq X \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{B}(x,\varepsilon)$ πλήρης μετρικός υπόχωρος (από Πρόταση 1 το (α))
$(\Leftarrow)$ Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.
Η (x_n) είναι <u>φραγμένη</u>, άρα περιέχεται σε μπάλα, $\exists x_0 \in X$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \quad x_n \in \hat{B}(x_0,\varepsilon)$.
Ο $(\hat{B}(x_0,\varepsilon), d)$ είναι πλήρης, άρα $\exists x \in \hat{B}(x_0,\varepsilon) \subseteq X$ τω. $x_n \to x$, δηλαδή η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

<u>Παραλλαγή (5')</u> : (X,d) μχ. + $\underline{\exists \varepsilon > 0}$ τω. $\forall x \in X$ $\hat{B}(x,\varepsilon)$ πλήρης μχ.
Τότε ο (X,d) είναι πλήρης.

<u>Λύση</u>: Έστω (x_n) βασική. Για <u>δοσμένο $\varepsilon > 0$</u> : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n,m \geq n_0 \quad d(x_n,x_m) < \varepsilon \xrightarrow{\text{ειδικότερα}} \forall n \geq n_0 \quad d(x_n,x_{n_0}) < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_n \in \hat{B}(x_{n_0},\varepsilon)$.
Η $(x_n)_{n \geq n_0}$ είναι βασική (άσκηση) και περιέχεται στον πλήρη μχ $\hat{B}(x_{n_0},\varepsilon)$. Άρα συγκλίνει σε κάποιο $x \in \hat{B}(x_{n_0},\varepsilon) \subseteq X$ και έπεται ότι $x_n \longrightarrow x$ (άσκηση).

<u>Θεώρημα Cantor</u>

Έστω (X,d) <u>πλήρης</u> μχ. και (F_n) φθίνουσα ακολουθία <u>μη-κενών κλειστών</u> υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$.
Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ και μάλιστα <u>μονοσύνολο</u>.

(F_n) φθίνουσα, δηλ. $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \ldots$

Το Θεώρημα Cantor γενικεύει την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων. Αν $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n$ κλειστά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

<u>Λήμμα 1</u>

Αν $A_n \supseteq A_{n+1} \ldots$ μη κενά $\subseteq (X,d)$ και $diam(A_n) \to 0$, τότε η τομή τους $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x \neq y$ και $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x, y \in A_n$, άρα $0 < d(x,y) \leq diam(A_n) \to 0$

<u>άτοπο</u>

<u>Λήμμα 2</u>

Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $R_n = \{x_k : k \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Τότε η (x_n) είναι βασική $\iff diam(R_n) \to 0$.

<u>Απόδειξη</u>: $(\Leftarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $diam(R_n) \to 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $diam(R_n) < \varepsilon$.

Έστω $n, m \geq n_0$. Τότε $x_n, x_m \in R_{n_0} = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\} \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq diam(R_{n_0}) < \varepsilon$.

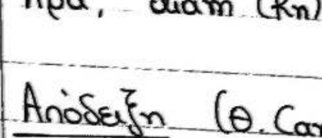
$(\Rightarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$.

<u>Τότε</u> $\underset{\sup\{\underbrace{d(x_n,x_m)}_{<\varepsilon/2} : n,m \geq n_0\}}{\underset{\parallel}{diam(R_{n_0})}} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Τώρα, αν $n \geq n_0$ έχουμε $R_n \subseteq R_{n_0} \Rightarrow diam(R_n) \leq diam(R_{n_0}) < \varepsilon$.
Άρα, $diam(R_n) \to 0$.

<u>Απόδειξη</u> (Θ. Cantor): Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε <u>τυχόν</u> $\boxed{x_n \in F_n}$

X



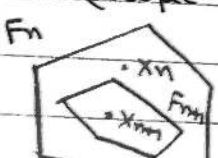
① Αν $R_n = \{x_k : k \geq n\}$, τότε $R_n \subseteq F_n \Rightarrow$
$\overset{0 \leq}{\Rightarrow} diam(R_n) \leq diam(F_n) \to 0 \Rightarrow diam(R_n) \to 0$
$\overset{Λ2}{\Rightarrow} (x_n)$ βασική.

Θα εξηγήσουμε, γιατί $R_n \subseteq F_n$: τα στοιχεία του R_n είναι οι όροι x_k, $k \geq n$. Όμως, αν $k \geq n$, τότε $x_k \in F_k \subseteq F_n$ ((F_n) φθίν.)
$\Rightarrow R_n = \{x_k : k \geq n\} \subseteq F_n$.

② Αφού ο X είναι πλήρης, $\exists x \in X$ τ.ω. $x_n \to x$.

③ $\underbrace{x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n}$, το οποίο θα δώσει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (και από Λημ.1 μονοσύνολο)

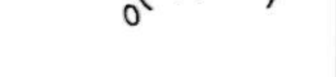
Παίρνουμε τυχόν $n \in \mathbb{N}$ και δ.ο. $x \in F_n$.



Έχουμε $R_n \subseteq F_n$, δηλ. $\forall k \geq n$ $x_k \in F_n$.
Δηλαδή το τελικό τμήμα $(x_k)_{k=n}^{\infty}$ της (x_n) περιέχεται στο F_n και <u>συγκλίνει</u> στο x $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in F_n$, γιατί το F_n είναι κλειστό.

<u>Παραδείγματα</u> (σε υποθέσεις χρειάζονται)

• "τα F_n είναι <u>κλειστά</u>"
Αν πάρουμε $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

(A_n) φθίνουσα + $diam(A_n) \to 0$ 

Όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\emptyset$. ($\nexists\, t>0 : \forall n \;\; t<1/n$)
Αρχιμήδεια Ιδιότητα

• "$\underline{\mathrm{diam}(F_n)\to 0}$", $F_n=[n,+\infty), n\in\mathbb{N}$

Τα F_n είναι κλειστά και $F_n\supseteq F_{n+1}$ $\forall n$
Όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[n,+\infty)=\emptyset$
($\nexists\, t\in\mathbb{R}$ τω. $\forall n\in\mathbb{N}$ $t\geq n$).
Εδώ $\mathrm{diam}(F_n)=+\infty$.

Αντίστροφο του Θ. Cantor

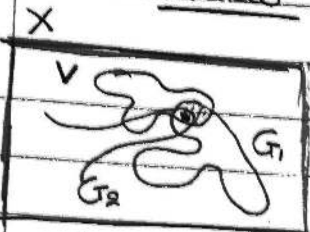
Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα:
"$\forall$ φθίνουσα (F_n) κλειστών μη κενών $\subseteq X$ με $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$". Τότε ο X είναι πλήρης.

Απόδειξη: • Έστω (x_n) βασική
• Λήμμα 2 $\Longrightarrow$ $\mathrm{diam}(R_n)\to 0$ (όπου $R_n=\{x_k : k\geq n\}$)
• Ορίζουμε $F_n=\overline{R_n}$. Τότε:
(i) $R_n\supseteq R_{n+1}\Longrightarrow F_n\supseteq F_{n+1}$
(ii) $\mathrm{diam}(F_n)=\mathrm{diam}(R_n)\longrightarrow 0$
• Από υπόθεση, $\exists x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$
Τότε $\forall n$ $d(\underset{\substack{\in F_n \\ R_n\subseteq F_n}}{x_n}, \underset{\in F_n}{x})\leq \mathrm{diam}(F_n)\longrightarrow 0$. Άρα $x_n\to x$.

25/11/21

<u>Θεώρημα Baire</u>

<u>Εισαγωγή</u>: Έχουμε δ.ο. σε κάθε μ.χ. (X,d), αν G_1, G_2 είναι ανοικτά και πυκνά σύνολα του X, τότε το $G_1 \cap G_2$ είναι <u>ανοικτό</u> και <u>πυκνό</u> $\subseteq X$.



· Έστω $\emptyset \neq V \subseteq X$ ανοικτό

· $\underbrace{G_1 \cap V}_{V'} \neq \emptyset$ ανοικτό (γιατί G_1 πυκνό)

· Αφού G_2 πυκνό, έχουμε $G_2 \cap V' \neq \emptyset \Rightarrow (G_2 \cap G_1) \cap V \neq \emptyset$

Επαγωγικά αν $G_1, G_2, \dots, G_n$ ανοικτά + πυκνά $\subseteq X$, τότε το $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$ είναι <u>ανοικτό και πυκνό</u> $\subseteq X$

· Δεν ισχύει το ίδιο για <u>άπειρη</u> τομή ανοικτών-πυκνών $\subseteq X$

Στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ αν γράψουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και ορίσουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$, τότε το G_n είναι ανοικτό και πυκνό $\forall n \in \mathbb{N}$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \setminus \{q_n\}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}\right)^c = \mathbb{Q}^c = \emptyset$

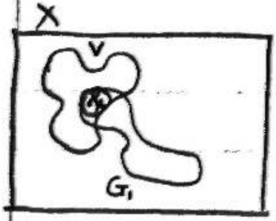
<u>Θεώρημα (Baire)</u>

Έστω (X,d) <u>πλήρης</u> μ.χ. Αν $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι G_δ-σύνολο και <u>πυκνό</u> $\subseteq X$. (Ειδικότερα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$)

<u>Θεώρημα (Cantor)</u>

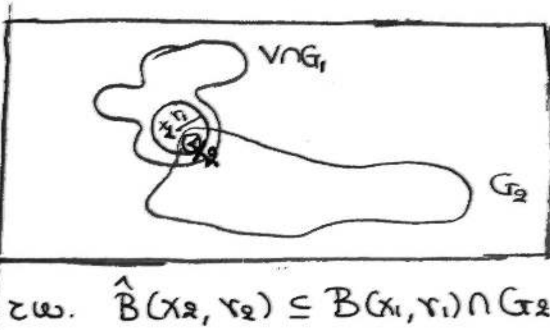
Αν ο (X,d) είναι πλήρης και $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία μη-κενών κλειστών $\subseteq X$ με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (μονοσύνολο)

Απόδειξη: Έστω $\phi \neq V \subseteq X$ ανοικτό. Θα βρούμε $x \in V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$



· Αφού το G_1 είναι πυκνό έχουμε $V \cap G_1 \neq \phi$ και το $V \cap G_1$ είναι ανοικτό.
Παίρνουμε $x_1 \in V \cap G_1$ και βρίσκουμε $0 < r_1 < 1$ τ.ω. $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq V \cap G_1$

Επειδή $V \cap G_1$ ανοικτό και $x_1 \in V \cap G_1$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x_1, \delta) \subseteq V \cap G_1$
Παίρνω $0 < r_1' < 1$, $r_1' < \delta$, οπότε $B(x_1, r_1') \subseteq B(x, \delta) \subseteq V \cap G_1$.
Μετά αν πάρω $0 < r_1 < r_1'$ έχω $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x_1, r_1')$



Επειδή το G_2 είναι πυκνό, έχουμε $B(x_1, r_1) \cap G_2 \neq \phi$ κ ανοικτό
Θεωρούμε $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap G_2$.
Όπως πριν, βρίσκουμε $0 < r_2 < 1/2$ τ.ω. $\hat{B}(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1) \cap G_2 \subseteq V \cap G_1 \cap G_2$.
Επαγωγικά, $\forall n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in X$ και $0 < r_n < 1/n$ έτσι ώστε $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$, γιατί
$\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n \subseteq V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap G_n$

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subseteq \hat{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$,
δηλ. η $(\hat{B}(x_n, r_n))_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $diam(\hat{B}(x_n, r_n)) \leq 2r_n < \frac{2}{n} \to 0$

Από το Θ. Cantor $\exists! \, x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$.

Τώρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x \in \hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n$, δηλ
$x \in V$ και $x \in G_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. $\Rightarrow x \in V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap \ldots$
και επειδή $V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap \ldots = V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$, $x \in V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$
Επειδή το V ήταν τυχόν, το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό (ειδικότερα μη-κενό)

Δυϊκή μορφή του Θ. Baire (Baire-2)

Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X τω. $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $int(F_{n_0}) \neq \phi$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n^{\circ} = \phi$. Τότε $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus F_n^{\circ} = X \setminus \phi = X$, δηλ. το $X \setminus F_n$ είναι πυκνό και ανοικτό ως συμπλήρωμα του F_n, που είναι κλειστό.
Από το Θ. Baire έπεται ότι $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)}_{} \neq \phi \Rightarrow \underbrace{X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}_{} \neq \phi$

$\Rightarrow X \setminus X \neq \phi \Rightarrow \phi \neq \phi$ άτοπο

Ορολογία: (α) Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται αραιό ή πουθενά πυκνό, αν $int(\overline{A}) = \phi$.
(β) Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται σύνολο α' κατηγορίας στον X, αν μπορεί να γραφεί ως $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ με τα B_n αραιά.
(γ) Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται σύνολο β' κατηγορίας στον X, αν δεν είναι α' κατηγορίας.

Ισχυρισμός: Κάθε πλήρης μ.χ. είναι β' κατηγορίας στον εαυτό του.

Απόδειξη: Έστω ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, B_n αραιά.
Τότε $X = \bigcup B_n \subseteq \bigcup \overline{B_n} \subseteq X \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \xRightarrow{\text{Baire-2}} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $int(\overline{B_{n_0}}) \neq \phi \Rightarrow B_{n_0}$ όχι αραιό άτοπο

Εφαρμογές – Ασκήσεις

(α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ πυκνό και G_δ-σύνολο, τότε το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Λύση: Έστω A αριθμήσιμο, πυκνό, G_δ-σύνολο στο $\mathbb{R}$.

① Αφού το A είναι G_δ, υπάρχουν $G_n \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτά τ.ω. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$ $A \subseteq G_n \Rightarrow \mathbb{R} \underset{A \text{ πυκνό}}{=} \overline{A} \subseteq \overline{G_n} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{G_n} = \mathbb{R} \Rightarrow G_n$ πυκνό

② Το A είναι αριθμήσιμο, άρα $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ για κάποιους $a_n \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $V_n = \mathbb{R} \setminus \{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Κάθε V_n είναι ανοικτό και πυκνό $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{a_n\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

Τότε $\emptyset = A \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(G_n \cap V_n)}_{\text{ανοικτό, πυκνό}}$

άτοπο, γιατί ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, άρα αριθμήσιμη τομή ανοικτών - πυκνών υποσυνόλων του είναι πυκνό σύνολο (Baire) και ειδικότερα $\neq \emptyset$.

Συνέπεια: Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ-σύνολο.

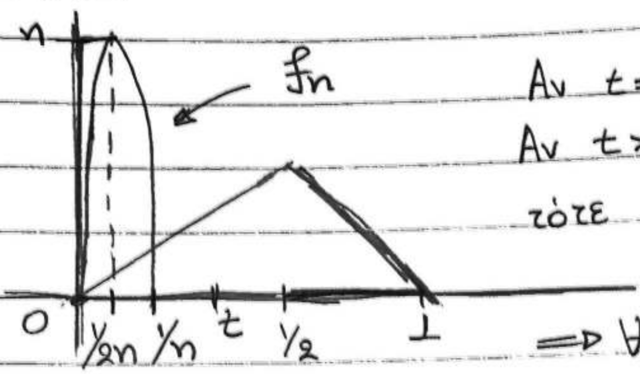
Εξήγηση: Διότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό $\subseteq \mathbb{R}$ και αν ήταν G_δ θα ήταν υπεραριθμήσιμο.

(Β) <u>Θεώρημα Osgood</u>: Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\forall t \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει διάστημα $(a,b) \subseteq [0,1]$ τ.ω. η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο (a,b).

<u>Υπόθεση</u>: $\forall t \in [0,1]$ $\exists M_t > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(t)| \leq M_t$

<u>Ζητούμενο</u>: $\exists (a,b) \subseteq [0,1]$ και $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall t \in (a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(t)| \leq M$

<u>Παράδειγμα</u>



Αν $t=0$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(0)=0$ <u>ok</u>
Αν $t>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < t$ και
τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < t$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $f_n(t)=0$.

Άρα, η $(f_n(t))$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα φραγμένη.

Η (f_n) <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0,1]$:
αν $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall n$ $\forall t \in [0,1]$ $|f_n(t)| \leq M$, τότε $\forall n$
θα έχουμε $\left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) \right| \leq M \Rightarrow n \leq M$ <u>άτοπο</u>

Το Θ. Osgood λέει ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε κάποιο υποδιάστημα του $[0,1]$.

<u>Απόδειξη</u>: Παίρνουμε $X=[0,1]$ με τη συνήθη μετρική. Είναι πλήρης μ.χ., γιατί το $[0,1]$ είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$.

Ορίζουμε $F_m = \{ t\in[0,1] : \underline{\forall n\in\mathbb{N}} \text{ ισχύει } |f_n(t)|\le m\}$

- Κάθε F_m είναι κλειστό: $F_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{t\in[0,1] : |f_n(t)|\le m\} =$
$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{f_n^{-1}([-m,m])}_{\text{κλειστό, γιατί } [-m,m] \text{ κλειστό και } f_n \text{ συνεχής.}}$

- $[0,1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Έστω $t\in[0,1]$. $\exists M_t>0 : \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(t)|\le M_t$

Υπάρχει φυσικός $m>M_t$. Τότε $\forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(t)|\le M_t<m \Rightarrow$
$\Rightarrow t\in F_m$.

Από τη 2η μορφή του Baire, $\exists m_0\in\mathbb{N}$ τω. $\text{int}(F_{m_0})\ne\emptyset$
$\Rightarrow$ υπάρχει διάστημα $(a,b)\subseteq F_{m_0}$. Τότε $\forall t\in(a,b)\ t\in F_{m_0}$
$\Rightarrow \forall t\in(a,b)\ \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(t)|\le m_0 \Rightarrow$ στο (a,b) η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη από το m_0.

<u>Άσκηση 22</u>

Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $f: X\to\mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση. Ν.δ.ο. $\exists\, \emptyset\ne G\subseteq X$ ανοικτό τω. η $f|_G$ είναι σταθερή συνάρτηση.

$f|_G$ σταθερή
$\Updownarrow$
$\exists q\in\mathbb{Q}\ \forall x\in G\ f(x)=q$
$\Updownarrow$
$\exists q\in\mathbb{Q}\ G\subseteq f^{-1}(\{q\})$

<u>Λύση</u>:
- Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Γράφουμε $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$.
- Ορίζουμε $F_n = f^{-1}(\{q_n\})$

κλειστή ως μονοσύνολο

Κάθε F_n είναι κλειστό $\subseteq X$, γιατί η f είναι συνεχής (F_n = αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχούς συνάρτησης)
- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\{q_n\}) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}\right) = f^{-1}(\mathbb{Q}) = X$

Από Θ. Baire $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.
Άρα $\exists\, \emptyset \neq G \subseteq F_{n_0}$ ανοικτό.
Για κάθε $x \in G$ έχουμε $x \in F_{n_0} \Rightarrow f(x) = q_{n_0}$, δηλαδή
η $f|_G$ είναι σταθερή και ίση με q_{n_0}.

Άσκηση 21

Έστω (X, d) πλήρης μ.χ. και $\mathcal{E}$ πυκνό G_δ-υποσύνολο του X.
Αν $g: X \to X$ ομοιομορφισμός, ν.δ.ο. $\mathcal{E} \cap g(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

Λύση: • $\mathcal{E}$ G_δ $\Rightarrow$ $\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, V_n ανοικτά $\subseteq X$

• $\forall n$ $\underset{\mathcal{E} \text{ πυκνό}}{X = \overline{\mathcal{E}}} \subseteq \overline{V_n} \Rightarrow \overline{V_n} = X \Rightarrow V_n$ πυκνό

• $g(\mathcal{E}) = g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \underset{g \text{ είναι 1-1 (ομοιομορφισμός)}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} g(V_n)$

Επίσης, αφού η g είναι ομοιομορφισμός και V_n ανοικτό
έχουμε $g(V_n)$ ανοικτό $\subseteq X$.
Τέλος, επειδή η g είναι συνεχής και επί απεικονίζει
πυκνά σύνολα σε πυκνά σύνολα (Ασκήσεις Κεφ. 4)
και αφού το V_n είναι πυκνό έχουμε $g(V_n)$ πυκνό.

Τώρα: $\mathcal{E} \cap g(\mathcal{E}) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} g(V_n)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(V_n \cap g(V_n))}_{U_n} \overset{(**)}{\underset{(*)}{\neq}} \emptyset$

U_n ανοικτό & πυκνό ως τομή δύο ανοικτών & πυκνών συνόλων

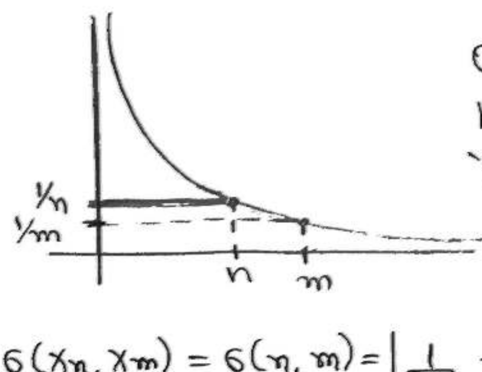
(*) (και μάλιστα πυκνό στο X)
(**) από Baire, αφού ο (X, d) είναι πλήρης.

Ασκήσεις (Κεφάλαιο 5)

① Στον $\mathbb{N}$ θεωρούμε τις μετρικές $d(m,n)=|m-n|$ και $\sigma(m,n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$

(α) Ν.δ.ο. ο $(\mathbb{N},d)$ είναι πλήρης, αλλά ο $(\mathbb{N},\sigma)$ δεν είναι
(γ) Ν.δ.ο. $d\sim\sigma$, άρα οι δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί.
(β) Ν.δ.ο. κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ είναι d-ανοικτό & σ-κλειστό.

<u>Λύση</u>: (α) Έστω (x_n) d-βασική στο $\mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει. $\left(\begin{array}{l}\text{παίρνω } \varepsilon=\frac{1}{2} \ \exists n_0 \ \forall n,m\geq n_0 \\ |x_n-x_m|<1/2 \Rightarrow \forall n,m\geq n_0 \ x_n=x_m\end{array}\right)$



Ορίζουμε $x_n=n$.
Η (x_n) είναι σ-βασική.
Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0$
$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n,m\geq n_0$

$$\sigma(x_n,x_m)=\sigma(n,m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Έστω ότι $\exists x\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x_n=n \xrightarrow{\sigma} x \Rightarrow \sigma(n,x)\longrightarrow 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right|\longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\xrightarrow{|\cdot|}\frac{1}{x}$, και $\frac{1}{n}\xrightarrow{|\cdot|} 0$.

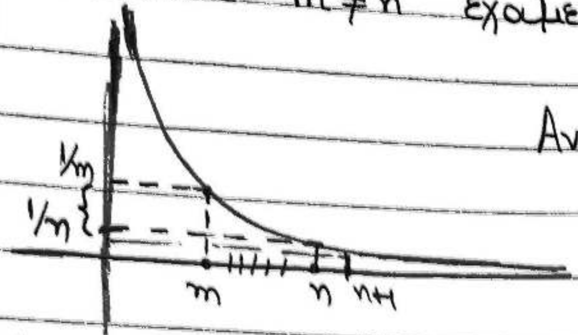
Άρα, $\frac{1}{x}=0$, <u>άτοπο</u>

(β) Έχουμε στον $(\mathbb{N},d)$ $\{n\}=B_d(n,\frac{1}{2})$ ανοικτό

$n-1$ $\quad n \quad$ $n+1$

<u>Άρα</u> κάθε $A\subseteq\mathbb{N}$ είναι d-ανοικτό.
$\Rightarrow$ κάθε $B\subseteq\mathbb{N}$ είναι d-κλειστό.

Στον $(\mathbb{N}, \sigma)$ κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ είναι ανοικτό.
Για κάθε $m \neq n$ έχουμε $\sigma(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \underset{\text{Άσκηση}}{\geq} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$



Αν πάρουμε $0 < \varepsilon < \frac{1}{n(n+1)}$, τότε

$B_\sigma(n, \varepsilon) = \{n\}$ ↳ σ-ανοικτό

Άρα, κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι σ-ανοικτό και σ-κλειστό.
(γ) Έχουμε $d \sim \sigma$, γιατί οι $(\mathbb{N}, d)$ και $(\mathbb{N}, \sigma)$ έχουν τα ίδια ανοικτά και κλειστά σύνολα (ΟΛΑ ΤΑ $A \subseteq \mathbb{N}$).
Άρα, η $I: (\mathbb{N}, d) \to (\mathbb{N}, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός

(10) Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο. ο X είναι πλήρης $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ κάθε αριθμήσιμο <u>κλειστό</u> $A \subseteq X$ είναι πλήρης μ.υπόχωρος

<u>Λύση</u>: $(\Rightarrow)$ X πλήρης + A κλειστό $\subseteq X \Rightarrow (A, d_A)$ πλήρης
(γνωστή πρόταση)

$(\Leftarrow)$ Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.
Θεωρούμε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το A είναι αριθμήσιμο.
<u>1η περίπτωση</u>: A κλειστό
Τότε ο (A, d_A) είναι πλήρης και $x_n \in A$.
Άρα, η (x_n) είναι βασική στον $(A, d_A) \Rightarrow x_n \to x \in A$
<u>2η περίπτωση</u>: A όχι κλειστό
$\left.\begin{array}{l}\bar{A} = A \cup A' \\ \text{και } A \subsetneq \bar{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A' \neq \emptyset$. Τότε το A έχει σ.σ.

30/11/21

Άσκηση 10

<u>Ν.δ.ο. ο (X,d) είναι πλήρης, ανν κάθε αριθμήσιμο κλειστό $A \subseteq X$ είναι πλήρης μ. υπόχωρος.</u>

<u>Λύση</u>: ($\Longrightarrow$) Κλειστό υποσύνολο μ.χ. είναι πάντα πλήρης μ.χ. (με τη σχετική μετρική/θεωρία)

($\Longleftarrow$) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.

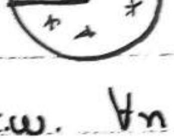
Ορίζουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δεν ξέρουμε ότι το A είναι κλειστό.

• Αν το A είναι κλειστό, τότε από την υπόθεση ο (A, d_A) είναι πλήρης και η (x_n) είναι βασική στο A.
Άρα $\exists x \in A$ τω. $x_n \xrightarrow{d_A} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$

• Αν το A <u>δεν</u> είναι κλειστό, από την $\bar{A} = A \cup A'$ έχουμε ότι: $\exists x \in A'$ (γιατί $A \subsetneq \bar{A}$). Θ.δ.ο. $x_n \to x$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) τω. $x_{k_n} \to x$.

Για $\varepsilon = 1$, το $A \cap B(x,1) =$ άπειρο $\Longrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : x_{k_1} \in B(x,1)$ $\Longrightarrow d(x_{k_1}, x) < 1$. Για $\varepsilon = 1/2$ το $A \cap B(x, 1/2) =$ άπειρο $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ στην $B(x, 1/2)$ υπάρχουν άπειροι $x_n \Longrightarrow \exists k_2 > k_1$ τω. $x_{k_2} \in B(x, 1/2) \Longrightarrow d(x_{k_2}, x) < 1/2$.



Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ τω. $\forall n$ $d(x_{k_n}, x) < 1/n$. Τότε $x_{k_n} \to x$.

Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x, έπεται ότι $x_n \to x$.

Ασκήσεις

(α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία, $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.
Αν $A' \neq \emptyset$, τότε η (x_n) συγκλίνει.

[Παίρναμε $x\in A'$ και από τον ισχυρισμό βρίσκαμε ότι $\overbrace{x_{k_n}\to x \Rightarrow}\ x_n\to x$]

(β) Έστω (x_n) βασική ακολουθία και $A=\{x_k : n\in\mathbb{N}\}$.
Ν.δ.ο. το A έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης.

[Έστω $x,y\in A'$. Όπως πριν βρίσκαμε $x_{k_n}\to x \Rightarrow x_n\to x$.
Ομοίως, $\exists\, x_{\lambda_n}\to y \Rightarrow x_n\to y$. Άρα $x=y$]

Πλήρωση Μετρικού Χώρου

Χώρος Banach είναι ένας χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς την μετρική $d(x,y)=\|x-y\|$ που επάγεται από τη νόρμα.

(*) Οι ℓ_p, $1\le p\le\infty$ / $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρεις.
Ο $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $1\le p<\infty$ $\left[\ \|f\|_p=\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\ \right]$
δεν είναι πλήρης.

Έστω Γ μη κενό σύνολο. Ο χώρος $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων $f:\Gamma\to\mathbb{R}$.
(Αν $\Gamma=\mathbb{N}$, τότε $\ell_\infty(\mathbb{N})=$ οι φραγμένες ακολουθίες $=\ell_\infty$).

Ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι δ.χ.: αν $f,g:\Gamma\to\mathbb{R}$ φραγμένες και $a\in\mathbb{R}$.
ορίζαμε:

$(f+g)(\gamma) \overset{\text{ορσ}}{=} f(\gamma) + g(\gamma)$

$(af)(\gamma) \overset{\text{ορσ}}{=} a f(\gamma)$

Οι $f+g$, af είναι φραγμένες, δηλ. στον $\ell_\infty(\Gamma)$ και ικανοποιούνται τα αξιώματα του δ.χ.

Η νόρμα στον $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma\in\Gamma\} < \infty$

<u>Πρόταση</u>

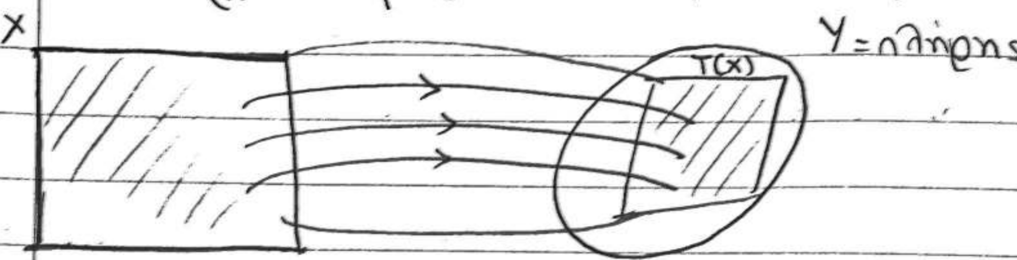
Ο $(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης (χώρος Banach)

<u>Απόδειξη</u>: <u>Έστω $\varepsilon>0$</u>. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0$ $\|f(n)-f(m)\|\leq\varepsilon$
$\Rightarrow \forall n,m\geq n_0$ και $\forall \gamma\in\Gamma$ $|f_n(\gamma)-f_m(\gamma)|\leq \|f_n-f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ (*)
Σταθεροποιούμε $\gamma\in\Gamma$. Για τυχόν $\varepsilon>0$ βρίσκουμε n_0 (ίδια $\forall\gamma\in\Gamma$) τ.ω. $\forall n,m\geq n_0$ $|f_n(\gamma)-f_m(\gamma)|\leq\varepsilon$. Άρα, η $(f_n(\gamma))$ βασική στο $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\gamma)\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $f(\gamma)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\gamma)$.

Έτσι έχουμε ορίσει $f:\Gamma\to\mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $f\in\ell_\infty(\Gamma)$ (είναι φραγμένη) και ότι $\|f_n-f\|_\infty \to 0$, δηλ. $f_n\to f$ στον $\ell_\infty(\Gamma)$.
Επιστρέφουμε στην (*). Για τυχόν $\varepsilon>0$ βρίσκουμε $\forall\gamma\in\Gamma$ $\forall n,m\geq n_0$ $|f_n(\gamma)-f_m(\gamma)|\leq\varepsilon$. Για σταθερό $n\geq n_0$ αφήνουμε $m\to+\infty$. Τότε

$|f_n(\gamma)-f(\gamma)|\leq\varepsilon$. , δηλ. $\forall n\geq n_0$ <u>$\forall\gamma\in\Gamma$</u> $|f_n(\gamma)-f(\gamma)|\leq\varepsilon$
$\Rightarrow \forall n\geq n_0$ $\sup\{|f_n(\gamma)-f(\gamma)| : \gamma\in\Gamma\}\leq\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_0$ $\|f_n-f\|_\infty\leq\varepsilon$
Άρα, $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.
Τέλος, $f = \underset{\ell_\infty(\Gamma)}{\underset{\cap}{f_n}} - (\underset{\ell_\infty(\Gamma)}{\underset{\cap}{f_n - f}}) \in \ell_\infty(\Gamma)$, γιατί ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι δ.χ. για $n\geq n_0$, αφού $\|f_n-f\|\leq\varepsilon$

<u>Ορισμός</u> (πλήρωση μ.χ.): Έστω (X, d) μ.χ.
Ένας μ.χ. (Y, σ) λέγεται <u>πλήρωση</u> του (X, d), αν
(i) ο (Y, σ) είναι πλήρης
(ii) υπάρχει ισομετρία $T : (X, d) \to (Y, \sigma)$ τ.ω. $\overline{T(X)} = Y$.



Επιπλέον, ο $T(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του Y
"ο X είναι πυκνός υπόχωρος του πλήρους μ.χ. Y"

<u>Θεώρημα</u>

Κάθε μ.χ. (X, d) έχει πλήρωση

Τυπικό παράδειγμα: Μια πλήρωση του $\mathbb{Q}$ είναι το $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>: Θα ορίσουμε ισομετρία: $T : (X, d) \to (\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$
πλήρης
Πως ορίζεται το $T(x)$: θα είναι μια φραγμένη συνάρτηση $f_x : X \to \mathbb{R}$ (*). Θεωρούμε την $f_x(t) = d(t,x) - d(t,a)$

$f : X \to \mathbb{R}$ φραγμένη (για στοιχ. του $\ell_\infty(X)$)

$|f_x(t) - f_y(t)| = |d(t,x) - d(t,y)| \le d(x,y) \ \forall t \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_x - f_y\|_\infty = \sup |f_x(t) - f_y(t)| \le d(x,y)$
Επίσης, $\|f_x - f_y\|_\infty \ge |f_x(x) - f_y(x)| = d(x,y)$

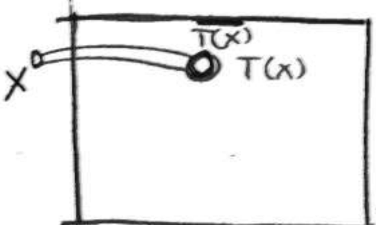
(*) Σταθεροποιούμε $a \in X$.
Η f_x είναι φραγμένη: $\forall t \in X \quad |f_x(t)| = |d(t,x) - d(t,a)| \le d(x,a)$
$\Rightarrow \|f_x\|_\infty = \sup\{|f_x(t)| : t \in X\} \le d(x,a) < \infty$

Παρατήρηση: Ορίζουμε $T(x) = f_x$. Δ.ο. η T είναι ισομετρία.

- $\forall t \in X$ έχουμε $|f_x(t) - f_y(t)| = |d(t,x) - \cancel{d(t,a)} - d(t,y) + \cancel{d(t,a)}| \leq d(x,y)$. Άρα, $\| f_x(t) - f_y(t) \|_\infty = \sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in X\} \leq d(x,y)$

<u>Δηλ.</u> $\| T(x) - T(y) \| \leq d(x,y)$

- Επίσης, $\| T(x) - T(y) \|_\infty = \| f_x - f_y \|_\infty \geq |f_x(x) - f_y(x)| =$
$= |\underbrace{d(x,x)}_{\to 0} - \cancel{d(x,a)} - d(x,y) + \cancel{d(x,a)}| = d(x,y)$.



Ορίζουμε $Y = \overline{T(X)}^{\|\cdot\|_\infty}$ την κλειστή θήκη του $T(X)$ στον $\ell_\infty(X)$.

- Ο $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης ως κλειστό $\ell_\infty(X)$ υποσύνολο του πλήρους $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$.
- Από την κατασκευή, ο $T(X)$ είναι πυκνό $\subseteq Y$ (ορίζουμε $Y = \overline{T(X)}$).

$\boxed{\text{Άρα ο } (Y, \|\cdot\|_\infty) \text{ είναι μια πλήρωση του } (X,d)}$

<u>Θεώρημα</u> (Μοναδικότητα της Πλήρωσης)

Έστω (X,d) μ.χ. Αν (Y_1, σ_1) και (Y_2, σ_2) είναι δύο πληρώσεις του (X,d), τότε υπάρχει $T : (Y_1, \sigma_1) \to (Y_2, \sigma_2)$ ισομετρία και επί (ισομετρικός ισομορφισμός).
(Δηλ. οι Y_1 και Y_2 "ταυτίζονται" ως μ.χ.)

<u>Θεώρημα σταθερού σημείου (Banach)</u>

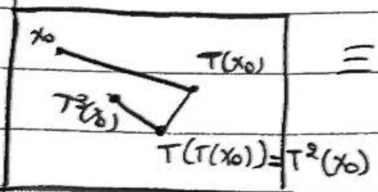
Μια απεικόνιση $T : (X,d) \to (X,d)$ λέγεται <u>γνήσια συστολή</u>, αν $\exists\ 0 < a < 1$ τ.ω. $\forall x, y \in X$ $d(T(x), T(y)) \leq a\, d(x,y)$.

Θεώρημα

Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $T: X \to X$ γνήσια συστολή (με σταθερά $0<a<1$). Τότε $\exists!\ x\in X$ τ.ω. $T(x)=x$ (σταθ. σημείο)

Απόδειξη: Μοναδικότητα: Έστω $x \neq y$ τ.ω. $T(x)=x$ & $T(y)=y$.
Τότε $0<d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq a\, d(x,y) \Rightarrow 1 \leq a$ άτοπο

X



Ξεκινάμε με τυχόν $x_0 \in X$ και ορίζουμε

$$x_1 = T(x_0)$$
$$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$$

όπου $T^n = \underbrace{T\circ T\circ \ldots \circ T}_{n\text{-φορές}}$

Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n = x_{n-1}$, τότε $T(x_{n-1}) = x_{n-1}$
$\Rightarrow x_{n-1}$ σταθερό σημείο του T και έχουμε τελειώσει.

Ισχυρισμός: Η (x_n) είναι βασική

Απόδειξη: Έστω $n>m$. Τότε $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1}) + d(x_{n-1},x_{n-2})$
$+ \ldots + d(x_{m+1},x_m) = d(T^n(x_0),T^{n-1}(x_0)) + \ldots + d(T^{m+1}(x_0),T^m(x_0))$

$$\boxed{\text{Δ.ο. } d(T^{k+1}(x_0),T^k(x_0)) \leq a\, d(T^k(x_0),T^{k-1}(x_0)) \leq a^2 d(T^{k-1}(x_0),T^{k-2}(x_0)) \leq \ldots \leq a^k d(\underbrace{x_1}_{=T(x_0)},x_0)}$$

$$\leq a^{n-1} d(x_1,x_0) + \ldots + a^m d(x_1,x_0) = d(x_1,x_0)\sum_{k=m}^{n-1} a^k \leq$$

$$\leq d(x_1,x_0)\sum_{k=m}^{\infty} a^k = d(x_1,x_0)\frac{a^m}{1-a}$$

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $d(x_1,x_0)\dfrac{a^{n_0}}{1-a} < \varepsilon$ (γιατί $a^n \to 0$)
και τότε $\forall n,m \geq n_0$ $d(x_n,x_m) \leq d(x_1,x_0)\dfrac{a^m}{1-a}$

Παραδείγματα

(α) $X=(0,1)$ με τη συνήθη μετρική

Η $f:(0,1)\to(0,1)$ με $f(x)=\frac{x}{2}$ <u>δεν</u> έχει σταθερό σημείο.

και είναι γνήσια συστολή: $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|\leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{a\in(0,1)}|x-y|$

Το πρόβλημα είναι ότι ο $((0,1),|\cdot|)$ <u>δεν</u> είναι πλήρης μ.χ., γιατί το $(0,1)$ <u>δεν</u> είναι κλειστό $\subseteq\mathbb{R}$.

(β) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης) με $f(x)=\ln(1+e^x)$ <u>δεν</u> έχει σταθερό σημείο: $f(x)=x\Rightarrow \ln(1+e^x)=x\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+e^x=e^x\Rightarrow 1=0$, <u>άτοπο</u>

<u>Όμως</u>, $0<f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}<1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Από το Θ.Μ.Τ. αν $x<y$ στο $\mathbb{R}$ τότε $\exists\xi\in(x,y)$ τ.ω.

$|f(y)-f(x)|=\underbrace{|f'(\xi)|}_{<1}|y-x|<|y-x|$, δηλ. η $|f(x)-f(y)|<|x-y|$

<u>Δεν</u> φτάνει για να εξασφαλίσει σταθερό σημείο.

Χρειαζόμαστε την $|f(x)-f(y)|\leq a|x-y|$, όπου $0<a<1$

που είναι ισχυρότερη

Ασκήσεις

(20) Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. και $f,g:X\to X$. Ν.δ.ο.

(α) Αν $\exists k\in\mathbb{N}$ τ.ω. η $f^k=f\circ\dots\circ f$ να είναι γνήσια συστολή τότε $\exists!\,x\in X$ τ.ω. $f(x)=x$.

(β) Αν η f είναι γνήσια συστολή και $f\circ g=g\circ f$, τότε $\exists!\,x\in X$ τ.ω. $f(x)=x=g(x)$.

Λύση: (a) Η f^k είναι συστολή (γνήσια), άρα $\exists! x\in X$ τ.ω. $f^k(x)=x$.

τ.ω. $|f^k(f(x)) - f^k(x)| \leq a\,|f(x)-x|$

$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(x)$, $f^k(x) = x$

Τότε, $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(\underbrace{f^k(x)}_{x}) = \underline{\underline{f(x)}}$

Άρα, το $f(x)$ είναι σταθερό σημείο της f^k και από μοναδικότητα $f(x)=x$.

Αν $f(y)=y$, τότε $f^2(y)=f(y)=y$ και τελικά $f^k(y)=y \Rightarrow y=x$ από μοναδικότητα.

(β) Ξέρουμε ότι $\exists!\, x\in X$ τ.ω. $f(x)=x$ και μένει ν.δ.ο. $g(x)=x$.

Έχουμε $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$

Άρα, το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f και από μοναδικότητα $g(x)=x$.

(13) Έστω d μετρική στο $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(a) η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική

(β) ο $(\mathbb{R},d)$ είναι πλήρης.

Ν.δ.ο. $\exists\, \delta>0$ τ.ω. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\operatorname{diam}_d([n,+\infty)) \geq \delta$.

Λύση: Ορίζουμε $a_n = \operatorname{diam}_d([n,+\infty))$.

Η (a_n) είναι φθίνουσα και ≥ 0 $[n,+\infty) \supseteq [n+1,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{diam}_d([n,+\infty)) \geq \operatorname{diam}_d([n+1,+\infty))$.

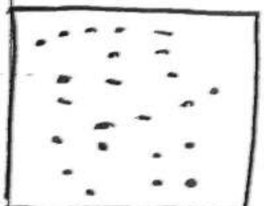
Άρα, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq 0$. Ζητάμε $\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}_{\delta} > 0$, γιατί τότε

$\forall n$ $a_n \geq \lim a_n = \delta$.

Υποθέτουμε ότι $a_n \to 0 \iff \operatorname{diam}_d([n,+\infty)) \longrightarrow 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

• Ο $(\mathbb{R},d)$ είναι πλήρης, η $F_n=[n,+\infty)$ είναι φθίνουσα
κάθε F_n είναι $|\cdot|$-κλειστό $\Rightarrow$ κάθε F_n είναι d-κλειστό
γιατί $d \sim |\cdot|$ και $\operatorname{diam}_d(F_n) \to 0$.
Από το Θ. Cantor για τον $(\mathbb{R},d)$ παίρνουμε
$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n,+\infty)$ <u>άτοπο</u> (γιατί $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n,+\infty) = \emptyset$).

(17) Έστω $X=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ και d μετρική στο X τ.ω. ο (X,d) να είναι πλήρης. Ν.δ.ο. ο (X,d) έχει τουλάχιστον ένα μεμονωμένο σημείο.



<u>Λύση</u>: • Έστω ότι κάθε σημείο συσσώρευσης του X
• Ορίζουμε $V_n = X\setminus\{x_n\}$. Τότε το V_n είναι <u>ανοικτό</u> (γιατί το μονοσύνολο $\{x_n\}$ είναι κλειστό) και πυκνό: $x_n \in \overline{V_n}$, γιατί x_n σ.σ. του X, άρα σε κάθε $B(x_n,\varepsilon)$ $\exists\, x \neq x_n$, δηλ. $B(x_n,\varepsilon)\cap V_n \neq \emptyset$
$x \in V_n$

Επειδή $V_n \subseteq \overline{V_n}$
Άρα, $\overline{V_n} \supseteq V_n \cup \{x_n\} = X$

• Αφού ο (X,d) είναι πλήρης, από το Θ. Baire (το 1)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (X\setminus\{x_n\}) \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} \neq \emptyset$$
$\Rightarrow X\setminus X \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq \emptyset$, <u>άτοπο</u>

<u>Άσκηση</u>
Σε κάθε (X,d)
① x σ.σ. του $X \Leftrightarrow X\setminus\{x\}$ ανοικτό και πυκνό
② x μεμονωμένο σημείο του $X \Rightarrow \forall D\subseteq X$ πυκνό ισχύει $x\in D$.

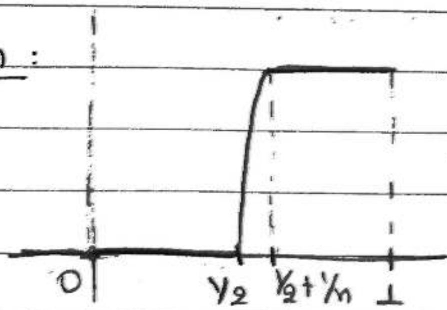
2/12/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίου 5)

(9) Θεωρούμε τον $C[0,1]$ με μετρική την
$$d(f,g) = \|f-g\|_1 = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt.$$

Ν.α.ο. ο $(C[0,1], d)$ δεν είναι πλήρης.

Λύση:



$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ n\left(t-\frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}+\frac{1}{n},\ n \ge 3 \\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

Όλες οι f_n είναι συνεχείς.

• Η (f_n) είναι βασική στον $C[0,1]$

Έστω $m>n$. Τότε $\|f_m - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|\,dt$

$f_m = f_n = 0$ στο $[0, 1/2]$, $f_m = f_n = 1$ στο $[1/2, 1/2+1/n]$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \underbrace{|f_m(t) - f_n(t)|}_{\le 1}\,dt \le 1 \cdot \frac{1}{n}$$

$0 \le f_m, f_n \le 1 \Downarrow |f_m - f_n| \le 1$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Για $m > n \ge n_0$,

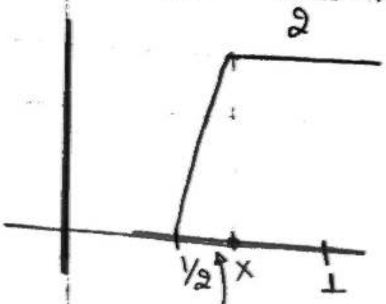
$$\|f_m - f_n\|_1 \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

• Υποθέτουμε ότι $\exists f \in C[0,1]$ τ.ω. $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

(*) $$\int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \int_0^1 |\cancel{f_n}(t) - f(t)|\,dt = \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$$

Άρα, $\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt = 0 \xRightarrow[\text{συνεχής}]{|f| \ge 0} |f(t)| = 0\ \ \forall t \in [0, 1/2] \Rightarrow f(t) = 0\ \ \forall t \in [0, 1/2]$

(β) Έστω $\frac{1}{2} < x < 1$. Υπάρχει n_0 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{n_0} < x \Rightarrow$



$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \Rightarrow f_n = 1$ στο $[x,1]$

Άρα $0 \leq \int_x^1 |1 - f(t)|\,dt = \int_x^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq$

$1/2 + 1/n < x$ $\qquad \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt = \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$

Άρα $\int_x^1 |1 - f(t)|\,dt = 0$

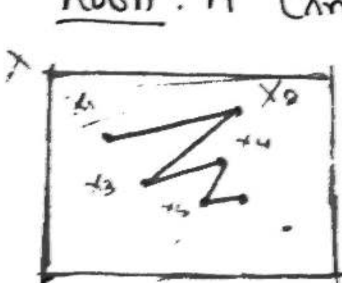
$\Downarrow$ όπως πριν

$f(t) = 1 \ \forall t \in [x,1]$ και ειδικότερα $\boxed{f(x)=1}$

Τώρα $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 1/2^-} f(t) = 0 \\ \\ \lim\limits_{t \to 1/2^+} f(t) = 1 \end{array}\right\}$ <u>άτοπο</u>, διότι f συνεχής.

(11) Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο. ο X είναι πλήρης ανν κάθε ακολουθία (x_n) φραγμένης κύμανσης στον X είναι συγκλίνουσα.

<u>Λύση</u>: Η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, αν $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$.



($\Rightarrow$) Έχουμε δει ότι αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση, <u>τότε είναι βασική</u>. Άρα ο X είναι πλήρης η (x_n) συγκλίνει.

[Αν $m > n$, τότε $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) = \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$
$\leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \longrightarrow 0$]

($\Leftarrow$) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Έχουμε δει ότι εφαρμόζοντας τον ορισμό της βασικής ακολουθίας με $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ έτσι ώστε $d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$

Η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση, οπότε από την υπόθεση $\exists x \in X$ τ.ω. $x_{k_n} \to x$. Αφού η (x_n) είναι βασική και $x_{k_n} \to x$ $\Longrightarrow x_n \to x$.

Βασικό Θεώρημα (Κεφ. 2)

Αν η (x_n) είναι βασική και έχει υπακολουθία (x_{k_n}) τ.ω. $x_{k_n} \to x \in X$, τότε $x_n \to x$

$$\boxed{d(x_n, x) \le \underbrace{d(x_n, x_{k_n})}_{k_n > n \,+\, (x_n) \text{ βασική}} + \underbrace{d(x_{k_n}, x)}_{0} < \varepsilon}$$

(14) Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και $\hat{B}(x_n, r_n)$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες.

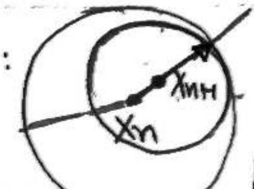
Ν.δ.ο. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

Π.χ. Στον $((0,1), |\cdot|)$ $\Big\downarrow$ $\hat{B}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

και $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$ απαραίτητη η πληρότητα.

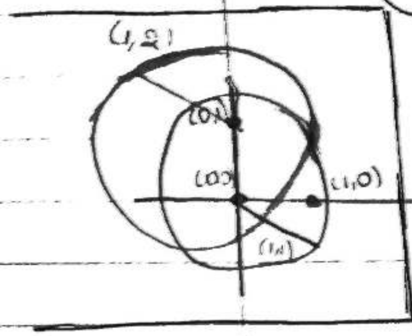
Αν ο X δεν είναι πλήρης δεν ισχύει

Αν αφαιρέσω την υπόθεση ότι ο X είναι <u>χώρος με νόρμα</u> τότε <u>δεν</u> ισχύει (Άσκηση 30).

<u>Λύση</u>: 

Αν $x_n = x_{n+1}$, τότε $\hat{B}(x_n, r_n) \supseteq \hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$, $x_{n+1} = x_n$ $\Rightarrow$ $r_n \geq r_{n+1}$

Αν $x_n \neq x_{n+1}$, τότε θεωρούμε το



$$y = x_{n+1} + r_{n+1} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|}.$$ Τότε:

- $\|y - x_{n+1}\| = \left\| r_{n+1} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} \right\| = \frac{r_{n+1}}{\cancel{\|x_{n+1} - x_n\|}} \cdot \cancel{\|x_{n+1} - x_n\|}$

$\Rightarrow y \in \hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$

- Άρα $y \in \hat{B}(x_n, r_n)$. Τότε $\|y - x_n\| \leq r_n$

Όμως, $\|y - x_n\| = \left\| x_{n+1} + r_{n+1} \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} - x_n \right\| =$

$= \left\| \left(1 + \frac{r_{n+1}}{\|x_{n+1} - x_n\|}\right) (x_{n+1} - x_n) \right\| = \left(1 + \frac{r_{n+1}}{\|x_{n+1} - x_n\|}\right) \|x_{n+1} - x_n\| =$

$= \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1}$

<u>Άρα</u>: $\|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leq r_n \Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$.

<u>Συνέπεις</u>: (α) $r_n \geq r_{n+1}$, δηλ. $(r_n) \downarrow \Rightarrow$ συγκλίνει $\Rightarrow$ βασική

(β) $\forall m > n$ $\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq$

$\leq (r_{m-1} - r_m) + \dots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m \xRightarrow[\text{βασική}]{(r_n)} (x_n)$ βασική

Αφού ο X είναι πλήρης, $x_n \to x \in X$. Θ.δ.ο. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$

- <u>Έστω $n \in \mathbb{N}$</u>: $\forall k \geq n$ έχουμε $x_k \in \hat{B}(x_k, r_k) \subseteq \hat{B}(x_n, r_n)$ = κλειστό σύνολο

Η $(x_k)_{k \geq n}^{\infty}$ συγκλίνει στο $x \Rightarrow x \in \hat{B}(x_n, r_n)$

(15) (X,d) πλήρης, $f: X \to Y$.

Ν.δ.ο. αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\subseteq X$ με $\operatorname{diam}(E_n) \to 0$, τότε $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$

<u>Λύση</u>: · Από το Θ. Cantor, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$ (μονοσύνολο)

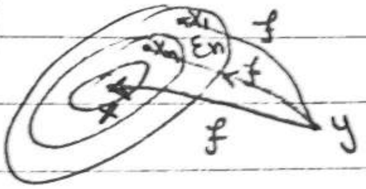
Άρα ζητάμε $f(\{x\}) = \{f(x)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ [και $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \in E_n$]

· $E \subseteq E_n \ \forall n \implies f(E) \subseteq f(E_n) \ \forall n \implies f(E) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$

· Για το "$\supseteq$" παίρναμε y: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ y \in f(E_n)}$ και

θ.δ.ο. $y \in f(E) = \{f(x)\}$, δηλ. $\boxed{y = f(x)}$

Αφού $y \in f(E_n)$ $\exists x_n \in E_n$ τω. $y = f(x_n)$



(*) $\forall n$, $x, x_n \in E_n \implies d(x_n, x) \leq \operatorname{diam}(E_n) \to 0$

Άρα $x_n \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, $\underset{\overset{\|}{y}}{f(x_n)} \to f(x)$. Έπεται ότι $y = f(x)$.

(16) (X,d) πλήρης μ.χ., G ανοικτό, μη-κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Ορίζουμε $\sigma(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X\setminus G)} - \frac{1}{d(y, X\setminus G)} \right|$ στο $G \times G$

Ν.α.ο. η σ είναι μετρική και ο (G,σ) είναι πλήρης.

<u>Λύση</u>: Έστω (x_n) σ-βασική στο G.

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\forall n,m \geq n_0$

$\sigma(x_n, x_m) < \varepsilon \implies \forall n,m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ <u>και</u>

$\left| \frac{1}{d(x, X\setminus G)} - \frac{1}{d(y, X\setminus G)} \right| < \varepsilon$

① Η (x_n) είναι d-βασική στον X και ο X είναι πλήρης, άρα $x_n \xrightarrow{d} x \in X$.

② Θ.δ.ο. $x \in G$. Τότε $d(x_n, X \setminus G) \to d(x, X \setminus G) > 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \text{η } f(z) = d(z, X \setminus G) \\ \text{είναι συνεχής} \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{1}{d(x_n, X \setminus G)} - \frac{1}{d(x, X \setminus G)} \right| \to 0$$

Προσθέτοντας, $\sigma(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{\sigma} x$.

Μένει ν.δο. $x \in G$: Έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n, m \geq 0$

$$\left| \frac{1}{d(x_n, X \setminus G)} - \frac{1}{d(x_m, X \setminus G)} \right| < \varepsilon \Rightarrow \text{η } \frac{1}{d(x_n, X \setminus G)} \text{ είναι βασική στο } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{d(x_n, X \setminus G)} \leq M. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ d(x, X \setminus G)}}{d(x_n, X \setminus G)} \geq \frac{1}{M}$$

Άρα, $d(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{M} > 0 \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow x \in G$.

(25) <u>Σωστό ή λάθος</u> (1) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $F_m = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq m\} = f^{-1}([-m, m])$ τότε τουλάχιστον ένα F_m περιέχει διάστημα.

<u>Απάντηση</u>: Έστω $x \in \mathbb{R}$. $\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|f(x)| \leq m \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists m : x \in F_m \Rightarrow x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. <u>Δηλ.</u> $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$

Αλλιώς, $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}([-m, m]) = f^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [-m, m]\right) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

✓ ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης

(2) Κάθε F_n είναι κλειστό ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού συνόλου $[-m,m]$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης f.

Απάντηση: Από Baire, $\exists n \in \mathbb{N}$ $F_n^\circ \neq \phi \Rightarrow \exists$ διάστημα $(a,b) \subseteq F_n$

(29) (X,d) πλήρης, $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς.
Ν.δ.ο. είτε $\exists x_0 \in X$ τω. $f_n(x_0) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
ή υπάρχουν $\phi \neq G \subseteq X$ ανοικτό και $k \in \mathbb{N}$ τω. $f_k(x) = 0$ $\forall x \in G$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι "$\forall x \in X$ $\exists n \in \mathbb{N}$ τω. $f_n(x) = 0$",
δηλ. "$\forall x \in X$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $x \in Z(f_n) = \{x : f_n(x) = 0\}$" $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\boxed{X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(f_n)}$

Κάθε $Z(f_n) = f_n^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό σύνολο και ο X είναι πλήρης. Από το Θ. Baire $\exists k \in \mathbb{N}$ $Z(f_k)^\circ \neq \phi$.
Άρα $\exists \phi \neq G \subseteq Z(f_k)$ ανοικτό. $\forall x \in G$ έχουμε $x \in Z(f_k)$ δηλ. $f_k(x) = 0$

(28) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής και επί, με την ιδιότητα
"$\forall x,y \in X$ $d(x,y) \leq \sigma(f(x), f(y))$"
Σωστό ή λάθος : (α) X πλήρης $\Rightarrow$ Y πλήρης
(β) Y πλήρης $\Rightarrow$ X πλήρης

Λύση: (α) Σωστό : Έστω (y_n) βασική στον Y.
Η f είναι επί, άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in X$: $f(x_n) = y_n$.
Τότε $d(x_n, x_m) \leq \sigma(f(x_n), f(x_m)) = \sigma(y_n, y_m)$ και αφού η (y_n) είναι βασική είναι επίσης βασική.
Αφού X είναι πλήρης, $x_n \to x \in X$. Η f είναι συνεχής, άρα $y_n = f(x_n) \to f(x)$, δηλ. η (y_n) συγκλίνει.

(β) <u>Λάθος</u>: $X=(\mathbb{R},d)$, $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$
$Y=(\mathbb{R},|\cdot|)$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$.
↳ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΗΣ

• $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|=\frac{1}{1+\xi^2}\,|x-y|\le|x-y|$

↳ για κάποιο ξ ανάμεσα στα x και y.

• Αν $x_n\xrightarrow{d}x \Rightarrow \arctan x_n\to\arctan x \xrightarrow[\text{συνεχής}]{\tan} x_n\xrightarrow{|\cdot|}x$
Άρα η f είναι συνεχής.

<u>Άσκηση 4.23</u>

(X,d) μ.χ. , $f:X\to X$ συνεχής τω. $f\circ f=f$.
Ν.δ.ο. $f(X)$ είναι κλειστό.

<u>Λύση</u>: Έστω $y_n\in f(X)$ και έστω ότι $y_n\to y\in X$.
$\exists\, x_n\in X$ τω. $y_n=f(x_n)$.
Αφού $y_n\to y$, έχουμε $f(y_n)\to f(y)$ (η f είναι συνεχής)
$\Rightarrow f(f(x_n))\to f(y)$. Άρα $\left.\begin{matrix} y_n\to f(y) \\ \text{και} \\ y_n\to y\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=f(y)\in f(X)$
$\underbrace{(f\circ f)(x_n)}_{}=f(x_n)=y_n$

<u>Άσκηση 4.26</u>

(X,d) μ.χ., $f:X\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. <u>Σωστό ή λάθος</u>
(α) f,g ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow g\circ f$ ομ. συνεχής
(β) f ομ. συνεχής + φραγμένη, g συνεχής $\Rightarrow g\circ f$ ομ. συνεχής
(γ) f συνεχής + φραγμένη, g ομ. συνεχής $\Rightarrow g\circ f$ ομ. συνεχής.

Λύση: (α) Σωστό: Ισχύει γενικά.
Έστω $(x_n), (y_n)$ στον X με $d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow$
$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\underset{\text{συνεχής}}{\overset{f \text{ ομ.}}{\Longrightarrow}} |\underbrace{f(x_n)}_{u_n} - \underbrace{f(y_n)}_{v_n}| \to 0 \underset{\text{συνεχής}}{\overset{g \text{ ομ.}}{\Longrightarrow}} |g(f(x_n)) - g(f(y_n))| \to 0$

$\Rightarrow |(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(y_n)| \to 0$.
Από χαρακτηρισμό μέσω ακολουθιών η $g \circ f$ είναι ομ. συνεχής.
(β) Σωστό: Η f είναι φραγμένη, δηλ. $\exists M > 0$ τω
$\forall x \in X$ $|f(x)| \leq M$. Άρα $f(X) \subseteq [-M, M]$.
Η g είναι συνεχής, άρα η $h = g|_{[-M,M]}$ είναι ομ. συνεχής.

Τέλος: $g \circ f = \underbrace{h}_{\text{ομ. συνεχής}} \circ \underbrace{f}_{\text{ομ. συνεχής}} =$ ομ. συνεχής από το (α).

(γ) Αν ισχυει, τότε για την $g(x) = x$ που είναι ομ. συνεχής θα έχουμε: "Αν $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής & φραγμένη, τότε f ομ. συνεχής". Αυτό δεν ισχυει π.χ. για $X = \mathbb{R}$ η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη, αλλά όχι ομ.συνεχής.
Άρα Λάθος.

Άσκηση 4.36

(X, d) μ.χ. Ν.δο. τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) $d \sim \delta$
(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον (X, d) είναι τελικά σταθερή
(γ) ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
(δ) $\forall (Y, \sigma)$ κάθε $f: X \to Y$ είναι συνεχής.

Λύση: (α) ⇒ (β) Έστω $x_n \xrightarrow{d} x$. Αφού $d \sim \delta$ έχουμε $x_n \xrightarrow{\delta} x$
⇒ (x_n) τελικά σταθερή & ίση με x)
(για $\varepsilon = 1/2$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $\delta(x_n, x) < 1/2 \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n = x$).

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω x σ.σ. του X. $\exists\, x_n \to x$ τ.ω. $\forall n$ $x_n \neq x$.
Από την υπόθεση, η (x_n) τελικά σταθερή και ίση με x (αφού η $x_n \to x$) <u>άτοπο</u>.

(γ) $\Rightarrow$ (δ) Κάθε $x \in X$ είναι μεμονωμένο σημείο του X, άρα $\exists\, \delta_x > 0$ τ.ω. $B(x, \delta_x) \cap X = \{x\}$.
Αν $f : X \to Y$ οποιαδήποτε και $\varepsilon > 0$ $\forall y \in B(x, \delta_x)$ έχουμε $y = x \Rightarrow \sigma(f(y), f(x)) = 0 < \varepsilon$.
Δηλ. η f είναι συνεχής στο x.

(δ) $\Rightarrow$ (α) Η $f : (X, d) \to (X, \delta)$ με $f(x) = x$ είναι <u>συνεχής</u>.
Η $f^{-1} : (X, \delta) \to (X, d)$, $f^{-1}(x) = x$ είναι επίσης συνεχής, γιατί όλα τα $x \in X$ είναι μεμονωμένα ως προς την δ. (είδαμε ότι (γ) $\Rightarrow$ (δ)).
Αφού οι f, f^{-1} είναι συνεχείς, έχουμε $d \sim \delta$.

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

7/12/21

Παράδειγμα

X άπειρο σύνολο, δ η διακριτή μετρική στον X.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) στον (X,δ) τ.ω. $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m \Rightarrow \delta(x_n, x_m) = 1$. Τότε η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

- Αν υπήρχε, θα ήταν τελικά σταθερή.
- Ο (X,δ) είναι φραγμένος, άρα η (x_n) είναι επιπλέον φραγμένη.

<u>Ορισμός</u> (ακολουθιακή συμπάγεια): Ένας μ.χ. (X,d) λέγεται <u>ακολουθιακά συμπαγής</u>, αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

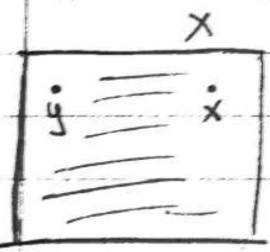
Ορισμός: Έστω $A \subseteq (X,d)$. Μια οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται κάλυμμα για το A, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.
Αν $(U_i)_{i\in I}$ είναι κάλυμμα για το A, μια υποοικογένεια $(U_i)_{i\in J}$, όπου $J \subseteq I$ της $(U_i)_{i\in I}$ λέγεται υποκάλυμμα για το A, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$

Ορισμός: Ένα κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ λέγεται ανοικτό, αν όλα τα U_i είναι ανοικτά υποσύνολα του X.

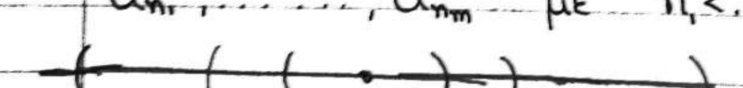
Παραδείγματα

(1) Κάθε (X,d) έχει τουλάχιστον ένα ανοικτό κάλυμμα, το $\{X\}$. Αλλά: $\forall x \in X$ το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό και η $(X\setminus\{x\})_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, αν το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

X



(2) $X = \mathbb{R}$. Ορίζουμε $U_n = (-n,n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Έχουμε $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n,n)$, δηλ. η $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάλυμμα του $\mathbb{R}$. Αν κρατήσουμε πεπερασμένο το πλήθος
$U_{n_1}, \dots, U_{n_m}$ με $n_1 < \dots < n_m$



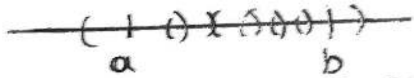
τότε $U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_m} = U_{n_m} = (-n_m, n_m) \neq \mathbb{R}$

Δηλ. το κάλυμμα $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(ε') X άπειρο σύνολο με τη διακριτή μετρική.
Η οικογένεια $(\{x\})_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, αλλά δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα: αν $x_{i_1},\dots,x_{i_m}\in X$ τότε $\bigcup_{k=1}^{m} \{x_{i_k}\} = \{x_{i_1},\dots,x_{i_m}\} \neq X$.

Ορισμός ① Ένας μ.χ. (X,d) λέγεται συμπαγής, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα:
"Αν $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτά σύνολα και $X=\bigcup_{i\in I} U_i$, τότε $\exists i_1,\dots,i_m\in I$, τότε $X = U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$"
② Έστω (X,d) μ.χ. Ένα $A\subseteq X$ λέγεται συμπαγές, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα:
"Αν $U_i, i\in I$ είναι ανοικτά $\subseteq X$ και $A\subseteq \bigcup_{i\in I}U_i$, τότε $\exists i_1,\dots,i_m \in I$ τ.ω. $A\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$"

Για παράδειγμα, είδαμε ότι ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι συμπαγής. Όμως, κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές



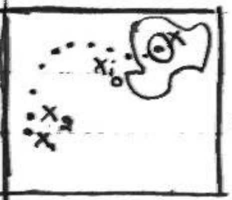
Άσκηση: Θεώρημα Heine-Borel

Άσκηση

(α) Κάθε πεπερασμένο $A\subseteq (X,d)$ είναι συμπαγές.
Γράφουμε $A=\{x_1,\dots,x_m\}$. Έστω $U_i, i\in I$ ανοικτά σύνολα τ.ω. $A\subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Για κάθε $j\leq m$ $\exists i_j\in I$ τ.ω. $x_j\in U_{i_j}$
$\hookrightarrow x_j\in \bigcup_{i\in I} U_i$

τότε $A=\{x_1,\dots,x_m\}\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$

(β) Έστω (X,d) μ.χ., (x_n) ακολουθία στον X, $x_n \to x \in X$. Τότε το $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι <u>συμπαγές</u>.



<u>Λύση</u>: Έστω U_i ανοικτά $\subseteq X$ τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

· Υπάρχει $i_0 \in I$ τ.ω. $x \in U_{i_0}$

· Το U_{i_0} είναι ανοικτό και $x_n \to x$, άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ x_n \in U_{i_0}$. $\forall j \leq n_0 \ \exists i_j \in I$ τ.ω. $x_j \in U_{i_j}$

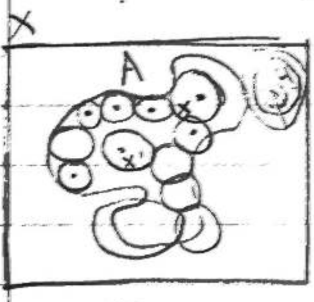
· Τότε $K = \{x_1\} \cup \ldots \{x_{n_0}\} \cup \underbrace{(\{x_n : n > n_0\} \cup \{x\})}_{\subseteq U_{i_0}} \subseteq U_{i_1} \cup \ldots U_{i_{n_0}} \cup U_{i_0}$

πεπερασμένο υποκάλυμμα

<u>Τρεις Προτάσεις</u>

<u>Πρόταση 1</u>

Έστω $A \subseteq (X,d)$ συμπαγές. Τότε το A είναι κλειστό.



<u>Απόδειξη</u>: Θ.δ.ο. το $X \setminus A$ είναι ανοικτό.

Έστω $y \in X \setminus A$.

<u>Ορίζουμε κατάλληλο κάλυμμα του A</u>

Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \neq y \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, \varepsilon_y) = \emptyset$.

Τώρα, έχουμε $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x) \leftarrow$ ανοικτό κάλυμμα

Αφού το A είναι <u>συμπαγές</u> $\exists x_1, \ldots, x_m \in A$ τ.ω.

$A \subseteq B(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_m, \varepsilon_{x_m})$.

Ορίζουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_m}\} > 0$.

Τότε $\forall j = 1, \ldots, m \quad B(y, \varepsilon) \subseteq B(y, \varepsilon_{x_j})$ και $B(y, \varepsilon_{x_j}) \cap B(x, \varepsilon_{x_j}) = \emptyset$

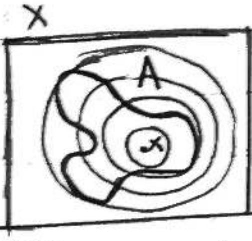
$\Longrightarrow B(y, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon_{x_j}) = \emptyset$.

Άρα, $B(y,\varepsilon) \cap (\underbrace{B(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_m, \varepsilon_{x_m})}_{\supseteq A}) = \emptyset \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B(y,\varepsilon) \cap A = \emptyset \Longrightarrow B(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$.

Πρόταση 2

Έστω $A \subseteq (X,d)$ συμπαγές. Τότε το A είναι φραγμένο



Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Η οικογένεια $(B(x,n))_{n=1}^{\infty}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, άρα και του A.
[Έστω $y \in X$. Επιλέγω $n > d(x,y)$ και τότε $y \in B(x,n)$]

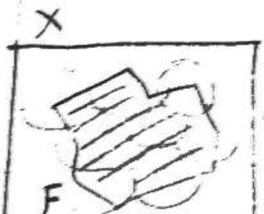
Έχουμε $A \subseteq \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n)}_{= X}$ και αφού το A είναι συμπαγές

$\exists\, n_1 < \ldots < n_m$ τ.ω. $A \subseteq B(x,n_1) \cup \ldots \cup B(x,n_m) = B(x,n_m)$
Εξ' ορισμού το A είναι φραγμένο.

Σημείωση: Από τις Προτάσεις 1 και 2 έχουμε ότι κάθε συμπαγές $A \subseteq (X,d)$ είναι κλειστό και φραγμένο.
Το αντίστροφο, δεν ισχύει.
π.χ. X άπειρο σύνολο, δ η διακριτή μετρική, το ίδιο το X είναι κλειστό και φραγμένο, αλλά είδαμε ότι δεν είναι συμπαγές.

Πρόταση 3

Αν ο (X,d) είναι συμπαγής και $F \subseteq X$ κλειστό, τότε το F είναι συμπαγές.



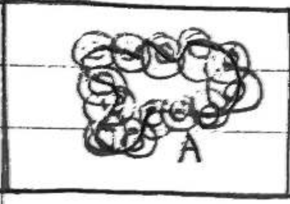
Απόδειξη: Έστω U_i, $i \in I$ ανοικτό τ.ω. $F \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$
Αφού το F είναι κλειστό, το σύνολο $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Τώρα $X = F \cup (X \setminus F) \subseteq \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cup (X \setminus F)}_{\text{ανοικτό κάλυμμα του } X}$
Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists\, i_1, \ldots, i_m \in I$ τ.ω.
$X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m} \cup (X \setminus F) \Rightarrow$

$\Rightarrow F = F\cap X = (F\cap U_{i_1}) \cup \ldots\ldots \cup (F\cap U_{i_m}) \cup [F\cap \cancel{(X\setminus F)}^{\,\emptyset}]$

$\subseteq U_{i_1} \cup \ldots\ldots \cup U_{i_m}$

Δηλ. βρίσκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω (X,d) μ.χ. και $A\subseteq X$. Το A λέγεται <u>ολικά φραγμένο</u>, αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ και $x_1,\ldots,x_m\in X$ τ.ω. $A\subseteq B(x_1,\varepsilon)\cup\ldots\ldots\cup B(x_m,\varepsilon)$



<u>Παρατήρηση</u>

① Κάθε ολικά φραγμένο σύνολο είναι φραγμένο.

$[\ \exists x_1,\ldots,x_m\ :\ A\subseteq \underbrace{B(x_1,1)}_{\text{φραγμένο}}\cup\ldots\cup \underbrace{B(x_m,1)}_{\text{φραγμένο}} = \text{φραγμένο}]$

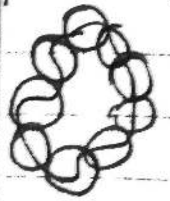
π.χ. Ο (X,δ), X άπειρο σύνολο, είναι φραγμένος, αλλά <u>όχι</u> ολικά φραγμένος: για $\varepsilon=\frac{1}{2}$, αν $X\subseteq B(x_1,1/2)\cup\ldots\cup B(x_m,1/2)$

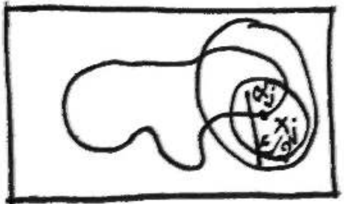
$=\{x_1\}\cup\ldots\{x_m\}=\{x_1,\ldots,x_m\}$ <u>άτοπο</u> γιατί X άπειρο σύνολο

② Αν το $A\subseteq(X,d)$ είναι ολικά φραγμένο και $B\subseteq A$, τότε το B είναι ολικά φραγμένο (Άσκηση)

③ Έστω $A\subseteq(X,d)$ ολικά φραγμένο. Τότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists m\in\mathbb{N}$ και $a_1,\ldots\ldots,a_m\in A$ τ.ω. $A\subseteq B(a_1,\varepsilon)\cup\ldots\cup B(a_m,\varepsilon)$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχουν $x_1,\ldots\ldots,x_m\in X$ τ.ω. $A\subseteq B(x_1,\varepsilon/2)\cup\ldots\ldots\cup B(x_m,\varepsilon/2)$. Μπορώ να υποθέσω ότι $\emptyset\neq A\cap B(x_j,\varepsilon/2)$ $\forall j=1,\ldots,m$





Για κάθε j επιλέξαμε $a_j \in B(x_j, \varepsilon/2)$

Τότε $B(x_j, \varepsilon/2) \subseteq B(a_j, \varepsilon)$

[Αν $z \in B(x_j, \varepsilon/2)$, τότε $d(z, a_j) \leq d(z, x_j) + d(x_j, a_j)$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, δηλ. $z \in B(a_j, \varepsilon)$]

Τότε $A \subseteq B(x_1, \varepsilon/2) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon/2) \subseteq B(a_1, \varepsilon/2) \cup \dots \cup B(a_m, \varepsilon/2)$

Το Θεώρημα

Έστω (X, d) μ.χ. Τ.α.ε.ι.:

(α) Ο (X, d) είναι συμπαγής (ορισμός με καλύμματα)

(β) Κάθε άπειρο $A \subseteq X$ έχει σημείο συσσώρευσης

(γ) Ο (X, d) είναι ακολουθιακά συμπαγής
(κάθε (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία)

(δ) Ο (X, d) είναι ολικά φραγμένος και πλήρης

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω A άπειρο υποσύνολο του X που δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

Έστω $x \in X$. Το x δεν είναι σ.σ. του A.

$\exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $B(x, \varepsilon_x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon_x) \cap A \subseteq \{x\}$

Γράφαμε $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$ ανοικτή κάλυψη του X

Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists\, x_1, \dots, x_m \in X$ τ.ω.

$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \Rightarrow A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B(x, \varepsilon_{x_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{x_i\} =$

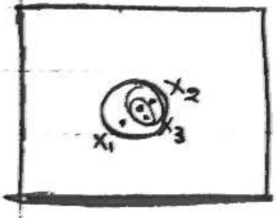
$= \{x_1, \dots, x_m\}$. Άρα A πεπερασμένο, άτοπο.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Θεωρούμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

1η περίπτωση: Το A είναι πεπερασμένο $A = \{a_1, \dots, a_k\}$.

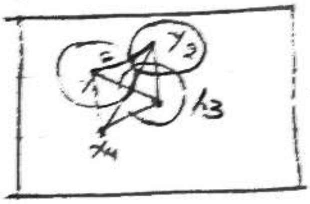
Υπάρχει $a \in A$ τ.ω. $x_n = a$ για άπειρους δείκτες $n \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η (x_n) έχει σταθερή υπακολουθία η οποία συγκλίνει.

<u>2η περίπτωση</u>: Το A είναι άπειρο.
Από την υπόθεση, $\exists x \in A'$. Τότε έχουμε $\exists x_{k_n} \to x$



(δ) $\Rightarrow$ (δ) <u>Ο X είναι πλήρης</u>
Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Από το (δ) $\exists x_{k_n} \to x \in X$. Τότε (Κεφ. 2) $x_n \to x$

<u>Ο X είναι ολικά φραγμένος</u>
Έστω ότι δεν είναι. $\exists\ \varepsilon > 0$ τω.
" Ο X <u>δεν</u> καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας ε ".
Παίρνουμε $x_1 \in X$ τυχόν. Τότε $X \neq B(x_1, \varepsilon)$.

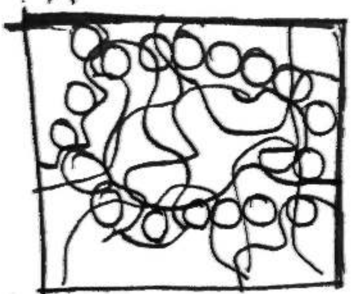


Άρα, $\exists x_2 \notin B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$
Έχουμε $X \neq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$
Άρα, $\exists x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ και $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$

Επαγωγικά βρίσκουμε $x_{n+1} \notin B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon)$
$\Rightarrow d(x_{n+1}, x_k) \geq \varepsilon \quad \forall\ k = 1, \ldots, n.$
Έτσι ορίζεται ακολουθία (x_n) στον X τω. $\forall n \neq m$
$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Αυτή η (x_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα (x_{k_n}), γιατί για μεγάλα $n \neq m$ θα είχαμε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, <u>άτοπο</u>.

(δ) $\Rightarrow$ (α) Έχουμε ότι ο X είναι ολικά φραγμένος και πλήρης.
Θα υποθέσουμε ότι δεν είναι συμπαγής και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i, i \in I$ τω
$X = \bigcup_{i \in I} U_i$, αλλά ο X δεν καλύπτεται από πεπερασμένα U_i

X



o X είναι ολικά φραγμένος.
Για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχουν $x_{1,1}, \dots\dots, x_{1,N_1}$
τω. $X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1,j}, 1/2)$

Κάποιο από τις $B(x_{1,j}, 1/2)$ <u>δεν</u> καλύπτεται από πεπερασμένα τα πλήθη U_i.
Αλλιώς, ο X θα καλύπτεται από πεπερασμένα τα πλήθη U_i, γιατί το πλήθος των μπαλών είναι πεπερασ-μένο. Δηλ. $\exists x_1 \in X$ τω. η $B(x_1, 1/2)$ <u>δεν</u> καλύπτεται από πεπερασμένο το πλήθος U_i.

Γράφαμε $\underbrace{B(x_1, 1/2)}_{\text{ολ. φρ. σύνολο}} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_2} B(x_{2,j}, 1/2^2)$ $\left(\begin{array}{l}\text{όλες τέμνουν} \\ \text{την } B(x_1, 1/2)\end{array}\right)$

Όπως πριν, κάποια από τις $B(x_{2,j}, 1/2^2)$ <u>δεν</u> καλύπτεται από πεπερασμένα U_i. Την λέμε $B\left(x_2, \frac{1}{2^2}\right)$.

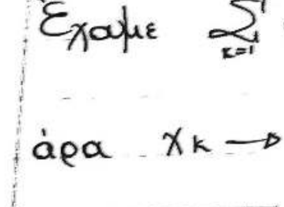
Επίσης, $d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$

(γιατί $B(x_1, 1/2) \cap B(x_2, 1/2^2) \neq \emptyset$)

Επαγωγικά, βρίσκουμε μπάλες $B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)$ που δεν καλύπτονται από πεπερασμένα το πλήθος U_i και $d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{3}{2^{k+1}}$.

Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k+1}} < \infty$ και ο X είναι <u>πλήρης</u>

άρα $x_k \to x \in X$



Υπάρχει $i_0 \in X$ τω. $x \in U_{i_0}$. $\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq U_{i_0}$
Για μεγάλα k έχουμε
- $x_k \in B(x, \delta/2)$, γιατί $x_k \to x$

• $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{2}$, γιατί $\frac{1}{2^k} \to x$

Τότε $B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right) \subseteq B(x,\delta) \subseteq B_{i_0}$

<u>Άρα</u> η $B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)$ καλύπτεται από το U_{i_0} μόνο του, άτοπο

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

<u>Ορισμός</u>: (α) Ο (X,d) λέγεται <u>συμπαγής</u>, αν για κάθε οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X τ.ώ. $X=\bigcup_{i\in I} U_i$ μπορούμε να βρούμε $i_1,\dots,i_m\in I$ τ.ω.

$X=U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$

(β) Ο (X,d) λέγεται <u>ολικά φραγμένος</u>, αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists x_1,\dots,x_m\in X$ τ.ω. $X=B(x_1,\varepsilon)\cup\dots B(x_m,\varepsilon)$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω (X,d) μ.χ. Τ.α.ε.ι.

(α) Ο X είναι συμπαγής

(β) Κάθε άπειρο $A\subseteq X$ έχει τουλάχιστον ένα σ.σ.

(*) (γ) Κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

(δ) Ο X είναι πλήρης <u>και</u> ολικά φραγμένος.

Ⓐ Συνεχείς Συναρτήσεις σε Συμπαγείς Μ.Χ.

Πρόταση 1

Αν ο (X,d) είναι συμπαγής, τότε κάθε συνεχής $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Α.ν.δ.ο. αν $(x_n), (y_n)$ είναι δύο ακολουθίες στον X με $d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow \sigma(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.
Προσπαθούμε να πάμε με άτοπο: αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής μπορούμε να βρούμε $\varepsilon>0$ και $(x_n), (y_n)$ στον X τ.ω. $d(x_n, y_n) \to 0$, αλλά $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ $\forall n$.
Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists\, x_{k_n} \to x \in X$.
Τότε $d(y_{k_n}, x) \leq d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) \longrightarrow 0+0=0$.
Άρα, $y_{k_n} \to x$.
Αφού η f είναι συνεχής στο x, έχουμε
$f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(x)$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \longrightarrow \sigma(f(x), f(x)) = 0$, άτοπο
γιατί $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \varepsilon$

Σημείωση: Ας υποθέσουμε ότι είχαμε υποθέσει ότι:
$\exists\, x_{k_n}, y_{k_n}$: $d(x_{k_n}, y_{k_n}) \to 0$, αλλά $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \not\to 0$
Θα κάναμε τα ίδια: θα βρίσκουμε $x_{k_n} \to x \Rightarrow y_{k_n} \to x$
$\Rightarrow f(x_{k_n}), f(y_{k_n}) \to f(x) \Rightarrow \sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \to 0$.

Πρόταση 2

Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής.
Αν K συμπαγές, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές

<u>Απόδειξη</u>: Παίρνουμε (y_n) στο $f(K)$ και δ.ο. υπάρχει υπακολουθία $y_{k_n} \to y \in f(K)$.
(Αυτό δ.ο. ο $(f(K), \sigma)$ είναι συμπαγής $\overset{\text{Ασκ.}}{\Leftrightarrow}$ $f(K)$ συμπαγές $\subseteq Y$)
Για κάθε n $\exists\, x_n \in K$ τ.ω. $y_n = f(x_n)$.
Η (x_n) είναι στο συμπαγές K, άρα υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in K$. Αφού η f είναι συνεχής στο x,
$y_{k_n} = f(x_{k_n}) \longrightarrow f(x) = y \in f(K)$

<u>Δεύτερη Απόδειξη</u>: Έστω $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(K)$ στο Y.

Έχουμε $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$

Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $U_i = f^{-1}(V_i)$.
Αφού η f είναι συνεχής, κάθε U_i είναι ανοικτό $\subseteq X$ (γιατί V_i ανοικτό $\subseteq Y$)

① $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$: Έστω $x \in K \Rightarrow f(x) \in f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ τ.ω. $f(x) \in V_{i_0} \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ $x \in f^{-1}(V_{i_0}) \overset{\text{ορσ}}{=} U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

② Το K είναι συμπαγές και η $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα $\exists\, i_1, \dots, i_m \in I$ τ.ω. $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(K) \subseteq f(U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}) = f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_m}) \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$
Δηλ. βρίσκουμε πεπερασμένο υποκάλυμμα του $(V_i)_{i\in I}$ για το $f(K)$

$g: X \to Y$ Αν $A \subseteq X$, $g(A) = \{g(x) : x \in A\}$	$g^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} g^{-1}(B_i)$	$g(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} g(A_i)$
Αν $B \subseteq Y$, $g^{-1}(B) = \{g^{-1}(x) : x \in B\}$	$g^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} g^{-1}(B_i)$	$g(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} g(A_i)$

Πρόταση 3

Αν ο (X,d) είναι συμπαγής και $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

<u>Απόδειξη</u>: Από την Πρόταση 2, η $f(X)$ είναι συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $f(X)$ είναι κλειστό και φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$

(α) $f(X)$ = φραγμένο $\Longrightarrow$ $\exists \sup f(x), \inf f(x)$

(β) $f(X)$ = κλειστό $\Longrightarrow$ $\sup f(x), \inf f(x) \in f(X)$

$$\Downarrow$$

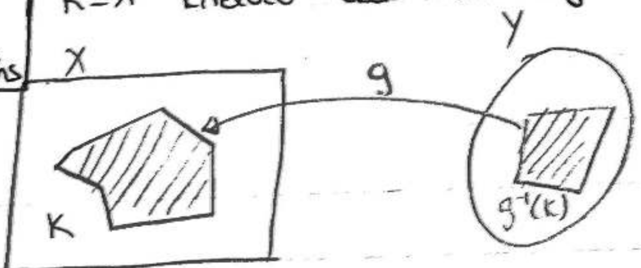
$$\sup f(x) = \max f(x)$$
$$\inf f(x) = \min f(x)$$

Πρόταση 4

Έστω (X,d) συμπαγής. Κάθε συνεχής, 1-1 και επί συνάρτησ[η] $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή η $g=f^{-1}:(Y,\sigma)\to(X,d)$ είναι συνεχής

$Y=f(X)$
X συμπαγής
f συνεχής
$\overset{\Pi.2}{\Longrightarrow}$ Y συμπαγής

<u>Απόδειξη</u>: Η g είναι καλά ορισμένη, γιατί η f είναι 1-1 και επί. Για ν.δ.ο. η g είναι συνεχής παίρνουμε $K\subseteq X$ κλειστό και δ.ο. $g^{-1}(K)$ είναι κλειστό $\subseteq Y$



① X συμπαγής + $K\subseteq X$ κλειστό $\Longrightarrow$ K συμπαγές

② $g^{-1}(K) = f(K)$

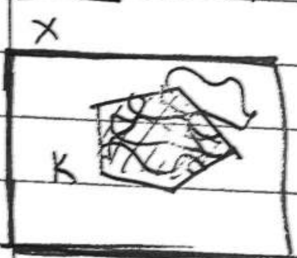
Το $g^{-1}(K) = f(K)$ είναι η εικόνα του συμπαγούς K μέσω της συνεχούς f, άρα είναι συμπαγές, από Πρόταση 2
Αφού είναι συμπαγές, το $g^{-1}(K)$ είναι κλειστό.

Π1 : Αν $K \subseteq (X,d)$ συμπαγές $\Rightarrow K$ κλειστό.
Π2 : Αν X συμπαγές και $K \subseteq X$ κλειστό $\Rightarrow K$ συμπαγές
Π3 : K συμπαγές $\Rightarrow K$ φραγμένο

Άσκηση 1

Ένα $K \subseteq (X,d)$ είναι συμπαγές (με τον ορισμό που δώσαμε με καλύμματα) ανν ο μετρικός υπόχωρος (K,d) είναι συμπαγής μχ.

Λύση: $(\Rightarrow)$ Έστω U_i ανοικτά στον (K,d) τω. $K = \bigcup_{i\in I} U_i$



Για κάθε $i \in I$ $\exists V_i \subseteq X$ τω. $U_i = V_i \cap K$
Τώρα $K = \bigcup_{i\in I} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$

Αφού το K είναι συμπαγές, $\exists i_1, \ldots, i_m \in I$ τω.
$K \subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_m} \Rightarrow K = K \cap (V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_m}) =$
$= (K \cap V_{i_1}) \cup \ldots \cup (K \cap V_{i_m}) = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_m}$ και βρίσκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα

$(\Leftarrow)$ Έστω V_i ανοικτά $\subseteq X$ με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow K = \bigcup_{i\in I} \underbrace{(V_i \cap K)}_{U_i}$

$\xRightarrow[\text{συμπαγής}]{(K,d)} \exists i_1, \ldots, i_m$ τω. $K = (V_{i_1} \cap K) \cup \ldots \cup (V_{i_m} \cap K)$ ανοικτό στο K

$\subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_m}$

Εφαρμογή

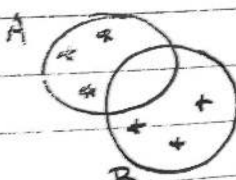
Πως δ.ο. ένα $K \subseteq (X,d)$ είναι συμπαγές με ακολουθίες ;

Λύση: Από την Άσκηση α.ν.δ.ο. ο (K,d) είναι συμπαγής (*)
(*) Ισοδύναμα, ότι ο (K,d) είναι ακολουθιακά συμπαγής
Άρα παίρνουμε τυχούσα (x_n) στο K και βρίσκουμε
υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in K$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(3) Αν A, B είναι συμπαγή $\subseteq (X,d)$ δ.ο. το $A \cup B$ συμπαγές

Λύση: • Με ακολουθίες: Έστω (x_n) ακολουθία στο $A \cup B$



Είτε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο A
είτε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο B
Έστω ότι ισχύει το πρώτο.
Οι όροι της (x_n) στο A μπορούν να γραφούν ως υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n). Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει $(x_{k_{\lambda_n}})$ υπακολουθία της (x_n) που συγκλίνει
$x_{k_{\lambda_n}} \to x \in A \subseteq A \cup B$.

• Με καλύμματα: Έστω $U_i \subseteq X$ ανοικτά τω. $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

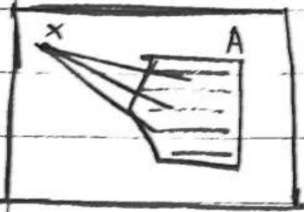
Τότε $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ + A συμπαγές $\Longrightarrow \exists\, J_1 \subseteq I$ πεπερασμένο
τω. $A \subseteq \bigcup_{i \in J_1} U_i$

$B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ + B συμπαγές $\Longrightarrow \exists\, J_2 \subseteq I$ πεπερασμένο
τω. $B \subseteq \bigcup_{i \in J_2} U_i$

Τότε $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} U_i$ και το $J_1 \cup J_2$ είναι πεπερασμένο.

Άρα βρίσκαμε πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(5) (a) Έστω $x \in X$ και A συμπαγές $\subseteq X$.
Ν.δ.ο. $\exists\, y \in A$ τω. $dist(x, A) = d(x, y)$



<u>Λύση</u>: Ξέραμε ότι $dist(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$
Θέλαμε ν.δ.ο. το inf είναι min.
Ορίζαμε $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(a) = d(x, a)$

- Η f είναι συνεχής: $|f(a) - f(a')| = |d(x,a) - d(x,a')| \leq$
$\leq d(a, a')$. Άρα είναι Lipschitz με σταθερά 1
- Αφού το A είναι συμπαγές, η f παίρνει ελάχιστη τιμή. Υπάρχει $y \in A$ τω. $\forall a \in A$ $f(y) \leq f(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall a \in A$ $d(x, y) \leq d(x, a) \Rightarrow d(x, y) = \min\{d(x, a) : a \in A\} = dist(x, A)$

<u>Συμπάγεια και Μετρικό Γινόμενο</u>

<u>Πρόταση</u>

Έστω $(X_1, d_1), \ldots\ldots, (X_k, d_k)$ συμπαγείς μ.χ.
Θεωρούμε μια μετρική γινόμενο d στο $X_1 \times \ldots \times X_k$
Τότε ο $(X_1 \times \ldots\ldots \times X_k, d)$ είναι συμπαγής.
(γινόμενο συμπαγών μ.χ. είναι συμπαγής μ.χ.)

Απόδειξη: Θ.δ.ο. αν X, Y, Z είναι συμπαγείς $\Rightarrow X \times Y \times Z$ συμπαγής

Έστω $u_n \in (x_n, y_n, z_n)$ ακολουθία στον $X \times Y \times Z$.

· Ο X είναι συμπαγής, άρα η (x_n) έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in X$

· Ο Y είναι συμπαγής, άρα (y_{k_n}) — ,, — $\boxed{y_{k_{\lambda_n}} \to y \in Y}$

Αφού $x_{k_n} \to x \Rightarrow \boxed{x_{k_{\lambda_n}} \to x \in X}$

· Ο Z είναι συμπαγής, άρα $(z_{k_{\lambda_n}})$ — ,, — $\boxed{z_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to z \in Z}$

Επομένως, $x_{k_{\lambda_n}} \to x \Rightarrow \boxed{x_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to x}$

$y_{k_{\lambda_n}} \to y \Rightarrow \boxed{y_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \to y}$

Έπεται ότι $u_{k_{\lambda_{\mu_n}}} = \left(x_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, y_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, z_{k_{\lambda_{\mu_n}}}\right) \xrightarrow[\text{γινόμενο}]{d \text{ μετρικό}} (x, y, z) \in X \times Y \times Z$

Άρα βρήκαμε συγκλίνουσα υπακολουθία της (u_n)

Συμπάγεια στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Τότε το A είναι συμπαγές ανν είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Ισχύει γενικά, σε κάθε μ.χ. τα συμπαγή σύνολα είναι κλειστά και φραγμένα.

$(\Leftarrow)$ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστό και φραγμένο.

Θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο A.

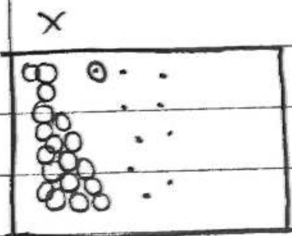
Αφού το A είναι φραγμένο, η (x_n) είναι φραγμένη και από το Θ.Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^m$ (Κεφ. 2)

υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}^m$.
Αφού $x_{k_n} \in A$, $x_{k_n} \to x$ και το A είναι κλειστό, έχουμε ότι $x \in A$. Άρα το A είναι συμπαγές.

Άλλες βασικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων

Πρόταση 1

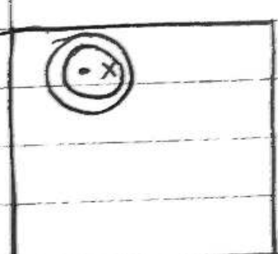
Κάθε ολικά φραγμένος μ.χ. (X,d) είναι διαχωρίσιμος.
Ειδικότερα, κάθε συμπαγής μ.χ. είναι διαχωρίσιμος.



Απόδειξη: $\forall n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε τον ολικά φραγμένου με $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ και βρίσκουμε $D_n \subseteq X$ πεπερασμένο τ.ω. $X = \bigcup_{x \in D_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Ορίζουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Το D είναι αριθμήσιμο σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Ισχυρισμός: $\overline{D} = X$ (το D είναι πυκνό)



Παίρνουμε $x \in X$ τυχόν και $\varepsilon > 0$ τυχόν.
Θα βρούμε $y \in D$ τ.ω. $y \in B(x,\varepsilon)$.
Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $X = \bigcup_{y \in D_n} B(y, 1/n)$

υπάρχει $y \in D_n$ τ.ω. $x \in B\left(y, \frac{1}{n}\right) \iff d(x,y) < \frac{1}{n} \iff y \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$

Αφού $\frac{1}{n} < \varepsilon$ έπεται ότι $y \in B(x,\varepsilon)$.

Επιπλέον, $y \in D_n \subseteq D$, δηλ. βρίσκουμε $y \in D$ τ.ω. $y \in B(x,\varepsilon)$.

14/12/21

Ιδιότητα των Πεπερασμένων Τομών

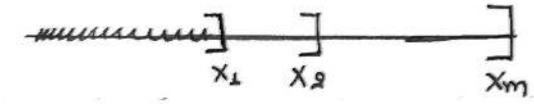
Ορισμός: Έστω $X \neq \emptyset$. Λέμε ότι μια οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, αν $\forall m \in \mathbb{N}$ και $\forall i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_m} \neq \emptyset$$

Παραδείγματα

(1) $X = \mathbb{R}$, $F_x = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$

Αν $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, τότε $\bigcap_{k=1}^{m} (-\infty, x_k) = (-\infty, x_1] \neq \emptyset$



(2) $X = \mathbb{N}$, Θεωρούμε F_i το σύνολο που έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα: $\mathbb{N} \setminus F_i$ πεπερασμένο σύνολο

Έστω $F_1, \ldots, F_m \subseteq \mathbb{N}$ τω. $\forall i$ το $\mathbb{N} \setminus F_i$ είναι πεπερασ-μένο. Τότε $\underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} (\mathbb{N} \setminus F_i)}_{\text{πεπερασμένο}} = \mathbb{N} \setminus \bigcap_{i=1}^{m} F_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} F_i$ άπειρο σύνολο και ειδικότερο $\bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \emptyset$.

Παρατήρηση: $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} F_x = \emptyset$ (για το (1))

Παρατήρηση: $\forall n$ $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ έχει πεπερασμένο συμπλήρωμα άρα ανήκει στην οικογένεια και $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \emptyset$

άρα και η τομή όλων των συνόλων της οικογένειας είναι $\emptyset$ (για το (2)).

Θεώρημα

Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. Αν $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών πεπερασμένων υποσυνόλων του X, που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

Απόδειξη: Υποθέταμε ότι $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Τότε $X = \bigcup_{i\in I} F_i^c$ ανοικτά σύνολα (F_i κλειστά) ανοικτή κάλυψη του X.

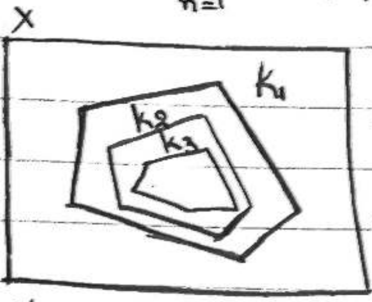
Αφού ο X είναι συμπαγής, $\exists$ πεπερασμένη υποκάλυψη: $\exists i_1, \ldots, i_m \in I$ τω. $X = F_{i_1}^c \cup \ldots \cup F_{i_m}^c \Rightarrow$
$\Rightarrow \emptyset = (F_{i_1}^c)^c \cap \ldots \cap (F_{i_m}^c)^c = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_m}$ άτοπο, γιατί η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών

Παρατηρήσεις.

(1) Ισχύει το εξής αντίστροφο: Έστω (X,d) μ.χ. με την εξής ιδιότητα: "Αν $(F_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών $\subseteq X$ με την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$
Τότε, ο X είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Έστω ότι $\exists$ ανοικτή κάλυψη $X = \bigcup_{i\in I} G_i$ που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Θέτουμε $F_i = G_i^c$ = κλειστό.
Για κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$, $X \neq G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_m} \Rightarrow$
$\Rightarrow \emptyset \neq G_{i_1}^c \cap \ldots \cap G_{i_m}^c = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_m}$
Άρα, η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών.
Από την υπόθεση, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \underset{G_i}{\underset{\parallel}{F_i^c}} \neq X$ άτοπο γιατί η $(G_i)_{i\in I}$ ήταν ανοιχτή κάλυψη του X.

(2) Ειδική Περίπτωση : Έστω (X,d) μ.χ. και $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων ($K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \dots$)
Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$



Απόδειξη: • Ο (K_1,d) είναι συμπαγής μ.χ. και η $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μέσα σε αυτόν
• Αν $n_1 < \dots < n_m$, τότε
$K_{n_1} \cap \dots \cap K_{n_m} = K_{n_m} \neq \emptyset$
(K_n) φθίνουσα

Άρα, η $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Από το Θεώρημα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$

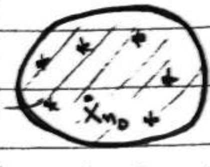
(3) Σύγκριση της Ειδικής Περίπτωσης με το Θ. Cantor

• Θ. Cantor : X πλήρης	(K_n) φθίνουσα, K_n κλειστά, μη κενά, $diam(K_n) \to 0$	$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$
• Ειδική Περίπτωση : K_1 συμπαγής	(K_n) φθίνουσα, K_n κλειστά, μη κενά	$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$
Ισχυρότερη υπόθεση για χώρο	Ασθενέστερες Υποθέσεις για το K_n	Ίδιο Συμπέρασμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Κεφαλαίου 6)

⑥ Έστω (X,d) μ.χ.
(α) Υποθέτουμε ότι $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall x \in X$ η $\overline{B(x,\varepsilon)}$ είναι συμπαγής. Ν.δ.ο. X είναι πλήρης.
(β) Υποθέτουμε ότι $\forall x \in X$ $\exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. η $\overline{B(x,\varepsilon)}$ να είναι συμπαγής. Είναι ο X αναγκαστικά πλήρης;

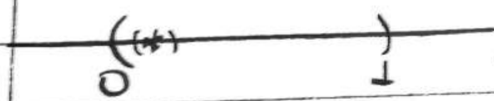
Λύση: (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο X.
Για το ε της υπόθεσης βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}: \forall n,m \geq n_0$
$d(x_n,x_m)<\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_0 \ d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_0 \ x_n\in B(x_{n_0},\varepsilon)$



Η $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\boxed{\subseteq B(x_{n_0},\varepsilon)}$ $\overline{B(x_{n_0},\varepsilon)}$, άρα $\exists \, (x_{k_n})$ $(k_n\geq n_0)$ τω.
$x_{k_n}\to x\in X$.

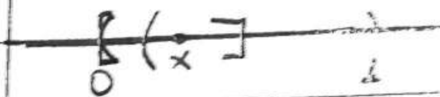
Η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα συγκλίνει.

(β) ΟΧΙ: $X=(0,1)$. Ο X δεν είναι πλήρης, γιατί δεν είναι κλειστό υποσύνολο του (πλήρους μ.χ.) $\mathbb{R}$



Όμως, η υπόθεση ικανοποιείται:
Έστω $0<x<1$. $\exists \, \varepsilon_x>0: [x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x]\subseteq(0,1)$

Αρκεί να πάρω $x-\varepsilon_x>0$ και $x+\varepsilon_x<1$, δηλαδή
$0<\varepsilon_x<\min\{x,1-x\}$. Τότε $\overline{B(x,\varepsilon_x)}=\overline{(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)}=[x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x]\subseteq(0,1)$
και είναι συμπαγής ως κλειστό και φραγμένο διάστημα.



(7) (X,d) συμπαγής, $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Ν.δο. τ.α.ε.ι.
(α) Η f είναι συνεχής
(β) Η συνάρτηση $T: X\to X\times Y$, $T(x)=(x,f(x))$ είναι συνεχής
(γ) Το γράφημα $\Gamma(f)=\{\underset{T(x)}{(x,f(x))}: x\in X\}$ είναι συμπαγές $\subseteq X\times Y$

Λύση: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x_n\to x\in X$. Θέλουμε $T(x_n)\to T(x)$,
δηλαδή $(x_n,f(x_n))\to(x,f(x))$, δηλ. $x_n\to x$ και $f(x_n)\to f(x)$
[Στον $X\times Y$ εννοείται ότι έχουμε κάποια μετρική γινόμενο]
ισχύει
και αυτό ισχύει
γιατί f συνεχής

(B) $\Rightarrow$ (γ) Παρατηρούμε ότι $\Gamma(f)=\{(x,f(x)): x\in X\} =$
$= \{T(x): x\in X\} = T(X)$.
Η T είναι συνεχής, από υπόθεση, και ο X είναι συμπαγής
άρα το $\Gamma(f)=T(X)$ είναι συμπαγές
"Συνεχής εικόνα συμπαγές είναι συμπαγές".
(γ) $\Rightarrow$ (α) Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $x\in X$.
Τότε $\exists\, \varepsilon>0$ και $x_n \to x$ τω. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sigma(f(x_n),f(x))\geq \varepsilon$ (*)
Έχουμε $(x_n, f(x_n))\in\Gamma(f)$ και το $\Gamma(f)$ είναι συμπαγές.
Υπάρχει $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to (u,v)\in\Gamma(f)$.
Άρα $v=f(u)$ και $x_{k_n}\to u \Rightarrow u=x$, αφού $x_n\to x$.
Τελικά, $(u,v)=(x,f(x))$.
Τώρα όμως $f(x_{k_n}) \to v = f(x)$, άτοπο γιατί από την
(*) $\forall n$ $\sigma(f(x_{k_n}), f(x))\geq\varepsilon$

(10) Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ και ο (Y,σ) είναι συμπαγής. Ν.δ.ο. f συνεχής $\Leftrightarrow \Gamma(f)=\{(x,f(x)): x\in X\}$ κλειστό $\subseteq X\times Y$.

Λύση: ($\Rightarrow$) Έστω $(x_n, f(x_n))\in\Gamma(f)$ και έστω ότι
$(x_n, f(x_n)) \to (x,y)\in X\times Y$. Θ.δ.ο. $(x,y)\in\Gamma(f)$, δηλ. $y=f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έχουμε } x_n\to x \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n)\to f(x) \\ \qquad\quad \text{και} \\ \qquad f(x_n)\to y \end{array}\right\} \Rightarrow y=f(x)$$

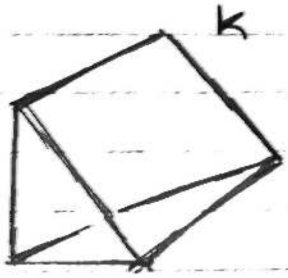
($\Leftarrow$) Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο x.
$\exists\, \varepsilon>0$ και $f(x_n)\to f(x)$ τω. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sigma(f(x_n), f(x))\geq\varepsilon$ (*)
Θεωρούμε τα $(x_n, f(x_n))\in\Gamma(f)$.
- Ο Y είναι συμπαγής και $f(x_n)\in Y$, άρα $\exists\, f(x_{k_n})$ τω. $f(x_{k_n}) \to y\in Y$.
- Επίσης, $x_n\to x \Rightarrow x_{k_n}\to x$.

Άρα, $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \longrightarrow (x,y)$
$\in \Gamma(f)$

Αφού το $\Gamma(f)$ είναι κλειστό, $(x,y) \in \Gamma(f) \Rightarrow y = f(x)$.

(9) Έστω K συμπαγή υποσύνολο του μ.χ. (X,d).
Ν.δ.ο. $\exists\, x,y \in K$ τ.ω. $d(x,y) = diam(K)$

K



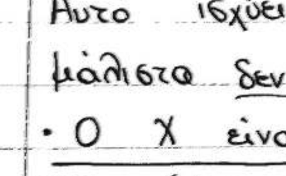
• K συμπαγές $\Rightarrow$ K φραγμένο
$\Rightarrow diam(K) < \infty$
• $diam(K) = \sup\{d(a,b) : a,b \in K\}$

Λύση : Θεωρούμε την $d : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$.
(α) Η d είναι συνεχής, αν $a_n \xrightarrow{d} a$, $b_n \xrightarrow{d} b$, τότε
$d(a_n, b_n) \longrightarrow d(a,b)$.
(β) Ο μ.χ. $K \times K$ είναι συμπαγής, γιατί το K είναι συμπαγές.
Από βασική πρόταση, η d παίρνει μέγιστη τιμή.
Υπάρχει $(x,y) \in K \times K$ τ.ω. $\forall (a,b) \in K \times K$: $d(a,b) \leq d(x,y)$,
δηλαδή $\exists\, x,y \in K$ τ.ω. $\forall\, a,b \in K$ $d(a,b) \leq d(x,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x,y) = \max\{d(a,b) : a,b \in K\} = \sup\{d(a,b) : a,b \in K\} =$
$= diam(K)$.

Άλλος τρόπος : Απο χαρακτηρισμό του supremum
$\exists\, x_n, y_n \in K$ τ.ω. $d(x_n, y_n) \to diam(K)$
• K συμπαγές $\Rightarrow \exists\, x_{k_n} \to x \in K$
• K συμπαγές $\Rightarrow$ η (y_{k_n}) έχει $y_{k_{\lambda_n}} \longrightarrow y \in K$
Αφού $x_{k_n} \to x \Rightarrow x_{k_{\lambda_n}} \to x$.
Τώρα, $d(x_{k_{\lambda_n}}, y_{k_{\lambda_n}}) \longrightarrow d(x,y)$.
υπακολουθία $diam(K)$
της $d(x_n, y_n) \to diam(K)$
Τελικά, $d(x,y) = diam(K)$ και $x,y \in K$ από την κατασκευή.

(19)* Έστω (X,d) μ.χ. Ν.αο. τα.ε.ι.:
(α) Ο X είναι συμπαγής
(β) Κάθε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη-κενή τομή, δηλ. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

<u>Λύση</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Τα F_n είναι κλειστά $\subseteq X$ (συμπαγούς) άρα είναι συμπαγή. Από την ειδική περίπτωση του "θεωρήματος πεπερ. τομών" η (F_n) έχει την ιδιότητα πεπερ. τομών, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
(β) $\Rightarrow$ (α) Θ.δ.ο. ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.
· <u>Ο X είναι πλήρης</u>: Παίρνουμε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ μη-κενών κλειστών συνόλων με $diam(F_n) \to 0$ και δ.ο. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (αυτό δ.ο. ο X είναι πλήρης από το αντίστροφο του Θ. Cantor)
Αυτό ισχύει άμεσα από το (β) (που λέει το ίδιο και μάλιστα <u>δεν</u> απαιτεί $diam(F_n) \to 0$)
· <u>Ο X είναι ολικά φραγμένος</u>: Έστω ότι <u>δεν</u> είναι. Τότε (θυμηθείτε βήμα της απόδειξη του θεωρήματος) $\exists \varepsilon > 0$ και (x_n) στον X τ.ω. $\forall n \neq m$ $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$.



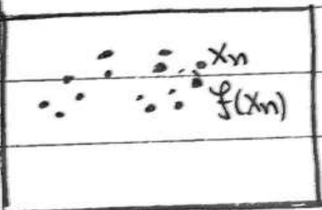
Ορίζουμε $F_n = \{x_k : k \geq n\}$.
Κάθε F_n είναι <u>κλειστό</u> (οι όροι απέχουν $\geq \varepsilon$ ανά 2) <u>μη-κενό</u> και η $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα.
Από την υπόθεση $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ <u>άτοπο</u>, γιατί $\forall n$ $x_n \notin F_{n+1} \Rightarrow x_n \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

<u>Υποάσκηση</u>: Αν (x_n) ακολουθία στον (X,d) και $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τ.ω. $\forall n \neq m$ $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \Rightarrow F$ κλειστό.

Λύση: Έστω (y_n) συγκλίνουσα ακολουθία από το F.
$\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \quad \underbrace{d(y_n, y_m)}_{\text{όροι της } (x_n)} < \varepsilon$

Αναγκαστικά, $y_n = y_m$
Άρα η (y_n) είναι τελικά σταθερή, ίση με y_{n_0} και συγκλίνει στο y_{n_0}

(27) (X, d) συμπαγής, $f : X \to X$ συνεχής.
Υποθέτουμε ότι $\exists (x_n)$ στο X τω. $d(x_n, f(x_n)) \to 0$.
Ν.δ.ο. η f έχει σταθερό σημείο.



Λύση: • X συμπαγής $\Rightarrow \exists x_{k_n} \to x \in X$
• f συνεχής $\Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x)$
• Τότε $d(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to d(x, f(x))$

$$d(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to 0$$

Άρα, $d(x, f(x)) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = x}$

(29) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής, X συμπαγής.
Ν.δ.ο. $\forall A \subseteq X \quad f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

Λύση: Ξέρουμε τον έναν εγκλεισμό: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \bar{\Gamma} \subseteq \Delta$
Δ-κλειστό

Για τον άλλον: $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow f(A) \subseteq f(\bar{A})$
Όμως, X συμπαγής και $\bar{A}$ κλειστό $\subseteq X \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{A}$ συμπαγές $\xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(\bar{A})$ συμπαγές $\Rightarrow f(\bar{A})$ κλειστό.
Αφού το $f(\bar{A})$ είναι κλειστό και $f(A) \subseteq f(\bar{A})$ έπεται ότι $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$.

$x \in \bar{A}$, $\exists x_n \in A$
τω. $x_n \to x$
$f(x_n) \to f(x)$
$\cap$
$f(A)$ Άρα,
$f(x) \in \overline{f(A)}$

(25) X συμπαγής και $f: X \to Y$ συνεχής.
Ν.α.ο. αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $f^{-1}(K)$ συμπαγές $\subseteq X$

Λύση: 1ος Τρόπος: K συμπαγές $\to K$ κλειστό $\xRightarrow[f \text{ συνεχής}]{} f^{-1}(K)$ κλειστό.

16/12/21

(25) X συμπαγής και $f: X \to Y$ συνεχής.
Ν.α.ο. αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $f^{-1}(K)$ συμπαγές $\subseteq X$

Λύση: 1ος Τρόπος: K συμπαγές $\Rightarrow K$ κλειστό $\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f^{-1}(K)$ κλειστό.

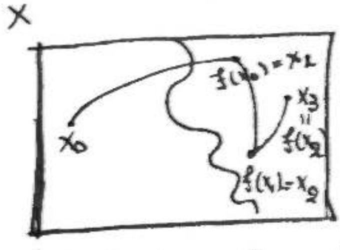
Το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς μχ. X, άρα είναι συμπαγές.

2ος Τρόπος: Έστω (x_n) στο $f^{-1}(K)$. Αφού $x_n \in X$ και ο X είναι συμπαγής, $\exists (x_{k_n})$ τω. $x_{k_n} \to x \in X$. Δο. $x \in f^{-1}(K)$.
Η f είναι συνεχής, άρα $\underset{\substack{\cap \\ K}}{f(x_{k_n})} \to f(x)$ (γιατί $x_{k_n} \in f^{-1}(K)$)

Το K είναι κλειστό, γιατί είναι συμπαγές, άρα $f(x) \in K \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(K)$. Άρα το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

(14) Έστω (X,d) συμπαγής μχ.
(α) Κάθε ισομετρία $f: X \to X$ είναι επί
(β) Αν (Y,σ) μχ. και υπάρχουν ισομετρίες $g: X \to Y$ και $h: Y \to X$, τότε και ο Y είναι συμπαγής.

Λύση: (α) Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι f δεν είναι επί.
Τότε $f(X) \subsetneqq X$. Η f είναι συνεχής ως ισομετρία και ο X είναι συμπαγής, άρα το $f(X)$ είναι συμπαγές σύνολο (ειδικότερα κλειστό)



$f(X)$ Υπάρχει $x_0 \in X$ τω. $x_0 \notin f(X)$.
Άρα, $dist(x_0, f(X)) = d > 0$.
Αν $x_1 = f(x_0)$, τότε $x_1 \in f(X)$, άρα $d(x_0,x_1) \geq d$

Ορίζουμε $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$.

$\underline{\text{Τότε}}$ (1) $\forall n \geq 1 \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \overset{f \text{ ισομετρία}}{=} d(x_n, x_{n-1}) =$
$= \dots = d(x_0, x_1) \geq \delta.$

(2) Γενικότερα, αν $n>m$, τότε $d(x_n, x_m) = d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \overset{f \text{ ισομετρία}}{=}$
$= d(x_{n-1}, x_{m-1}) \overset{\text{ομοίως}}{=} d(x_{n-2}, x_{m-2}) = \dots = d(\underset{f(X)}{x_{n-m}}, x_0) \geq \text{dist}(x_0, f(X)) = \delta^{(*)}$

$\boxed{d(x_8,x_5) = d(x_7,x_4) = d(x_6,x_3) = \dots = d(x_3,x_0) \geq \delta}$

Ο X είναι συμπαγής, άρα η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}), η οποία θα είναι <u>βασική</u> ως συγκλίνουσα.
Άρα, $\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \quad \delta \underset{(*)}{\leq} d(x_{k_n}, x_{k_m}) < \delta$, <u>άτοπο</u>
$k_n > k_m$

(β) Η συνάρτηση $h \circ g : X \to X$ είναι ισομετρία:
$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X$, $\forall x, y \in X \quad d(h\circ g(x), h \circ g(y)) = d(h(\underbrace{g(x)}_{\in Y}), h(g(y))) = \sigma(g(x), g(y)) = d(x,y)$

- Από το (α) η $h \circ g$ είναι <u>επί</u>.

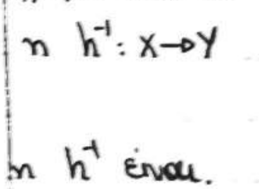
→ Άρα, η h είναι επί: Έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $x' \in X$ τ.ω.
$h(g(x')) = (h \circ g)(x') = x$, δηλ. για το $y = g(x') \in Y$ έχουμε $h(y) = x$

→ Τώρα, η $h : Y \to X$ είναι $\underset{\text{ισομετρία}}{1\text{-}1}$ και επί $\Longrightarrow$ ορίζεται η $h^{-1} : X \to Y$

και επειδή η h είναι ισομετρία έχουμε ότι και η h^{-1} είναι.
Άρα, ο $Y = h^{-1}(X)$ είναι συμπαγής, γιατί είναι συνεχής εικόνα (μέσω της h^{-1}) του συμπαγούς μχ. X.

(15) (X, d) συμπαγής, (F_n) <u>φθίνουσα</u> ακολουθία κλειστών $\subseteq X$.
(α) Αν G είναι ανοικτό $\subseteq X$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $F_{n_0} \subseteq G$

<u>Ιδέα</u>: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\text{ανοικτό}}{F_n^c} \supseteq X \setminus G$



Άρα $X = G \cup (X \setminus G) \subseteq G \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \right)$.
Δηλ. η $\{F_n^c : n \in \mathbb{N}\} \cup \{G\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X.

Αφού ο X είναι συμπαγής, αυτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη: $\exists\, n_1<n_2<\dots<n_m\in\mathbb{N}$ τω. $X=G\cup F_{n_1}^c\cup\dots\cup F_{n_m}^c$ $= G\cup(F_{n_1}\cap\dots\cap F_{n_m})^c \underset{(F_n)\text{ φθίνουσα}}{=\!=} G\cup F_{n_m}^c \Rightarrow F_{n_m}^c \supseteq X\setminus G \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{n_m}\subseteq G$.

(β) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\emptyset$, τότε $\exists\, n_0\in\mathbb{N} : F_{n_0}=\emptyset$

Εφαρμόζουμε το (α) με $G=\emptyset$: Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\emptyset\subseteq\overset{G}{\emptyset}$
$\overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} \exists\, n_0 : F_{n_0}\subseteq G=\emptyset \Rightarrow F_{n_0}=\emptyset$.

(δ) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$.

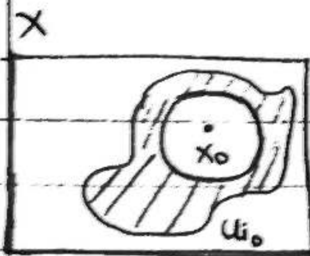
Έστω $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\{x_0\}$ για κάποιο $x_0\in X$. Έστω $\varepsilon>0$.

Παίρνουμε $G=B(x,\varepsilon/3)$ – ανοικτό.
Τότε, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\{x_0\}\subseteq \underbrace{B(x_0,\varepsilon/3)}_{G}$.

Από το (α) $\exists\, n_0\in\mathbb{N}: F_{n_0}\subseteq B(x_0,\varepsilon/3)\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \operatorname{diam}(F_{n_0})\le \operatorname{diam}(B(x_0,\varepsilon/3))\le 2\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$.

Τότε $\forall n\geq n_0$ έχουμε $F_n\subseteq F_{n_0}$ ((F_n) φθίνουσα) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \operatorname{diam}(F_n)\le \operatorname{diam}(F_{n_0})<\varepsilon$. Έπεται ότι $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$.

(32) Έστω (X,d) μ.χ. και $x_0\in X$. Υποθέτουμε ότι $\forall\varepsilon>0$ το $X\setminus B(x_0,\varepsilon)$ είναι συμπαγές. Ν.δ.ο. ο X είναι συμπαγής.



<u>Λύση</u>: Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X. Υπάρχει $i_0\in I$: $x_0\in U_{i_0}$. Το U_{i_0} είναι ανοιχτό, άρα $\exists\, \varepsilon>0$ τ.ω. $B(x_0,\varepsilon)\subseteq U_{i_0}$

Έχουμε $X\setminus B(x_0,\varepsilon)\subseteq X=\bigcup_{i\in I}U_i$, δηλ. η $(U_i)_{i\in I}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του <u>συμπαγούς</u> $X\setminus B(x_0,\varepsilon)$.

Άρα $\exists\, i_1,\dots,i_m\in I$ τ.ω. $X\setminus B(x_0,\varepsilon)\subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$ και $B(x_0,\varepsilon)\subseteq U_{i_0}$ $\Big\}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow X=(X\setminus B(x_0,\varepsilon))\cup B(x_0,\varepsilon)\subseteq \underbrace{U_{i_0}\cup U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}}_{\text{πεπερασμένη υποκάλυψη}}$

(28) Έστω (X,d) μ.χ. και D πυκνό υποσύνολο του X. Υποθέτουμε ότι κάθε ακολουθία (z_n) σημείων του D έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (σε σημείο του X). Ν.δ.ο. X είναι <u>συμπαγής</u>

<u>Λύση</u>: Δ.ο. ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής. Έστω (x_n) στο X.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists\, z_n\in D \text{ τ.ω. } \boxed{d(x_n,z_n)<\frac{1}{n}}$$

Από την υπόθεση, $\exists\, z_{k_n}$ τ.ω. $z_{k_n}\to x\in X$.

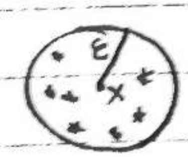
<u>Ισχυρισμός</u>: $x_{k_n}\to x\in X$

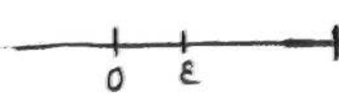
$d(x_{k_n},x)\le d(x_{k_n},z_{k_n})+d(z_{k_n},x)<\frac{1}{k_n}+d(z_{k_n},x)\to 0+0=0$

$\varepsilon>0$

$d(x_n,z_n)<\varepsilon$

$(k_n\ge n\Rightarrow 1/k_n\le 1/n\Rightarrow 1/n\to 0)$





(18) Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to X$ τ.ω. $\forall x \neq y$ στο X $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Ν.δ.ο. η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{ΟΧΙ ΣΥΜΠΑΓΗΣ}}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ ικανοποιεί την $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ αν $x \neq y$. ($f' < 1$) και <u>δεν</u> έχει <u>σταθερά</u> σημεία

<u>Λύση</u>: Σταθερό σημείο: $f(x) = x \iff d(x, f(x)) = 0$

Ορίζαμε $g: X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = d(x, f(x))$.

• Η g είναι συνεχής: αν $x_n \to x$, τότε $f(x_n) \to f(x)$, άρα $g(x_n) = d(x_n, f(x_n)) \to d(x, f(x)) = g(x)$

• Ο X είναι συμπαγής, άρα η g παίρνει <u>ελάχιστη τιμή</u> σε κάποιο $x_0 \in X$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $g(x_0) = 0$ [Τότε $d(x_0, f(x_0)) = 0 \Rightarrow f(x) = x_0$]

Έστω ότι $g(x_0) = d(x_0, f(x_0)) > 0$. Ειδικότερα, <u>$x_0 \neq f(x_0)$</u>.

Από την υπόθεση, $g(f(x_0)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) \overset{x \neq y}{<} \underset{g(x_0)}{\underset{\parallel}{d(x_0, f(x_0))}}$

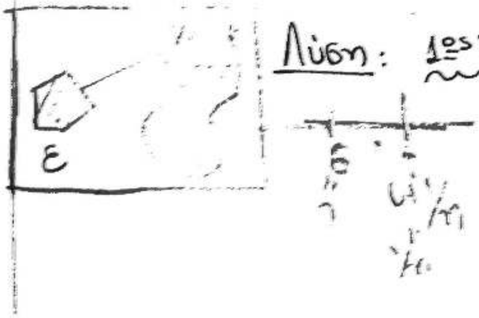
<u>άτοπο</u>, βρίσκουμε τιμή της g μικρότερη από την ελάχιστη τιμή της

<u>Μοναδικότητα</u>: Έστω ότι η f έχει δύο σταθερά σημεία

Δηλ. $f(x) = x$ και $f(y) = y$. Από την υπόθεση,

$d(x,y) = d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, <u>άτοπο</u>

(4) (X,d) μ.χ., E, F μη-κενά $\subseteq X$, E συμπαγές, F κλειστό, $E \cap F = \emptyset$. Ν.δ.ο. $\operatorname{dist}(E,F) = \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\} > 0$.



<u>Λύση</u>: <u>1ος Τρόπος</u>: Έστω ότι $\operatorname{dist}(E,F) = 0$.

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in E$, $y_n \in F$ τ.ω.

$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. (ε-χαρ/σμος του infimum)

Αφού το $\mathcal{E}$ είναι συμπαγές, $\exists\, x_{k_n} \to x \in \mathcal{E}$.

Τότε $d(y_{k_n}, x) \le d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \frac{1}{k_n} + d(x_{k_n},x) \to 0+0=0$

$\Rightarrow y_{k_n} \to x$.

Όμως $y_{k_n}\in F$ και το F είναι κλειστό, άρα $\underline{x \in F}$.

Τότε $E \underset{x}{\cap} F \neq \emptyset$, <u>άτοπο</u>.

<u>2ος Τρόπος</u>: Ορίζουμε $g: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ με $g(x)=\mathrm{dist}(x,F)>0$

$x \notin F$ κλειστό

και η g είναι συνεχής (1-Lipschitz).

Η g παίρνει ελάχιστη τιμή, (γιατί το $\mathcal{E}$ είναι συμπαγές) σε κάποιο $x_0 \in \mathcal{E}$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $\forall x\in \mathcal{E}\ \forall y\in F\quad d(x,y)\ge g(x_0)>0$ $(\Rightarrow \mathrm{dist}(\mathcal{E},F)\ge g(x_0)>0)$

Έχουμε $d(x,y)\ge \mathrm{dist}(x,F) = g(x) \ge g(x_0)$

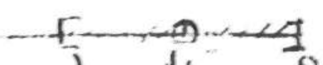
<u>Παράδειγμα</u>: Υπάρχουν <u>ξένα κλειστά</u> σύνολα με απόσταση $\underline{\underline{0}}$

π.χ. στον $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ $\quad \mathcal{E}=[0,\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}=\{q\in\mathbb{Q}: 0\le q<\sqrt{2}\}$

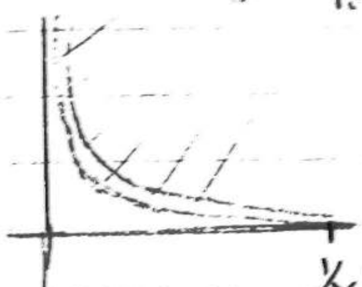
κλειστό στον $\mathbb{Q}$

$F=[\sqrt{2},2]\cap\mathbb{Q} = \{q\in\mathbb{Q}: \sqrt{2}<q\le 2\}$

$d(\mathcal{E},F)=0$



ή



$\mathcal{E}=\{(x,\frac{1}{x}): x>0\}$

$F=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$

$d(\mathcal{E},F)=0$

$1/x \to 0$

ή $\mathcal{E}=\mathbb{N}$ και $F=\{n+\frac{1}{2n}: n\in\mathbb{N}\}$

(11) Έστω (X,d) μ.χ.

(α) Αν $A_1,\dots\dots,A_m$ ολικά φραγμένα $\subseteq X \Rightarrow A_1\cup\dots\cup A_m$ είναι ολικά φραγμένο.

<u>Λύση</u>: Α.ν.δ.ο. ισχύει για δύο σύνολο (+ επαγωγή). Έστω $\varepsilon>0$

A_1 ολικά φραγμένο $\Rightarrow \exists\, x_1,\dots,x_m\in X$ τ.ω. $A_1\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon)$

A_2 ολικά φραγμένο $\Rightarrow \exists\, x_{m+1},\dots\dots,x_{m+k}\in X$ τ.ω. $A_2\subseteq \bigcup_{i=m+1}^{m+k} B(x_i,\varepsilon)$

Τότε, $A_1\cup A_2\subseteq \bigcup_{i=1}^{m+k} B(x_i,\varepsilon)$

(β) A ολικά φραγμένο $\Rightarrow \bar{A}$ ολικά φραγμένο

<u>Λύση</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο, $\exists\, m\in\mathbb{N}$ και $x_1,\dots\dots,x_m\in X$ τ.ω. $A\subseteq B\left(x_1,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\dots\cup B\left(x_m,\frac{\varepsilon}{2}\right)$

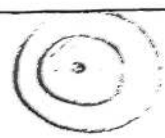
$$\Rightarrow \bar{A}\subseteq \overline{B\left(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\cup\dots\cup B\left(x_m,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)} = \overline{B\left(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}\cup\dots\cup\overline{B\left(x_m,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$\subseteq B(x_1,\varepsilon)\cup\dots\dots\cup B(x_m,\varepsilon)$$

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$

$A=\mathbb{Q},\ B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

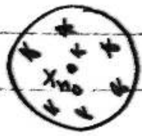


Άσκηση: Αν $0<r<s$

$\Rightarrow \overline{B(x,r)}\subseteq \hat{B}(x,r)\subseteq B(x,s)$

(13) Έστω (X,d) μ.χ. και (x_n) βασική ακολουθία. Τότε το $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο

Λύση: Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n,m \geq n_0$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. Ειδικότερα, $\forall n\geq n_0$ $d(x_n,x_{n_0})<\varepsilon$ $\Rightarrow \forall n\geq n_0$ $x_n\in B(x_{n_0},\varepsilon) \Rightarrow \{x_{n_0}, x_{n_0+1},\dots\}\subseteq B(x_{n_0},\varepsilon)$

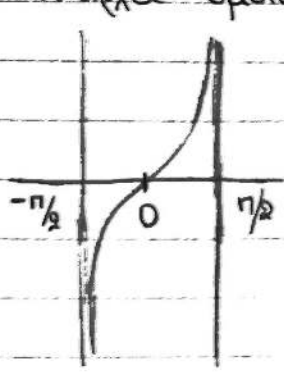


Αφού $x_1\in B(x_1,\varepsilon),\dots\dots, x_{n_0-1}\in B(x_{n_0-1},\varepsilon)$, τελικά $\{x_n : n\in\mathbb{N}\} = \{x_1\}\cup\dots\cup\{x_{n_0-1}\}\cup\{x_{n_0},\dots\dots\}\subseteq$

$$\subseteq \underbrace{B(x_1,\varepsilon)\cup\dots\cup B(x_{n_0-1},\varepsilon)\cup B(x_{n_0},\varepsilon)}_{\text{πεπερασμένες το πλήθος}}$$

(12) (β) Ν.δ.ο. η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς

Λύση: Υπάρχει ομοιομορφισμός $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική



η $f(x)=\tan x$ (συνεχής 1-1 και επί με συνεχή αντίστροφη την $\arctan x$)

Γενικά: $\boxed{\text{Ολικά φραγμένο} \Rightarrow \text{φραγμένο}}$

Το $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο, άρα δεν είναι ολικά φραγμένο. Το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι ολικά φραγμένο

Πράγματι, ① $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

② Το $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι συμπαγές $\Rightarrow$ ολικά φραγμένο.

③ Γενικά, αν $A\subseteq B\subseteq(X,d)$ και το B -»-
$\Rightarrow A$ είναι ολικά φραγμένο

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός (σύγκλιση κατά σημείο): Έστω $X \neq \emptyset$ και $f_n, f: X \to (Y,d)$. Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνουσα κατά σημείο στην f, αν $\forall x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$. Τότε γράφουμε $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$

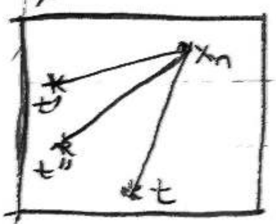
Σημείωση: (α) Συνήθως, το X θα είναι μ.χ. (X,d).
(β) Συνήθως, $Y = \mathbb{R}$, δηλ. $f_n, f: (X,d) \to \mathbb{R}$.
(γ) Αρκετά συχνά, $X =$ διάστημα του $\mathbb{R}$

Πρόβλημα

Μας δίνεται η (f_n) και ρωτάμε αν $\exists f$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$

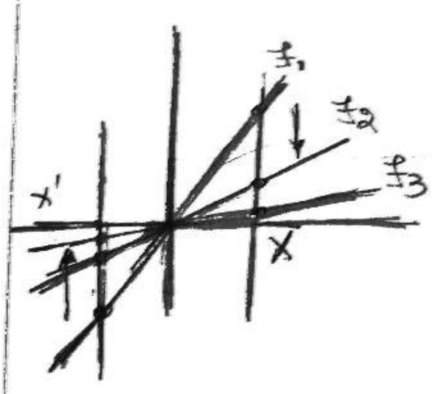
Παραδείγματα

① Έστω (X,d) μ.χ. και (x_n) ακολουθία στον X τ.ω. $x_n \xrightarrow{d} x \in X$.
Ορίζουμε (f_n), $f_n: X \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = d(t, x_n)$



Παρατηρούμε ότι $\forall t \in X$ ισχύει: (*) $d(t, x_n) \to d(t,x)$
[γιατί $|d(t,x_n) - d(t,x)| \leq d(x_n, x) \to 0$]
Ορίζουμε $f: X \to \mathbb{R}$ με $f(t) \overset{ορσ}{=} d(t,x)$.
Από την (*) $\forall t \in X$ $f_n(t) \to f(t)$, δηλ. $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$

② $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.



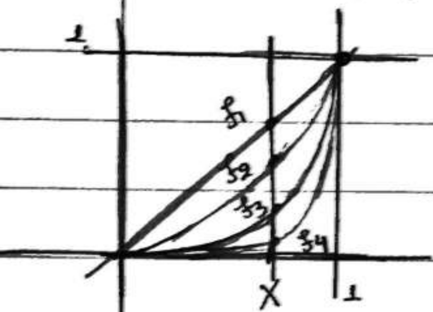
Σταθεροποιώ $x \in \mathbb{R}$. Τότε $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$
Δηλ. $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, όπου $f(x) = 0$.

③ $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n^2}$

Έστω $x \geq 0$. Έχουμε $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n^2} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{x}{n^2}+1} \to \dfrac{0}{0+1} = 0$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f(x)=0$, $x \geq 0$.

④ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$



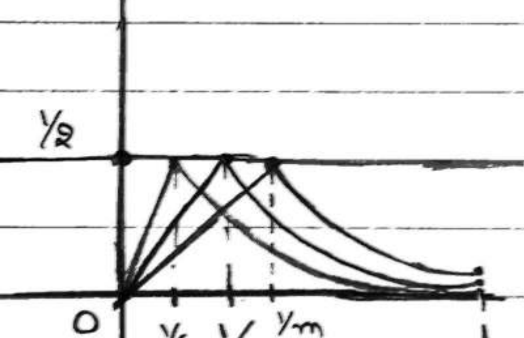
Έστω $0 \leq x < 1$. Τότε $\overset{f_n(x)}{\overbrace{x^n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Αν $x=1$, τότε $f_n(x) = 1^n = 1 \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

<u>Παρατήρηση</u>: Όλες οι f_n είναι συνεχείς, αλλά η f είναι ασυνεχής στο σημείο 1

⑤ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+nx}, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \dfrac{nx}{2}, & 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$



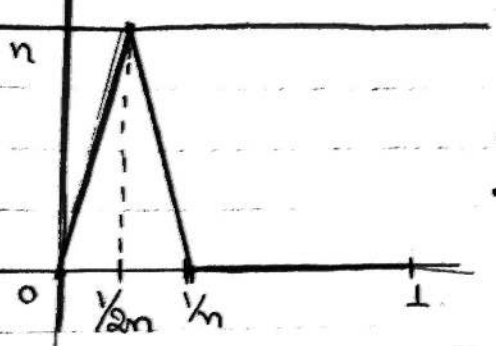
- Αν $x=0$, τότε $f_n(x) = f_n(0) = \dfrac{n \cdot 0}{2} = 0 \to 0$
- Αν $x>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\dfrac{1}{n_0} < x$.

Τότε <u>$\forall n \geq n_0$</u> έχουμε $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} \leq x < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx} \Rightarrow f_n(x) \to 0$, γιατί $\dfrac{1}{1+nx} \to 0$

Τελικά, $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,1]$, δηλ. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f \equiv 0$

⑥ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$



Έστω $x \in [0,1]$.

• Αν $x = 0$, τότε $f_n(x) = f_n(0) = 2n^2 \cdot 0 = 0 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

• Αν $0 < x \le 1$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < x$.

Τότε $\forall n \ge n_0$ έχουμε $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < x < 1$

$\Rightarrow f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$.

Άρα, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, όπου $f \equiv 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}}_{\frac{β \cdot υ}{2}} \not\to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\int_0^1 f(x)\,dx}$

<u>Ορισμός</u> (ομοιόμορφη σύγκλιση): Έστω $f_n, f : X \to (Y, σ)$.
Λέμε ότι η (f_n) <u>συγκλίνει</u> <u>ομοιόμορφα</u> στην f και $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, αν "$\forall ε > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0$ και $\underline{\forall x \in X}$ $σ(f(x), f_n(x)) < ε$"

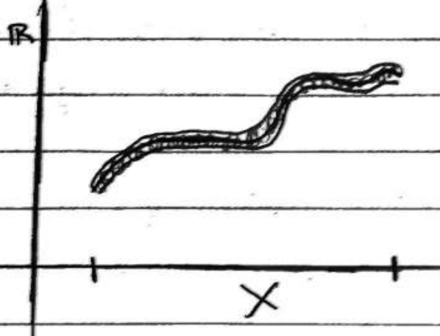
<u>Κατά σημείο σύγκλιση</u>

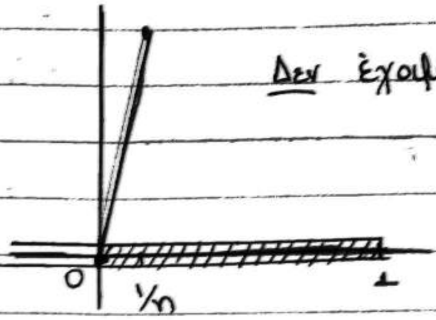
$f_n \xrightarrow{κ.σ.} f \Leftrightarrow \forall x \in X \ f_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall ε > 0$
$\underline{\exists n_0 = n_0(ε, x)} : \forall n \ge n_0 \ \ σ(f_n(x), f(x)) < ε$.

<u>Ομοιόμορφη σύγκλιση</u>

$f_n \xrightarrow{ομ.} f \Leftrightarrow \forall ε > 0 \ \ \underline{\exists n_0 = n_0(ε)} : \forall n \ge n_0 \ \forall x \in X$
$σ(f_n(x), f(x)) < ε$

<u>Ειδική Περίπτωση</u>: $f_n, f: X \to \mathbb{R}$
$f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\in X\} \leq \varepsilon \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N}$:
$\forall n\geq n_0 \ \|f_n-f\|_\infty \leq \varepsilon \iff \|f_n-f\|_\infty \to 0$





<u>Δεν έχουμε ομ. σύγκλιση</u>

<u>Πρόταση 1</u>

Αν $f_n, f: X \to (Y,\sigma)$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, τότε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x\in X$. Θέλουμε ν.δ.ο. $f_n(x) \to f(x)$.
Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ τω. $\forall n\geq n_0$
$\forall y\in X \ \sigma(f_n(y), f(y))<\varepsilon \xrightarrow[\text{για το } x]{\text{ειδικότερα}} \forall n\geq n_0 \ \sigma(f_n(x), f(x))<\varepsilon$.
Άρα, $f_n(x) \to f(x)$.

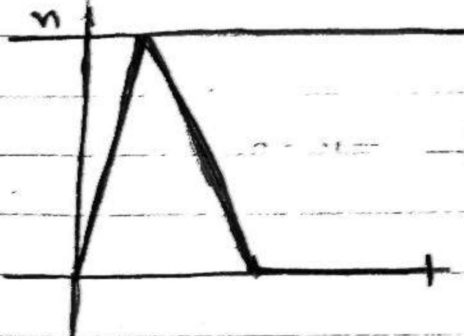
<u>Μέθοδος</u>: Μας δίνουν $f_n: (X,d) \to \mathbb{R}$. (Σταθεροποιούμε το x και κοιτάμε αν $\exists \lim f_n(x)$ όπως στα παραδ. 1-6)

<u>Βήμα 1ο</u>: Εξετάζουμε, αν $\exists f$ τω. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ (όπως παρ. 1-6)

(<u>Βήμα 1'ο</u>: Από την Πρόταση 1, αν $\exists g: f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$, τότε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} g$. Όμως, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$, άρα $\forall x\in X$
$f(x)=\lim f_n(x) = g(x)$, δηλ. $g=f$.
Άρα, το μοναδικό υποψήφιο ομοιόμορφο όριο της (f_n) είναι το κατά σημείο όριο f.)

Βήμα 2ο : Εξετάζουμε αν $f_n \xrightarrow{ομ} f$.
Τρόπος: Υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty$ (μελέτη συνάρτησης; σταθεροποιούμε το n και μελετάμε την $f_n - f$)
Αν $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση, αλλιώς όχι

Παράδειγμα 6



Είδαμε ότι $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \to 0 = f(x)$
Υπολογίζουμε την $\|f_n - \cancel{f}\|_\infty = \|f_n\|_\infty$
$= \sup\{ |f_n(x)| : x \in [0,1] \} = n \to +\infty \neq 0$
Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση 4

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = n^p t (1-t^2)^n$ ($p > 0$, παράμετρος)

Λύση: Βήμα 1ο : Αν $t = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$.
Αν $0 < t \leq 1$ έχουμε $\frac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = \frac{(n+1)^p \cdot t (1-t^2)^{n+1}}{n^p \cdot t (1-t^2)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p (1-t^2)$

$\to 1 \cdot (1-t^2) < 1$, για $t > 0$. Από κριτήριο λόγου: $f_n(t) \to 0$.
Τελικά, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f \equiv 0$
$f_n \geq 0$
Βήμα 2ο : Υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty = \max\{ f_n(t) : 0 \leq t \leq 1 \}$
Μελετάμε την f_n : παραγωγίζουμε
$f_n'(t) = n^p (1-t^2)^n - n^p t \cdot n (1-t^2)^{n-1} \cdot 2t =$
$= n^p (1-t^2)^{n-1} [1 - t^2 - 2nt^2] = n^p (1-t^2)^{n-1} [1 - (1+2n)t^2] = 0,$
όταν $t = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$

$+ \quad \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \quad -$

Άρα, $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n$

$\cdot \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n = \left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}_{\to 1/e}\right]^{\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{e}}$

Διακρίναμε περιπτώσεις:

- $0 < p < \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = 0$
- $p = \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$
- $p > \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to +\infty \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to +\infty$

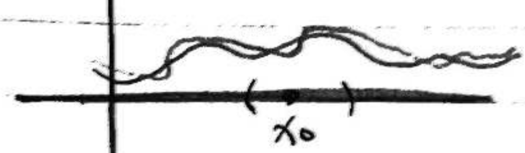
Άρα, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, όταν $0 < p < 1/2$.
Τότε και μόνο τότε έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Πρόταση 2

Έστω $f_n, f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ και όλες οι f_n είναι συνεχείς στο $x_0 \in X$.
Τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.

Θεώρημα

Έστω $f_n : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, όπου $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$, τότε και η f είναι συνεχής.



<u>Απόδειξη</u> (Πρότασης 2): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \xrightarrow{ομ} f$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in X \quad \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon/3$ (*)

Η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, άρα

$\exists \delta > 0$ τ.ω. αν $d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (**)

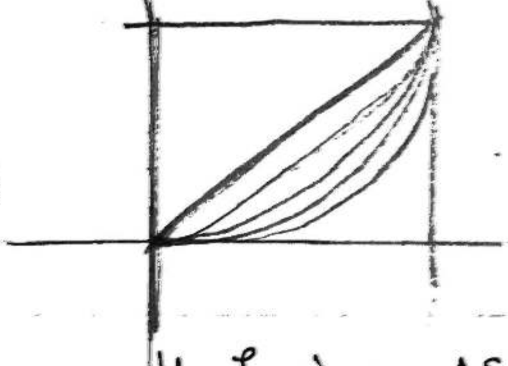
Έστω $x \in X$ με $d(x,x_0)<\delta$. Τότε

$$\sigma(f(x), f(x_0)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$$
$$\overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \overset{(**)}{\frac{\varepsilon}{3}} + \overset{(*)}{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon$$

<u>Κριτήριο μη-ομοιόμορφης σύγκλισης</u>

Αν f_n συνεχής, f συνεχής και $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, τότε η σύγκλιση <u>δεν</u> μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

<u>Παράδειγμα 4</u>



$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. Είδαμε ότι $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, όπου
$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Η f είναι ΑΣΥΝΕΧΗΣ στο 1. Άρα η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη.

Ομοιόμορφη Σύγκλιση και Ολοκλήρωμα

Πρόταση 3

Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.
Υποθέτουμε ότι όλες οι f_n είναι ολοκληρώσιμες.
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f_n(t)\,dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt$

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.
Παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (*)

$\forall t$ $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Η f_{n_0} είναι ολοκληρώσιμη $\xRightarrow[\text{Riemann}]{\text{Κριτ.}}$ $\exists P$ διαμέριση του $[a,b]$

τ.ω. $U(f_{n_0}, P) - L(f_{n_0}, P) < \varepsilon$. Από την (*) έπεται ότι:
$|U(f,P) - U(f_{n_0},P)| < \varepsilon$ και $|L(f,P) - L(f_{n_0},P)| < \varepsilon$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(M_k(f) - M_k(f_{n_0})\right)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} (x_{k+1} - x_k)$$

Συνεπώς, $U(f,P) - L(f,P) \leq |U(f,P) - U(f_{n_0},P)| +$
$+ U(f_{n_0},P) - L(f_{n_0},P) + |L(f_{n_0},P) - L(f,P)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$.
Από το Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.
Τέλος, $\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|_\infty\,dt = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0} \cdot (b-a) \to 0$$

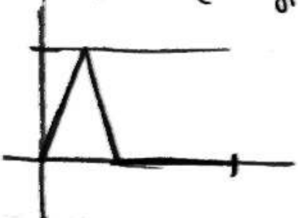
αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Παρατήρηση

Αν $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ και $\int_a^b f_n(t)\,dt \not\to \int_a^b f(t)\,dt$, τότε

η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη

π.χ. Παράδειγμα 6



$f_n \to 0 = f$. $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \not\to 0 = \int_0^1 f$

Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

Παράδειγμα

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$

- $f_n \xrightarrow{ομ.} 0$, $\|f_n - 0\|_\infty = \sup\left\{ \underbrace{\left|\frac{1}{n}\sin(nx)\right|}_{\le \frac{1}{n}} : x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{n}$ και ισχύει ισότητα, αν $nx = \frac{\pi}{2}$
- $f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \cos(nx)$ - Δεν Συγκλίνει για κανένα $x \in (0,1)$

Έστω ότι $\cos(nx) \to a \in [-1,1]$

$\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y$

$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 \Rightarrow \cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1$

$a = 2a^2 - 1 \Rightarrow 2a^2 - a + 1 = 0$

$\frac{1 \pm 3}{4}$ $\to 1$, $-1/2$

Έστω ότι $\cos(nx) \to 1 \Rightarrow \underbrace{\cos^2(nx)}_{\downarrow\, 1} + \sin^2(nx) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(nx) \to 0$.

$1 \leftarrow \cos((n+1)x) = \cos(nx)\cdot\cos x - \sin(nx)\cdot\sin x \to \cos x$

Άρα, $\cos x = 1$, άτοπο, γιατί $x \in (0,\pi)$

Στην σχέση: $\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y \Rightarrow \cos(3nx) =$

$= 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx) \Rightarrow a = 4a^3 - 3a \Rightarrow a = a^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$ ή $a = -1$ ή $a = 0$.

Συνδυάζω τις λύσεις που βρήκα από την εξίσωση $2a^2 - a + 1 = 0$ και έχω ότι $a = 1$ μοναδική κοινή λύση

Πρόταση 4

Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$.

Υποθέτουμε επίσης ότι οι f_n είναι παραγωγίσιμες με f_n' συνεχείς και

$f_n \xrightarrow{ομ.} g$ για κάποια $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$.

Απόδειξη: $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x \in [a,b]$ έχουμε $\underbrace{f_n(x)}_{\downarrow\, f(x)} - \underbrace{f_n(a)}_{\downarrow\, f(a)} = \underbrace{\int_a^x f_n'(t)\,dt}_{\downarrow\, \int_a^x g(t)\,dt}$

από την κ.σ. σύγκλιση

Προτ 3

Άρα, $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt \Rightarrow f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t)\,dt}$

παρ/μη, γιατί g συνεχής ως ομοιόμορφο όριο των συνεχών f_n'

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη και από το Θ.Θ $f'(x) = g(x)$

Ομοιόμορφη Σύγκλιση και Πράξεις μεταξύ Συναρτήσεων

Έστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ και $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$ | $f_n, f, g_n, g : (X, d) \to \mathbb{R}$

Τότε : (i) $f_n + g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f + g$

(ii) $\lambda f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \lambda f$

(iii) $f_n g_n \xrightarrow[?]{\text{ομ.}} f \cdot g$
ΟΧΙ

Βασικές Ιδιότητες της $\|\cdot\|_\infty$

(α) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

(β) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

(γ) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Για το (γ) $\forall x \in X$ έχουμε $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

$\Rightarrow \|fg\|_\infty = \sup\{|f(x)g(x)| : x \in X\} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Οι (α) και (β) παρομοίως.

Απόδειξη : (i) $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} g \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f_n + g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f + g$

και $\|(f_n+g_n) - (f+g)\|_\infty = \|(f_n - f) + (g_n - g)\|_\infty \overset{(\alpha)}{\leq}$

$\overset{(\alpha)}{\leq} \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0,\ \text{γιατί}\ f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f} + \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{0,\ \text{γιατί}\ g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g} \to 0$

Άρα, $f_n + g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f + g$.

23/12/21

ΚΑΤΑ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Έστω $f_n, f: (X,d) \to \mathbb{R}$

- $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \overset{\text{ορσ}}{\iff} \forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$
- $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \overset{\text{ορσ}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \; \forall x \in X \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\iff \|f_n - f\|_\infty \to 0.$

όπου $\|h\|_\infty = \sup\{|h(x)| : x \in X\}$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ & ΠΡΑΞΕΙΣ

Λήμμα

$$\left.\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \|\lambda f\|_\infty &= |\lambda| \, \|f\|_\infty \end{aligned}\right\} \text{η } \|\cdot\|_\infty \text{ είναι νόρμα}$$

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

Πρόταση

$f_n, f, g_n, g : (X,d) \to \mathbb{R} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Έστω ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ και $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$

(α) $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \lambda f + \mu g$

(β) Δεν ισχύει γενικά ότι $f_n g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} fg$

(γ) Αν οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \cdot g$

Απόδειξη: (α) $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_\infty = \|\lambda(f_n - f) + \mu(g_n - g)\|_\infty$
$\leq \|\lambda(f_n - f)\|_\infty + \|\mu(g_n - g)\|_\infty = |\lambda| \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0} + |\mu| \underbrace{\|g_n - g\|}_{0} \to 0$

(γ) Αφού οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες, $\exists M, N > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq N$.

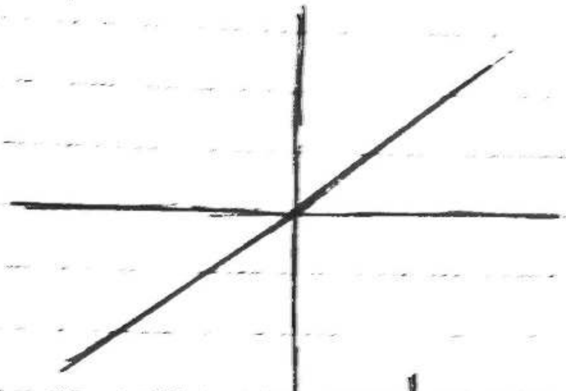
Γράφουμε $\|f_n g_n - fg\|_\infty = \|f_n(g_n - g) + g_n(f_n - f)\|_\infty \leq$
$\leq \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|g_n(f_n - f)\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty$
$\leq \underbrace{M}_{\text{σταθ.}} \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|g\|_\infty}_{\text{σταθ.}} \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\downarrow\, 0} \to 0.$

Σημείωση: Μάλιστα για την απόδειξη αρκεί η μία από τις (f_n), (g_n) να είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

$\forall x \in X$ $\quad |f(x)| = \lim \underbrace{|f_n(x)|}_{\le M} \le M$,

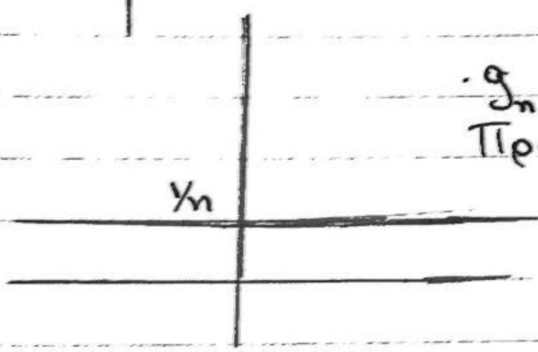
δηλ. $\|f\|_\infty \le M$. Ομοίως $\|g\|_\infty \le N$

(β) $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$



· $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, όπου $f(x) = x$

Πράγματι, $\|\underbrace{f_n - f}_{0}\|_\infty = 0 \to 0$



· $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$, όπου $g(x) \equiv 0$

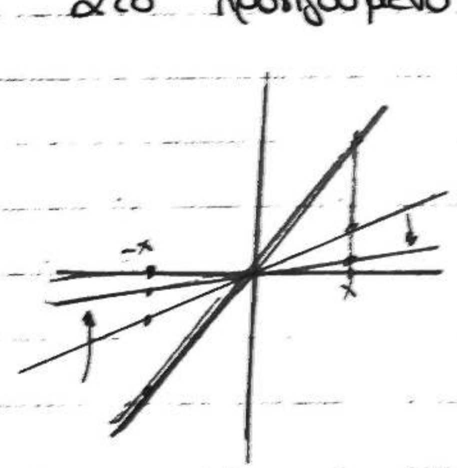
Πράγματι, $\|\underbrace{g_n - g}_{\text{η σταθερή συνάρτηση } \frac{1}{n}}\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

Έχουμε $(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) = x \cdot \frac{1}{n} = \frac{x}{n}$.

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι $f_n g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

Όμως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη:

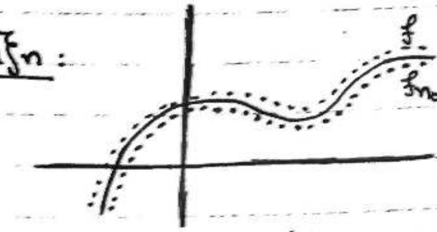
$\|f_n g_n - 0\|_\infty = \left\|\frac{x}{n}\right\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty \not\to 0$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(13) $f_n, f : (X,d) \to (Y,\sigma)$, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.
Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall x \in X$
$\sigma\left(f_{n_0}(x), f(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. $(*)$

Η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\forall x,y \in X$ με $d(x,y) < \delta$ ισχύει $^{(**)}$ $\sigma\left(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$

Έστω $x,y \in X$ με $d(x,y) < \delta$. Τότε,

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma\left(f(x), f_{n_0}(x)\right) + \sigma\left(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)\right) + \sigma\left(f_{n_0}(y), f(y)\right) \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3} \overset{(**)}{+} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}^{(*)} = \varepsilon$$

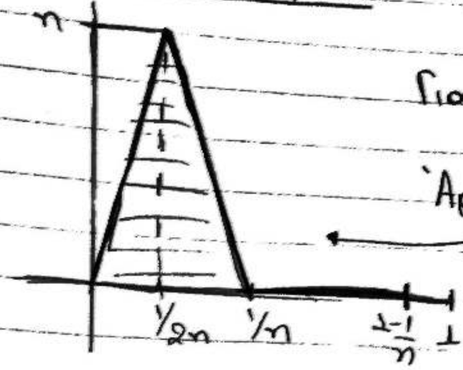
(21) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ για κάποια $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Ν.δ.ο. $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$.

Ισχύει το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

Λύση: Αφού οι f_n συνεχείς και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ έχουμε ότι και η f είναι συνεχής.

Έχουμε
$$\left|\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \left|\int_0^{1-\frac{1}{n}} \left(f_n(t) - f(t)\right) dt\right| + \left|\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty}\,dt + \int_{1-1/n}^{1} \underbrace{|f(t)|}_{\|f\|_\infty}\,dt$$
$$\leq \|f_n - f\|_\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|f_n - f\|_\infty} + \underset{\substack{\swarrow \\ 0}}{\frac{\|f\|_\infty}{n}} \to 0$$

Παράδειγμα



Για $n \geq 2$ έχουμε $\frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Άρα $\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{2}$

Όμως, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$ και $\int_0^1 0\,dt = 0$

(5) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$
Ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

$|f_n(x) - f(x)|$
$\overset{\shortparallel}{\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right|} < \varepsilon$ $\forall x$

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (*)
Επιλέγουμε n_0: $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$

• Έστω $n \geq n_0$ και $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\Big|\underbrace{\left(x + \frac{1}{n}\right)}_{y} - x\Big| = \frac{1}{n} < \delta \xrightarrow{(*)} \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$$

δηλ. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(39) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία θετικών αριθμών με $\delta_n \to 0$. Ορίζουμε
$f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)\,dt$.

Ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

Λύση: Γράφουμε $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)\,dt - \overbrace{\frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(x)\,dt}^{f(x)} \right|$

$\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\,dt$ (*)

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta>0$ τ.ω. αν $u,v\in\mathbb{R}$ και $|u-v|<\delta \Rightarrow |f(u)-f(v)|<\varepsilon$.
Αφού $\delta_n \to 0$ $\exists n_0 : \forall n\geq n_0 \quad 0<\delta_n<\delta$.
• Έστω $n\geq n_0$ και $x\in\mathbb{R}$. Τότε $|f_n(x)-f(x)| \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n}|f(t)-f(x)|\,dt$

Όμως, $\forall\, t\in[x,x+\delta_n]$ έχουμε $|t-x|\leq \delta_n<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x)|<\varepsilon$.
Άρα, $|f_n(t)-f(x)| \leq \frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n}\varepsilon\, dt = \frac{1}{\cancel{\delta_n}}\cdot\varepsilon\cdot\cancel{\delta_n}$.

Δηλ. $\forall n\geq n_0 \quad \|f_n-f\|_\infty \leq \varepsilon$. Άρα, $\|f_n-f\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

37) $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=nxe^{-\sqrt{n}\,x}$
(α) $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$
(β) Εξετάστε αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$ σε κάθε διάστημα $[a,+\infty)$, $a>0$.

Βασικές ανισότητες

$$e^y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\dots$$

• Αν $y>0$ έπεται ότι: • $e^y>y$ • $e^y>\frac{y^2}{2}$ • $e^y>\frac{y^3}{6}$ • $e^y>\frac{y^4}{24}$

οπότε $e^{\sqrt{n}\cdot x} > \frac{(\sqrt{n}\,x)^4}{24}=\frac{n^2x^4}{24}$ $(*)$

Λύση: (α) • Αν $x=0$, τότε $f_n(0)=0\to 0$
• Αν $x>0$, τότε $f_n(x)=\frac{nx}{e^{\sqrt{n}\,x}} \underset{(*)}{<} \frac{24nx}{n^2x^4}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{24}{n}\to 0$

Συνεπώς, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

Μελετάμε την $|f_n|=f_n$, δηλ. την $nxe^{-\sqrt{n}\,x}$
$f_n'(x)=ne^{-\sqrt{n}\,x}-nx\cdot\sqrt{n}\,e^{-\sqrt{n}\,x}=ne^{-\sqrt{n}\,x}(1-\sqrt{n}\,x)$

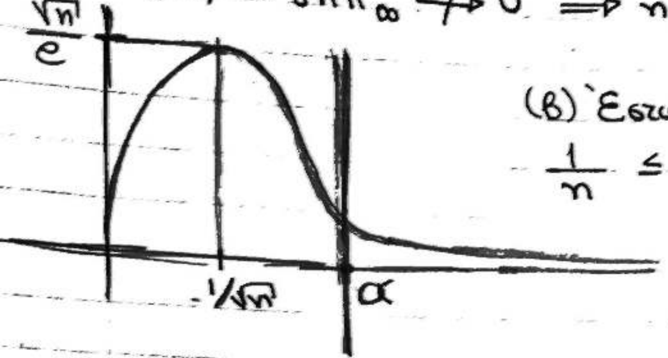
$+ \quad 1/\sqrt{n} \quad -$ max στο $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\|f_n-0\|_\infty=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot e^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{e}\to+\infty\neq 0$
Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

<u>Παρατήρηση</u>: Θα μπορούσαμε "με το μάτι" να δώσαμε μεγάλη τιμή της $|f_n|$.

π.χ. $\|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq e^{-1}$, γιατί $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$.

Άρα, $\|f_n\|_\infty \not\to 0 \Rightarrow$ η σύγκλιση <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφη.



(β) Έστω $a>0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < a$. Έστω $n \geq n_0$.

Μελετάμε την $f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}$ στο $[a,+\infty)$.

Έχουμε δει ότι $f_n'(x) < 0$ στο $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n' < 0$ στο $[a,+\infty)$. Άρα, η $f_n \downarrow$ στο $[a,+\infty)$.

Τότε $\underset{\text{στο } [a,+\infty)}{\|f_n\|_\infty} = \max\limits_{t \geq a} f_n(t) = f_n(a) = \frac{na}{e^{\sqrt{n}a}} < \frac{24na}{n^2a^4} =$

$= \frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

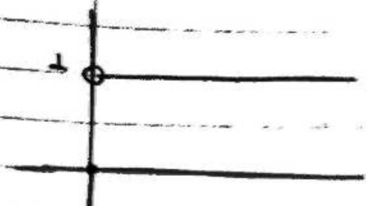
Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$ στο $[a,+\infty)$.
Η απάντηση είναι: ΝΑΙ για $a>0$.

38 $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

(α) Ν.δ.ο. η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο.
Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;
(β) Ν.δ.ο. $\forall a>0$ $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[a,+\infty)$ αλλά η σύγκλιση <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφη στο $[0,a]$.

<u>Λύση</u>: (α) • Κατά σημείο όριο
Για $x=0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$
Για $x>0$ έχουμε $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x+1/n} \to \frac{x}{x+0} = \frac{x}{x} = 1$

Άρα, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, όπου $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$



f ασυνεχής στο 0.

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$, γιατί όλες οι f_n <u>είναι</u> συνεχείς στο $[0,+\infty)$, ενώ η f <u>όχι</u>.

(β) <u>Έστω $a>0$</u>

① Στο $[0,a]$ δεν ισχύει $f_n \xrightarrow{ομ} f$, γιατί $\forall n$ f_n συνεχής στο $[0,a]$, ενώ η f ασυνεχής στο 0.

② Στο $[a,+\infty)$ έχουμε $f\equiv 1$. Υπολογίζουμε την $\|f_n-f\|_\infty$ όπου $\|f_n-f\|_\infty=\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\geq a\}$.
Έχουμε: $|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1}-1\right| = \left|\frac{-1}{nx+1}\right| = \frac{1}{nx+1} \leq$

$\leq \frac{1}{na+1}$. Δηλ. $\|f_n(x)-f(x)\|_\infty = \frac{1}{na+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Ισοδύναμα, $f_n \xrightarrow{ομ.} f$ στο $[a,+\infty)$

35 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. $f_n \xrightarrow{ομ.} f$. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.
Αν κάθε f_n έχει ρίζα. Ν.δ.ο. και η f έχει ρίζα.

<u>Υπόθεση</u>: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in[0,1]$ τω. $f_n(x_n)=0$

<u>Ζητούμενο</u>: $\exists x_0\in[0,1]$ τω. $f(x_0)=0$

<u>Λύση</u>: · Η (x_n) είναι ακολουθία στο $[0,1]$, άρα έχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x_0 \in [0,1]$

"Βρήκαμε" το x_0

$\boxed{\begin{array}{l} b_n=\|f_n-f\|_\infty \to 0 \\ b_{k_n}=\|f_{k_n}-f\|_\infty \to 0 \end{array}}$

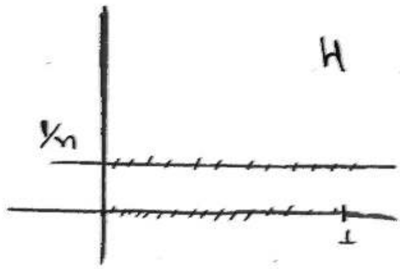
$|f(x_0)| \leq |f(x_0)-f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})|$
$\leq |f(x_0)-f(x_{k_n})| + \|f-f_{k_n}\|_\infty \to 0$

(από Α.Μ. για τη συνεχή f, αφού $x_{k_n}\to x_0$) (γιατί $f_{k_n} \xrightarrow{ομ} f$)

Άρα, $|f(x_0)|=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0)=0$.

(9) (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση.
(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο σε μη ολ/μη συνάρτηση.

Λύση: (α) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

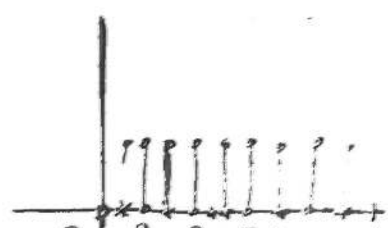


Η f_n είναι ασυνεχής παντού.

$\| f_n - 0 \|_\infty = \| f_n \|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \equiv 0$ ← συνεχής.

(β) Γράφουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_n : n \in \mathbb{N} \}$ "αρίθμηση $\mathbb{Q} \cap [0,1]$"
$\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$



Η f_n είναι ολ/μη, γιατί είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Δ.ο. $f_n(x) \to \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

δηλ. στη συνάρτηση Dirichlet του $[0,1]$ που ξέρουμε ότι δεν είναι ολ/μη.

(α) $x \notin \mathbb{Q}$ $\quad \forall n \ x \notin \{q_1, \dots, q_n\} \Rightarrow \forall n \ f_n(x) = 0$.
Άρα $f_n(x) = 0 \to 0$

(β) $x \in \mathbb{Q}$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x = q_{n_0}$
$\forall n \geq n_0$ έχουμε $x = q_{n_0} \in \{q_1, \dots, q_n\}$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ f_n(x) = 1$.
Άρα $f_n(x) = 1$ τελικά $\Rightarrow f_n(x) \to 1$

(22) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^2 x (1-x)^{nx}$. Εξετάστε την.

Λύση: • Για $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$
• Για $0 < x \leq 1$: $\sqrt[n]{f_n(x)} = \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\to 1} (1-x)^x \longrightarrow (1-x)^x = e^{x \ln(1-x)} < 1$

Από κριτήριο της ρίζας, $f_n(x) \to 0$, δηλ. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$. (γιατί $x > 0$ & $\ln(1-x) < 0$)
• $\| f_n \|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - 1 \to +\infty$.
Άρα, $f_n \not\to 0$ ομοιόμορφα.