Άσκηση 8 Κεφαλαίου 2 σημειώσεων Βαλέττα

Η μετάδοση διακόπηκε στο τέλος της Άσκησης γιατί τελείωσε ο χρόνος. Ακολουθεί το δεύτερο μέρος της λύσης, όπως έγινε στον πίνακα.

Έστω $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$, με $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots) = (x_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $x_k(n) \to x_k$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου $x_k \in X_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x(n) \to x$ καθώς $n \to \infty$, ως προς την μετρική d, δηλαδή ότι $d(x(n), x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, όπου $x = (x_1, x_2, \dots) = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας[1] ότι $\varepsilon < 2$. Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ συγκλίνει, υπάρχει $K \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$. Επειδή $x_k(n) \to x_k$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $d_k(x_k(n), x_k) < \delta_k$ για όλα τα $n \geqslant n_k(\varepsilon)$, όπου $\delta_k > 0$ θα προσδιοριστεί αργότερα συναρτήσει του ε. Θέτουμε $n(\varepsilon) := \max\{n_1(\varepsilon), \dots, n_K(\varepsilon)\}$. Παρατηρήστε ότι αν $n \geqslant n(\varepsilon)$, τότε $n \geqslant n_k(\varepsilon)$ για κάθε $k \in \{1, \dots, K\}$ και άρα $d_k(x_k(n), x_k) < \delta_k$ για κάθε $k \in \{1, \dots, K\}$.

Παρατηρήστε επίσης ότι η συνάρτηση $f(t) := t/(1+t)$, $t > -1$, είναι γνησίως αύξουσα αφού $f'(t) = 1/(1+t)^2 > 0$ για κάθε t. Έπεται ότι

$$\frac{d_k(x_k(n), x_k)}{1 + d_k(x_k(n), x_k)} < \frac{\delta_k}{1 + \delta_k}$$

και κάθε $n \geqslant n(\varepsilon)$, για κάθε $k \in \{1, \dots, K\}$. Επομένως, για $n \geqslant n(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} d(x(n), x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k(n), x_k)}{1 + d_k(x_k(n), x_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k(n), x_k)}{1 + d_k(x_k(n), x_k)} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k(n), x_k)}{1 + d_k(x_k(n), x_k)} \\ \left(\text{επειδή επίσης } \frac{d_k(x_k(n), x_k)}{1 + d_k(x_k(n), x_k)} < 1\right) \qquad &< \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{\delta_k}{1 + \delta_k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &< \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{\delta_k}{1 + \delta_k} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ζητάμε τώρα

$$\frac{\delta_k}{1 + \delta_k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

για καθε $k \in \{1, \dots, K\}$· αυτό επιτυγχάνεται αν πάρουμε

$$\delta_k := \frac{\varepsilon/2}{1 - \varepsilon/2} \qquad \text{για κάθε } k \in \{1, \dots, K\}.$$

Τότε

$$d(x(n), x) < \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant n(\varepsilon)$, αφού

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

[1] Αν για κάθε $\varepsilon \in (0, 2)$ υπάρχει $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x(n), x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n(\varepsilon)$, τότε σταθεροποιούμε ένα $\varepsilon \in (0, 2)$, το $\varepsilon = 1.99$ παραδείγματος χάριν, και τότε για κάθε $\varepsilon \geqslant 1.99$ θα έχουμε ότι $d(x(n), x) < 1.99 \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n(1.99)$, και άρα μπορούμε να πάρουμε για $n(\varepsilon)$ το $n(1.99)$ για όλα τα $\varepsilon \geqslant 1.99$, άρα και για και για όλα τα $\varepsilon \geqslant 2$ ειδικότερα.