Πραγματική Ανάλυση
Ασκήσεις (2015–16)

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
2015-16

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μετρικοί χώροι

Ομάδα Α΄

1.1. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in X$.

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\| - x\| = \|(-1)x\| = |-1| \cdot \|x\| = \|x\|$. Συνεπώς, η νόρμα $\| \cdot \|$ είναι άρτια συνάρτηση.

Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|, \ \text{ άρα } \ \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$$

και

$$\|y\| = \|(y-x) + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\|, \ \text{ άρα } \ \|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Έπεται ότι

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x - y\|.$$

1.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y)$ *για κάθε $x, y, z \in X$.*

(β) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w)$ *για κάθε $x, y, z, w \in X$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y, z \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής έχουμε

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z) - \rho(y,z) \leqslant \rho(x,y),$$
$$\rho(y,z) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,z) \Rightarrow \rho(y,z) - \rho(x,z) \leqslant \rho(y,x).$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε

$$|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y).$$

(β) Αν $x,y,z,\in X$, από την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \leqslant |\rho(x,y)-\rho(z,y)| + |\rho(z,y)-\rho(z,w)|$$

Όμως, από το (α) ισχύει

$$|\rho(x,y)-\rho(z,y)| + |\rho(z,y)-\rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,w).$$

1.3. *Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\sigma(a,b)=\sqrt{|a-b|}$. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{R},\sigma)$ είναι μετρικός χώρος.*

Γενικότερα, δείξτε ότι: αν $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και αν θεωρήσουμε την $d: X\times X\to\mathbb{R}$ με

$$d(x,y)=\sqrt{\|x-y\|},\quad x,y\in X,$$

τότε ο (X,d) είναι μετρικός χώρος.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε το γενικότερο αποτέλεσμα: αν $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, η $d(x,y)=\sqrt{\|x-y\|}$ είναι μετρική στο X.

Οι πρώτες δύο ιδιότητες της μετρικής ελέγχονται άμεσα: για κάθε $x,y\in X$ έχουμε $d(x,y)=\sqrt{\|x-y\|}\geqslant 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\|x-y\|=0$, δηλαδή αν και μόνο αν $x=y$. Επίσης,

$$d(y,x)=\sqrt{\|y-x\|}=\sqrt{\|x-y\|}=d(x,y)$$

αφού η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση: $\|y-x\|=\|x-y\|$.

Για την τριγωνική ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα, το γεγονός ότι η $t\mapsto\sqrt{t}$ είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$ και την ανισότητα $\sqrt{t+s}\leqslant\sqrt{t}+\sqrt{s}$, $t,s\geqslant 0$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα με ύψωση στο τετράγωνο. Έστω $x,y,z\in X$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{\|x-z\|}=\sqrt{\|(x-y)+(y-z)\|}\leqslant\sqrt{\|x-y\|+\|y-z\|} \\ &\leqslant \sqrt{\|x-y\|}+\sqrt{\|y-z\|}=d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

1.4. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1=\min\{d,1\}$, $\rho_2=\frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha=d^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ είναι μετρικές στο X.*

Υπόδειξη. Ελέγχουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα:

(α) Έστω $x, y, z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, άρα

$$\rho_1(x,z) = \min\{d(x,z), 1\} \leqslant \min\{d(x,y) + d(y,z), 1\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\min\{d(x,y) + d(y,z), 1\} \leqslant \min\{d(x,y), 1\} + \min\{d(y,z), 1\}. \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι $\min\{t+s, 1\} \leqslant \min\{t, 1\} + \min\{s, 1\}$ για κάθε $t, s \geqslant 0$ (αυτή εξασφαλίζει την (1)). Για την τελευταία ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t, s < 1$ (διότι το αριστερό μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 1). Όμως τότε, η ανισότητα παίρνει τη μορφή $\min\{t+s, 1\} \leqslant t + s$, δηλαδή ισχύει και πάλι.

(β) Έστω $x, y, z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, άρα

$$\rho_2(x,z) = \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} \leqslant \frac{d(x,y) + d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)},$$

διότι η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ είναι αύξουσα στο $[0, \infty)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\frac{d(x,y) + d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} \leqslant \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(y,z)}. \tag{2}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leqslant \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s}$$

για κάθε $t, s \geqslant 0$ (αυτή εξασφαλίζει την (2)).

(γ) Έστω $x, y, z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, άρα

$$d_\alpha(x,z) = d(x,z)^\alpha \leqslant (d(x,y) + d(y,z))^\alpha.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$(d(x,y) + d(y,z))^\alpha \leqslant d(x,y)^\alpha + d(y,z)^\alpha. \tag{3}$$

Δείξτε ότι $(x+1)^\alpha \leqslant x^\alpha + 1$ για $x > 0$ (μελετώντας κατάλληλη συνάρτηση). Από αυτήν έπεται η $(t+s)^\alpha \leqslant t^\alpha + s^\alpha$ για κάθε $t, s > 0$ (αν θέσουμε $x = t/s$) η οποία εξασφαλίζει την (3).

1.5. *Αν d_1, d_2 είναι μετρικές στο σύνολο X εξετάστε αν οι $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Αν η d είναι μετρική στο X, είναι η d^2 μετρική στο X;*

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι $d_1 + d_2$ και $\max\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Ας δούμε μόνο την τριγωνική ανισότητα για την $\rho = \max\{d_1, d_2\}$: έστω $x, y, z \in X$. Έχουμε $\rho(x, z) = d_1(x, z)$ ή $\rho(x, z) = d_2(x, z)$. Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε

$$\rho(x, z) = d_1(x, z) \leqslant d_1(x, y) + d_1(y, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

ενώ στη δεύτερη,

$$\rho(x, z) = d_2(x, z) \leqslant d_2(x, y) + d_2(y, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Η $d = \min\{d_1, d_2\}$ δεν είναι απαραίτητα μετρική. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: στο $[0, \infty)$ θεωρούμε τις μετρικές $d_1(x, y) = |x - y|$ και $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$ (η d_2 είναι η μετρική d_f που επάγει στο $[0, \infty)$ η 1-1 συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^2$). Θα δείξουμε ότι η τριγωνική ανισότητα δεν ικανοποιείται από την τριάδα $0, \frac{1}{2}, 2$: έχουμε

$$\begin{aligned} d(0, 1/2) &= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}, \\ d(1/2, 2) &= \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right\} = \frac{3}{2}, \\ d(0, 2) &= \min\{2, 4\} = 2, \end{aligned}$$

άρα

$$d(0, 2) = 2 > \frac{7}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = d(0, 1/2) + d(1/2, 2).$$

Αν η d είναι μετρική στο X, τότε η d^2 δεν είναι απαραίτητα μετρική στο X. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνήθης μετρική $d(x, y) = |x - y|$ στο $\mathbb{R}$. Αν η d^2 ήταν μετρική θα έπρεπε, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ανισότητα

$$(x - z)^2 \leqslant (x - y)^2 + (y - z)^2.$$

Δοκιμάστε την τριάδα $x = 0$, $y = 2$, $z = 10$: θα παίρναμε $100 \leqslant 4 + 64$, το οποίο δεν ισχύει.

1.6. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της διαμέτρου:*

(α) $\mathrm{diam}(A) = 0$ *αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή το A είναι μονοσύνολο (δηλαδή, $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$).*

(β) *Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε* $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(B)$.

(γ) *Αν $A, B \subseteq X$ τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$$

Ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$$

για κάθε ζευγάρι υποσυνόλων A, B του X;

(δ) *Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δείξτε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο (έχει το πολύ ένα στοιχείο).*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Αν $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$ τότε είναι φανερό ότι $\mathrm{diam}(A) = 0$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A) \geqslant \rho(x, y) > 0$.

(β) Αν $x, y \in A$ τότε $x, y \in B$, άρα $\rho(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(B)$. Έπεται ότι $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} \leqslant \mathrm{diam}(B)$.

(γ) Αφού $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, έχουμε $\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \mathrm{diam}(A)$ και $\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \mathrm{diam}(B)$ (από το (β)). Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$\min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}.$$

Για την τελευταία ανισότητα παρατηρούμε ότι $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, άρα $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$ και $\mathrm{diam}(B) \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B)$ (από το (β)). Έπεται ότι

$$\max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leqslant \mathrm{diam}(A \cup B).$$

Η ανισότητα $\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$ δεν ισχύει γενικά: θεωρήστε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) που έχει τουλάχιστον δύο σημεία $x \neq y$. Αν θέσουμε $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$ τότε $A \cup B = \{x, y\}$ και

$$\mathrm{diam}(A \cup B) = d(x, y) > 0 = \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Σημείωση: Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε η ανισότητα ισχύει: θεωρήστε $w \in A \cap B$. Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$d(x, y) \leqslant d(x, w) + d(w, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Αν $x, y \in A$ ή $x, y \in B$, είναι προφανές ότι $d(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$. Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

(δ) Έστω $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A_n) \geqslant \rho(x, y) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ καταλήγουμε στην $0 = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{diam}(A_n) \geqslant \rho(x, y) > 0$, άτοπο.

1.7. *Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, ρ) είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a, x_0) \leqslant r$ για κάθε $a \in A$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι φραγμένο. Επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in A$ και θέτουμε $r = \mathrm{diam}(A) + 1 > 0$. Τότε, για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\rho(a, x_0) \leqslant \mathrm{diam}(A) < r.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a, x_0) \leqslant r$ για κάθε $a \in A$. Τότε, για κάθε $a, b \in A$ έχουμε

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_0) + \rho(x_0, b) \leqslant r + r = 2r.$$

Συνεπώς, το A είναι φραγμένο και $\mathrm{diam}(A) \leqslant 2r$.

1.8. Έστω $A_1, \ldots, A_k$ φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ). Δείξτε ότι το σύνολο $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ είναι επίσης φραγμένο.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν A και B είναι φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ) τότε το $A \cup B$ είναι φραγμένο. Στη συνέχεια, με επαγωγή βλέπουμε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση φραγμένων συνόλων είναι φραγμένο σύνολο.

Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και $y_0 \in B$. Τότε, αν $x \in A$ ισχύει $\rho(x, x_0) \leqslant \mathrm{diam}(A)$ και αν $y \in B$ ισχύει $\rho(y, y_0) \leqslant \mathrm{diam}(B)$. Θεωρούμε $x, y \in A \cup B$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) Αν $x, y \in A$ τότε $\rho(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(A)$.

(ii) Αν $x, y \in B$ τότε $\rho(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(B)$.

(iii) Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + \rho(x_0, y_0) + \mathrm{diam}(B).$$

Έπεται ότι: αν θέσουμε $M = \mathrm{diam}(A) + \rho(x_0, y_0) + \mathrm{diam}(B)$, τότε $\rho(x, y) \leqslant M$ για κάθε $x, y \in A \cup B$. Συνεπώς, το $A \cup B$ είναι φραγμένο.

Ομάδα Β΄

1.9. (α) *Έστω $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι υποπροσθετική, δηλ. $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \geqslant 0$. Δείξτε ότι: αν η d είναι μετρική στο X τότε και η $f \circ d$ είναι μετρική στο X.*

(β) *Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις ακόλουθες ιδιότητες είναι ικανή να εξασφαλίσει την υποπροσθετικότητα της f:*

(i) Η f είναι κοίλη συνάρτηση.

(ii) Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα.

(γ) *Εφαρμογές: Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι μετρικές στο X.*

Υπόδειξη. (α) Από την υπόθεση έχουμε $f(t) \geqslant 0$ για κάθε $t \geqslant 0$ και $f(t) = 0$ αν και μόνο αν $t = 0$. Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in X$, $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) \geqslant 0$ και ισχύει ισότητα αν και μόνο αν $d(x, y) = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$ (διότι η d είναι μετρική).

Η συμμετρική ιδιότητα είναι προφανής: για κάθε $x, y \in X$,

$$(f \circ d)(y, x) = f(d(y, x)) = f(d(x, y)) = (f \circ d)(x, y)$$

όπου η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι $d(y, x) = d(x, y)$.

Για την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για την d, την υπόθεση ότι η f είναι αύξουσα και την υπόθεση ότι η f είναι υποπροσθετική: για κάθε $x, y, z \in X$ έχουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned} (f \circ d)(x, z) &= f(d(x, z)) \leqslant f(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leqslant f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z). \end{aligned}$$

(β) Δείχνουμε πρώτα ότι αν η f είναι κοίλη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα. Έστω $y > x > 0$. Από το «λήμμα των τριών χορδών» για την κοίλη συνάρτηση f στα σημεία $0, x, y$ παίρνουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \frac{f(y) - f(0)}{y},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \geqslant f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \geqslant 0.$$

Η τελευταία ανισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι $f(0) \geqslant 0$ και $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ (αφού $x < y$).

Δείχνουμε τώρα ότι αν η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα τότε η f είναι υποπροσθετική. Έστω $x, y \geqslant 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$. Αν $x = 0$ ή $y = 0$, η ανισότητα ελέγχεται εύκολα (χρησιμοποιήστε και το γεγονός ότι $f(0) \geqslant 0$). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x > 0$ και $y > 0$. Τότε, $x + y > x$ και $x + y > y$, άρα

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leqslant \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \frac{f(x+y)}{x+y} \leqslant \frac{f(y)}{y}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{x}{x+y} f(x+y) \leqslant f(x) \quad \text{και} \quad \frac{y}{x+y} f(x+y) \leqslant f(y).$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες και παρατηρώντας ότι $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1$ βλέπουμε ότι

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι η (i) έχει ως συνέπεια την (ii), η οποία με τη σειρά της αρκεί για να εξασφαλίσουμε την υποπρσθετικότητα της f.

(γ) Εφαρμογές: Δίνεται ο μετρικός χώρος (X,d) και θέλουμε να δείξουμε ότι οι $\rho_1=\min\{d,1\}$, $\rho_2=\frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha=d^\alpha$ ($0<\alpha<1$) είναι μετρικές στο X. Σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, αρκεί να παρατηρήσετε ότι οι συναρτήσεις $f(t)=\min\{t,1\}$, $g(t)=\frac{t}{1+t}$ και $h_\alpha(t)=t^\alpha$ ($0<\alpha<1$) – ορισμένες στο $[0,\infty)$ – είναι κοίλες, αύξουσες, παίρνουν την τιμή 0 στο 0 και γνήσια θετικές τιμές για $t>0$. Κάντε ένα σχήμα για καθεμιά από αυτές.

1.10. (*Ανισότητα Holder για συναρτήσεις*) *Έστω $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και p,q συζυγείς εκθέτες (δηλ. $p,q>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Δείξτε ότι*

$$\int_0^1|f(t)g(t)|\,dt\leqslant\left(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1|g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p=\int_0^1|f(t)|^p\,dt=1\ \text{ και }\ \|g\|_q^q=\int_0^1|g(s)|^q\,ds=1.$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει

$$|f(t)g(t)|\leqslant\frac{1}{p}|f(t)|^p+\frac{1}{q}|g(t)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ παίρνουμε

$$\int_0^1|f(t)g(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{p}\int_0^1|f(t)|^p\,dt+\frac{1}{q}\int_0^1|g(t)|^q\,dt=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1=\|f\|_p\|g\|_q.$$

Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p\neq 0$ και $\|g\|_q\neq 0$ (αλλιώς $f\equiv 0$ ή $g\equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1=\frac{f}{\|f\|_p}\ \text{ και }\ g_1=\frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1|f_1(t)|^p\,dt=\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_0^1|f(t)|^p\,dt=1\ \text{ και }\ \int_0^1|g_1(t)|^q\,dt=\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_0^1|g(t)|^q\,dt=1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_0^1 |f_1(t)g_1(t)|\,dt \leqslant 1, \quad \text{δηλαδή,} \quad \int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

1.11. *Έστω* $1 \leqslant p < \infty$. *Δείξτε ότι ο χώρος* $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$ *με*

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

είναι χώρος με νόρμα.

Υπόδειξη. Δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα (Minkowski): έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)+g(t)|\,dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|\,dt + \int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|\,dt \\
&\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}\|f\|_p + \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}\|g\|_p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Holder για τα ζευγάρια $f+g, f$ και $f+g, g$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Συνεπώς,

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

1.12. *Θεωρούμε τον χώρο* $\mathcal{S}$ *όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω* (m_n) *ακολουθία θετικών αριθμών, με* $\sum_n m_n < +\infty$. *Ορίζουμε απόσταση* d *στον* $\mathcal{S}$ *ως εξής: αν* $x = (x(n))$, $y = (y(n)) \in \mathcal{S}$, *θέτουμε*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|}.$$

Δείξτε ότι ο $(\mathcal{S}, d)$ είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

Υπόδειξη. Η d είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $x = (x(k))$ και $y = (y(k)) \in \mathcal{S}$, τότε

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty.$$

Αυτό δείχνει επίσης ότι $\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

Από τις ιδιότητες της μετρικής, η μόνη που χρειάζεται έλεγχο είναι η τριγωνική ανισότητα: αν $x = (x(k))$, $y = (y(k))$ και $z = (z(k)) \in \mathcal{S}$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\frac{t}{1+t}$ είναι υποπροσθετική και $|x(k)-y(k)| \leqslant |x(k)-z(k)| + |z(k)-y(k)|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και προσθέτοντας ως προς k αφού πολλαπλασιάσουμε με τους θετικούς αριθμούς m_k, έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|x(k)-z(k)|}{1+|x(k)-z(k)|} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|z(k)-y(k)|}{1+|z(k)-y(k)|} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Τέλος, αν πάρουμε $x_M = (M, \dots, M, \dots)$ όπου $M > 0$, και $y = (0, \dots, 0, \dots)$, έχουμε

$$\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) \geqslant d(x_M, y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{M}{1+M} = \frac{M}{1+M} \sum_{k=1}^{\infty} m_k,$$

και αφού $\frac{M}{1+M} \nearrow 1$ όταν το $M \to \infty$, παίρνουμε

$$\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) \geqslant \lim_{M\to\infty} d(x_M, y) = \lim_{M\to\infty} \frac{M}{1+M} \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_k.$$

Δηλαδή, $\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

1.13. *Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ είναι ένα πολυώνυμο από το $\mathcal{P}$, το ύψος του p είναι το*

$$h(p) = \max\{|a_i| : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

(α) *Δείξτε ότι ο $\mathcal{P}$ είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο και η συνάρτηση $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.*

(β) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, με*

$$\sigma(p) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.

(γ) *Δείξτε ότι $h(p) \leqslant \sigma(p) \leqslant (n+1)\cdot h(p)$ για κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n.*

Υπόδειξη. (α) Ελέγχουμε εύκολα ότι αν p, q είναι πολυώνυμα και $t \in \mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις $p+q$ και tp είναι πολυώνυμα. Συνεπώς, ο $\mathcal{P}$ είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο. Δείχνουμε ότι η $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$: αν $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ είναι ένα πολυώνυμο από το $\mathcal{P}$, είναι φανερό ότι $h(p) \geqslant 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $p \equiv 0$.

Αν $t \in \mathbb{R}$, τότε $(tp)(x) = (ta_0) + (ta_1)x + \cdots + (ta_n)x^n$. Άρα,

$$h(tp) = \max\{|ta_i| : i = 0,1,\ldots,n\} = |t|\max\{|a_i| : i = 0,1,\ldots,n\} = |t|\,h(p).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ και $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ δύο πολυώνυμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geqslant m$ και αν $n > m$ θέτουμε $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. Παρατηρήστε ότι $h(q) = \max\{|b_i| : i = 0,1,\ldots,n\}$. Τότε, $(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n$ και

$$h(p+q) = |a_j + b_j| \ \text{ για κάποιο } j \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Από την

$$|a_j + b_j| \leqslant |a_j| + |b_j| \leqslant h(p) + h(q)$$

έπεται ότι

$$h(p+q) \leqslant h(p) + h(q).$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο: είναι φανερό ότι $\sigma(p) \geqslant 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $p \equiv 0$.

Αν $t \in \mathbb{R}$, τότε $(tp)(x) = (ta_0) + (ta_1)x + \cdots + (ta_n)x^n$. Άρα,

$$\sigma(tp) = |ta_0| + |ta_1| + \cdots + |ta_n| = |t|(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|) = |t|\,\sigma(p).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ και $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ δύο πολυώνυμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geqslant m$ και αν $n > m$ θέτουμε $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. Παρατηρήστε ότι $\sigma(q) = |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|$. Τότε, $(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n$ και

$$\sigma(p+q) = \sum_{j=0}^{n}|a_j + b_j| \leqslant \sum_{j=0}^{n}(|a_j| + |b_j|) = \sum_{j=0}^{n}|a_j| + \sum_{j=0}^{n}|b_j| = \sigma(p) + \sigma(q).$$

(γ) Αν $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ υπάρχει $0 \leqslant j \leqslant n$ ώστε $h(p) = |a_j|$. Τότε, $|a_i| \leqslant |a_j|$ για κάθε $i = 0,1,\ldots,n$ και είναι φανερό ότι

$$|a_j| \leqslant |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \leqslant |a_j| + |a_j| + \cdots + |a_j| = (n+1)|a_j|,$$

δηλαδή

$$h(p) \leqslant \sigma(p) \leqslant (n+1)h(p).$$

1.14. *Θεωρούμε τον χώρο* $(\mathcal{P}, h)$ *της προηγούμενης άσκησης και τον* $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$*. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $f : (\mathcal{P}, h) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ *με*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \stackrel{f}{\longmapsto} f(p) := a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων που διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, η f *είναι 1-1, επί και ικανοποιεί τις σχέσεις*

(i) $f(p+q) = f(p) + f(q)$

(ii) $f(\lambda p) = \lambda f(p)$

(iii) $\|f(p)\|_\infty = h(p)$

για κάθε $p, q \in \mathcal{P}$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ και $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ δύο πολυώνυμα. Μπορούμε να γράψουμε τα p, q στη μορφή $p(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ και $q(x) = \sum_{k=0}^\infty b_k x^k$, όπου $a_k = 0$ αν $k > n$ και $b_k = 0$ αν $k > m$. Τότε, $(p+q)(x) = \sum_{k=0}^\infty (a_k + b_k) x^k$, άρα

$$\begin{aligned} f(p+q) &= (a_0 + b_0, \ldots, a_k + b_k, \ldots) = (a_0, \ldots, a_k, \ldots) + (b_0, \ldots, b_k, \ldots) \\ &= f(p) + f(q). \end{aligned}$$

Τελείως ανάλογα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $(\lambda p)(x) = \sum_{k=0}^\infty (\lambda a_k) x^k$, άρα

$$f(\lambda p) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_k, \ldots) = \lambda(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) = \lambda f(p).$$

Τέλος, αν $p \in \mathcal{P}$ και $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

$$\|f(p)\|_\infty = \sup\{|a_k| : k = 0, 1, 2, \ldots\} = \max\{|a_k| : k = 0, 1, \ldots, n\} = h(p).$$

Ομάδα Γ΄

1.15. *Σταθεροποιούμε έναν πρώτο αριθμό* p *και θεωρούμε το σύνολο* $\mathbb{Z}$ *των ακεραίων. Αν* $m, n \in \mathbb{Z}$ *με* $m \neq n$*, θέτουμε* $p(n, m)$ *τη μεγαλύτερη δύναμη του* p *που διαιρεί τον* $|n - m|$*, δηλαδή αν* $m \neq n$*, τότε*

$$p(m, n) = \max\{k \geqslant 0 : m \equiv n \bmod p^k\}.$$

Ορίζουμε $\sigma_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *με*

$$\sigma_p(m,n) = \begin{cases} 2^{-p(m,n)}, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}$$

Δείξτε ότι η σ_p *είναι μετρική στο* $\mathbb{Z}$ *και ο* $(\mathbb{Z}, \sigma_p)$ *είναι φραγμένος μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα

$$\sigma_p(x,z) \leqslant \sigma_p(x,y) + \sigma_p(y,z) \quad \text{για κάθε } x,y,z \in \mathbb{Z}.$$

Αν $x = z$ τότε η ανισότητα ισχύει κατά προφανή τρόπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq z$ και επομένως είτε $x \neq y$ ή $y \neq z$ (γιατί;). Αν είναι $x = y$ ή $y = z$ τότε η ανισότητα πάλι ισχύει κατά προφανή τρόπο. Ας είναι λοιπόν $x \neq y$ και $y \neq z$. Έστω $p(x,y) = a$, $p(x,z) = c$ και $p(y,z) = b$. Τότε έχουμε ότι $x \equiv y \bmod p^a$ και $y \equiv z \bmod p^b$, άρα $z \equiv x \bmod p^{\min\{a,b\}}$ και από τον ορισμό του $p(x,z)$ έχουμε ότι $\min\{a,b\} \leqslant c$. Επειδή θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2^c} \leqslant \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b},$$

αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε την

$$2^{c-a} + 2^{c-b} \geqslant 1$$

η οποία ισχύει διότι, από την $\min\{a,b\} \leqslant c$, έχουμε είτε $a \leqslant c$ ή $b \leqslant c$.

1.16. *Έστω* $\emptyset \neq A \subseteq (0, +\infty)$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρικός χώρος* (X, ρ) *ώστε*

$$A = \{\rho(x,y) : x, y \in X,\ x \neq y\}.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $X = A \cup \{0\}$ και $\rho(x,y) = \max\{x,y\}$ αν $x \neq y$ στο X, $\rho(x,y) = 0$ αν $x = y$ στο X. Ελέγχουμε πρώτα ότι η ρ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής:

(α) Αφού $x > 0$ για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $\rho(x,y) \geqslant 0$ για κάθε $x, y \in X$. Αν $x = y$ έχουμε $\rho(x,y) = 0$ ενώ αν $x \neq y$ τότε τουλάχιστον ένας από τους x, y είναι γνήσια θετικός (διότι ανήκει στο A), και συνεπώς, $\rho(x,y) = \max\{x,y\} > 0$. Ταυτόχρονα έχουμε ελέγξει ότι $\rho(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

(β) Από την $\max\{x,y\} = \max\{y,x\}$ (για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$) βλέπουμε εύκολα ότι $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ για κάθε $x, y \in X$.

(γ) Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in X$ και δείχνουμε ότι $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$: αν $x = z$ τότε το αριστερό μέλος είναι ίσο με μηδέν και η ανισότητα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq z$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < z$, άρα $\rho(x,z) = z$. Αν $y \neq z$ έχουμε $\rho(y,z) = \max\{y,z\} \geqslant z = \rho(x,z)$, άρα

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z).$$

Αν $y = z$ τότε η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,z) = \rho(x,z),$$

δηλαδή ισχύει πάλι, αυτή τη φορά ως ισότητα. Συνεπώς, η τριγωνική ανισότητα ισχύει για κάθε τριάδα x, y, z στο X.

Τώρα, ορίζουμε $B = \{\rho(x,y) : x, y \in X,\, x \neq y\}$ και αποδεικνύουμε ότι $A = B$. Έστω $x \in A$. Τότε, $x = \max\{0, x\} = \rho(0, x)$, δηλαδή $x \in B$. Αυτό αποδεικνύει ότι $A \subseteq B$. Αντίστροφα, αν $b \in B$ έχουμε $b = \rho(x,y) = \max\{x,y\}$ για κάποια $x \neq y$ στο $X = A \cup \{0\}$. Αφού $b > 0$, ο μεγαλύτερος από τους x και y είναι θετικός αριθμός, άρα ο b ανήκει στο A. Αυτό αποδεικνύει ότι $B \subseteq A$.

1.17. *Θεωρούμε τους χώρους ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και c_0.*

(α) *Δείξτε ότι: αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ τότε $\ell_p \subseteq \ell_q$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.*

(β) *Δείξτε ότι: αν $1 \leqslant p < \infty$ τότε $\ell_p \subseteq c_0$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.*

(γ) *Να βρεθεί ακολουθία $x = (x(n))$ που συγκλίνει στο 0 αλλά δεν ανήκει σε κανέναν ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$. Με άλλα λόγια, ο c_0 περιέχει γνήσια την ένωση $\bigcup\{\ell_p : 1 \leqslant p < \infty\}$.*

(δ) *Να βρεθεί ακολουθία $x = (x(n))$ ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (x(n)) \in \ell_p$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$, άρα $|x(n)|^p \to 0$. Δηλαδή, $|x(n)| \to 0$. Έπεται ότι: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x(n)| < 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αφού $p < q$, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $|x(n)|^q \leqslant |x(n)|^p$. Από το κριτήριο σύγκρισης, $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q < +\infty$, δηλαδή $x \in \ell_q$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\ell_p \subseteq \ell_q$.

Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος: αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{n^{1/p}}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \;\text{ ενώ }\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}} < +\infty$$

διότι $q/p > 1$. Άρα, $x \in \ell_q \setminus \ell_p$.

(β) Έστω $x = (x(n)) \in \ell_p$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$, άρα $|x(n)|^p \to 0$. Δηλαδή, $|x(n)| \to 0$. Άρα, $x \in c_0$. Μια μηδενική ακολουθία που δεν ανήκει στον ℓ_p είναι η $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{n^{1/p}}$ (δείτε παραπάνω).

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{\log(n+1)}$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$, έχουμε $x \in c_0$.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $p \geqslant 1$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x(n)|^p}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{[\log(n+1)]^p} = +\infty.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$, το κριτήριο σύγκρισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p=+\infty,\ p\geqslant 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $p\geqslant 1$ ισχύει $x\notin \ell_p$.

(δ) Ελέγξτε ότι η ακολουθία $x=(x(n))$ με $x(n)=\frac{1}{n}$ έχει αυτή την ιδιότητα.

1.18. *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών $x=(x(n))$ με $|x(n)|\leqslant 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

(α) *Δείξτε ότι η*

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}|x(n)-y(n)|$$

ορίζει μετρική στο $\mathcal{H}^\infty$.

(β) *Αν $x,y\in\mathcal{H}^\infty$ και $k\in\mathbb{N}$, θέτουμε $M_k=\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x(k)-y(k)|\}$. Δείξτε ότι*

$$2^{-k}M_k\leqslant d(x,y)\leqslant 2^{-k+1}+M_k.$$

Υπόδειξη. (α) Η d ορίζεται καλά: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x,y\in\mathcal{H}^\infty$ έχουμε

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x(n)-y(n)|}{2^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}=2<+\infty$$

διότι $|x(n)-y(n)|\leqslant |x(n)|+|y(n)|\leqslant 2$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Είναι φανερό ότι $d(x,y)\geqslant 0$ για κάθε $x,y\in\mathcal{H}^\infty$. Επίσης, $d(x,y)=0$ αν και μόνο αν $|x(n)-y(n)|=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(n)=y(n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x=y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της d παρατηρούμε ότι, αν $x,y\in\mathcal{H}^\infty$,

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x(n)-y(n)|}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|y(n)-x(n)|}{2^n}=d(y,x).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x,y,z\in\mathcal{H}^\infty$ και παρατηρούμε ότι

$$d(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x(n)-z(n)|}{2^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x(n)-y(n)|}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|y(n)-z(n)|}{2^n}=d(x,y)+d(y,z)$$

διότι $|x(n)-z(n)|\leqslant |x(n)-y(n)|+|y(n)-z(n)|$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(β) Έστω $x,y\in\mathcal{H}^\infty$ και $k\in\mathbb{N}$. Γράφουμε

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{k}\frac{|x(n)-y(n)|}{2^n}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|x(n)-y(n)|}{2^n}.$$

Υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant k$ ώστε

$$|x_j - y_j| = M_k = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x(k) - y(k)|\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{M_k}{2^k} \leqslant \frac{M_k}{2^j} = \frac{|x_j - y_j|}{2^j} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{M_k}{2^n} = M_k \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} < M_k$$

και

$$0 \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Προσθέτοντας, συμπεραίνουμε ότι

$$2^{-k} M_k \leqslant d(x,y) \leqslant 2^{-k+1} + M_k.$$

1.19. *Θεωρούμε τη μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 = 1\}$ στον $\mathbb{R}^m$. Ορίζουμε «απόσταση» $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{m-1}$ να είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Δείξτε ότι: αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε*

$$\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi} \rho(x,y) \leqslant \|x - y\|_2 \leqslant \rho(x,y), \qquad x, y \in S^{m-1}.$$

Είναι η ρ μετρική στην S^{m-1};

Υπόδειξη. Θεωρούμε το τρίγωνο xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Αν z είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $[x, y]$, το μήκος του $[x, z]$ ή του $[z, y]$ ισούται με

$$\frac{\|x - y\|_2}{2} = \sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right).$$

Συνεπώς,

$$\rho(x,y) = 2 \arcsin\left(\frac{\|x - y\|_2}{2}\right).$$

Από την ανισότητα

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t \leqslant t, \qquad t \in [0, \pi/2]$$

είναι φανερό ότι, για κάθε $x, y \in S^{m-1}$,

$$\|x - y\|_2 = 2\sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right) \leqslant \rho(x,y)$$

και

$$\|x - y\|_2 = 2\sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right) \geqslant \frac{4}{\pi}\frac{\rho(x,y)}{2} = \frac{2}{\pi}\rho(x,y).$$

Η ρ είναι μετρική στην S^{m-1} (η «γεωδαισιακή» μετρική). Η μόνη ιδιότητα της μετρικής που χρειάζεται έλεγχο είναι η τριγωνική ανισότητα: παρατηρούμε πρώτα ότι, αν θέσουμε $\theta = \rho(x,y)$, τότε

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2) = 1 - 2\frac{\|x-y\|_2^2}{4} = \frac{2 - \|x\|_2^2 + 2\langle x,y\rangle - \|y\|_2^2}{2} = \langle x,y\rangle,$$

όπου $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^m x_iy_i$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$. Συνεπώς, η ρ μπορεί να εκφραστεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$\rho(x,y) = \arccos(\langle x,y\rangle), \qquad x, y \in S^{m-1}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι: αν $x, y, z \in S^{m-1}$ τότε

$$\arccos(\langle x,z\rangle) \leqslant \arccos(\langle x,y\rangle) + \arccos(\langle y,z\rangle).$$

Θέτουμε $\phi = \arccos(\langle x,y\rangle)$ και $\psi = \arccos(\langle y,z\rangle)$. Αν $\phi + \psi \geqslant \pi$ η ανισότητα ισχύει, υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 \leqslant \phi + \psi < \pi$. Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ είναι φθίνουσα. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle x,z\rangle \geqslant \cos(\phi+\psi) = \cos\phi\,\cos\psi - \sin\phi\,\sin\psi,$$

δηλαδή

$$\langle x,z\rangle \geqslant \langle x,y\rangle\langle y,z\rangle - \sqrt{1 - \langle x,y\rangle^2}\sqrt{1 - \langle y,z\rangle^2}.$$

Δείχνουμε ότι

$$|\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle - \langle x,z\rangle| \leqslant \sqrt{1 - \langle x,y\rangle^2}\sqrt{1 - \langle y,z\rangle^2}$$

ως εξής: μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x, y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αλλιώς $x = y$ και η ανισότητα προκύπτει ως ισότητα διότι τα δύο μέλη μηδενίζονται. Με κατάλληλη επιλογή ορθοκανονικής βάσης $\{e_1, e_2\}$ στον υπόχωρο που παράγουν τα x, y έχουμε $y = e_1$ και $x = t_1e_1 + t_2e_2$ με $t_1^2 + t_2^2 = 1$. Το z γράφεται κι αυτό στη μορφή $z = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3$, όπου το e_3 είναι μοναδιαίο και κάθετο στα e_1, e_2 αν το z είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα x, y (αλλιώς $s_3 = 0$) και $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$. Τώρα, η ανισότητα που ζητάμε γράφεται στη μορφή

$$|t_1s_1 - (t_1s_1 + t_2s_2)| \leqslant \sqrt{1 - t_1^2}\,\sqrt{1 - s_1^2},$$

δηλαδή

$$t_2^2 s_2^2 \leqslant (1 - t_1^2)(1 - s_1^2).$$

Όμως,

$$(1 - t_1^2)(1 - s_1^2) = t_2^2(s_2^2 + s_3^2) \geqslant t_2^2 s_2^2$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 2

Σύγκλιση ακολουθιών και συνέχεια συναρτήσεων

Ομάδα Α΄

2.1. *Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια μετρικών χώρων. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρικές γινόμενο στο $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$:*

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, 2, \ldots, k\}$$

και

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} [d_i(x(i), y(i))]^p \right)^{1/p}, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(k))$, $y = (y(1), \ldots, y(k))$.

Υπόδειξη. (α) Για την ρ_∞: είναι φανερό ότι $\rho_\infty(x, y) \geqslant 0$ για κάθε $x, y \in X$ (διότι $d_i(x(i), y(i)) \geqslant 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, αφού κάθε d_i είναι μετρική στο X_i). Επίσης, $\rho_\infty(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $d_i(x(i), y(i)) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(i) = y(i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της ρ_∞ χρησιμοποιούμε τη συμμετρική ιδιότητα των d_i: αν $x, y \in X$ έχουμε $d_i(x(i), y(i)) = d_i(y(i), x(i))$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \rho_\infty(x, y) &= \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, \ldots, k\} \\ &= \max\{d_i(y(i), x(i)) : i = 1, \ldots, k\} \\ &= \rho_\infty(y, x). \end{aligned}$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in X$. Υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $\rho_\infty(x, z) = d_{i_0}(x(i_0), z(i_0))$. Από την τριγωνική ανισότητα για την d_{i_0} έχουμε

$$d_{i_0}(x(i_0), z(i_0)) \leqslant d_{i_0}(x(i_0), y(i_0)) + d_{i_0}(y(i_0), z(i_0)) \leqslant \rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z).$$

Συνεπώς,

$$\rho_\infty(x,z) = d_{i_0}(x(i_0), z(i_0)) \leqslant \rho_\infty(x,y) + \rho_\infty(y,z).$$

Για να δείξουμε ότι η ρ_∞ είναι μετρική γινόμενο πρέπει να δείξουμε ότι: αν (x_m) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$, τότε

$$\lim_{m\to\infty} \rho_\infty(x_m, x) = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i), x(i)) = 0 \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, k.$$

Η κατεύθυνση $(\Rightarrow)$ έπεται άμεσα από το γεγονός ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, k$,

$$d_i(x_m(i), x(i)) \leqslant \rho_\infty(x_m, x).$$

Για την άλλη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι

$$\rho_\infty(x_m, x) \leqslant \sum_{i=1}^k d_i(x_m(i), x(i))$$

και ότι, αν $\lim\limits_{m\to\infty} d_i(x_m(i), x(i)) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ τότε

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^k d_i(x_m(i), x(i)) = \sum_{i=1}^k \lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i), x(i)) = 0.$$

(β) Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Είναι φανερό ότι $\rho_p(x,y) \geqslant 0$ για κάθε $x, y \in X$. Επίσης, $\rho_p(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $d_i(x(i), y(i)) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(i) = y(i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της ρ_p χρησιμοποιούμε τη συμμετρική ιδιότητα των d_i: αν $x, y \in X$ έχουμε $d_i(x(i), y(i)) = d_i(y(i), x(i))$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Συνεπώς,

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i), y(i))]^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^k [d_i(y(i), x(i))]^p \right)^{1/p} = \rho_p(y,x).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in X$. Εφαρμόζουμε πρώτα την τριγωνική ανισότητα για κάθε d_i: έχουμε

$$d_i(x(i), z(i)) \leqslant d_i(x(i), y(i)) + d_i(y(i), z(i)), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Από την ανισότητα του Minkowski,

$$\begin{aligned}\rho_p(x,z) &= \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i),z(i))]^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i),y(i))+d_i(y(i),z(i))]^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i),y(i))]^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^k [d_i(y(i),z(i))]^p\right)^{1/p}\\ &= \rho_p(x,y)+\rho_p(y,z).\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι η ρ_p είναι μετρική γινόμενο πρέπει να δείξουμε ότι: αν (x_m) είναι ακολουθία στον X και $x\in X$, τότε

$$\lim_{m\to\infty}\rho_p(x_m,x)=0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i),x(i))=0 \text{ για κάθε } i=1,\dots,k.$$

Η κατεύθυνση $(\Rightarrow)$ έπεται άμεσα από το γεγονός ότι, για κάθε $i=1,\dots,k$,

$$d_i(x_m(i),x(i))\leqslant \rho_p(x_m,x).$$

Για την άλλη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι, αν $\lim\limits_{m\to\infty} d_i(x_m(i),x(i))=0$ για κάθε $i=1,\dots,k$, τότε

$$\lim_{m\to\infty}[\rho_p(x,y)]^p=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^k[d_i(x_m(i),x(i))]^p=\sum_{i=1}^k\lim_{m\to\infty}[d_i(x_m(i),x(i))]^p=0.$$

2.2. *Έστω (x_n) και (y_n) βασικές ακολουθίες στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η $\alpha_n=\rho(x_n,y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Η (x_n) είναι βασική, άρα υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon/2$ για κάθε $n,m\geqslant n_1$. Ομοίως, η (y_n) είναι βασική, άρα υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_n,y_m)<\varepsilon/2$ για κάθε $n,m\geqslant n_2$.

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ και παρατηρούμε ότι: αν $n,m\geqslant n_0$ τότε

$$|\alpha_n-\alpha_m|=|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leqslant \rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Συνεπώς, η (α_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

2.3. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με*

$$E_n=\{x_k : k\geqslant n\},\ n=1,2,\dots$$

και την ακολουθία

$$t_n = \sup\{d(x_k, x_n) : k \geqslant n\} \in [0, +\infty],\ n = 1, 2, \dots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η (x_n) είναι βασική.

(β) $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) $t_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geqslant n_0$. Θεωρούμε τυχόν $n \geqslant n_0$ και $k, m \geqslant n$. Τότε $k, m \geqslant n_0$, άρα $\rho(x_k, x_m) < \varepsilon$. Έπεται ότι $\mathrm{diam}(E_n) = \sup\{\rho(x_k, x_m) : k, m \geqslant n\} \leqslant \varepsilon$. Δείξαμε ότι $\mathrm{diam}(E_n) \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{diam}(E_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Θεωρούμε τυχόν $n \geqslant n_0$. Για κάθε $k \geqslant n$ έχουμε $k, n \geqslant n$, άρα $\rho(x_k, x_n) \leqslant \mathrm{diam}(E_n) < \varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\rho(x_k, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $k \geqslant n$, άρα $t_n = \sup\{\rho(x_k, x_n) : k \geqslant n\} \leqslant \varepsilon$. Δείξαμε ότι $t_n \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $t_n \to 0$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t_n < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $k \geqslant n \geqslant n_0$ έχουμε $\rho(x_k, x_n) \leqslant t_n < \varepsilon$. Ομοίως, για κάθε $n \geqslant k \geqslant n_0$ έχουμε $\rho(x_k, x_n) \leqslant t_k < \varepsilon$. Άρα, για κάθε $k, n \geqslant n_0$ ισχύει $\rho(x_k, x_n) \leqslant \max\{t_n, t_k\} < \varepsilon$. Έπεται ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

2.4. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) και έστω $x \in X$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν η (x_n) συγκλίνει στο x τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.*

(β) *Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) συγκλίνει στο x, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m \geqslant n_0$, $\rho(x_m, x) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι: αν $n \geqslant n_0$ τότε $k_n \geqslant n \geqslant n_0$. Συνεπώς, $\rho(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Δηλαδή, η (x_{k_n}) συγκλίνει στο x.

(β) Υποθέτουμε ότι η (x_n) δεν συγκλίνει στο x. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s \geqslant m$ ώστε $\rho(x_s, x) \geqslant \varepsilon$.

Ορίζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ως εξής: θέτουμε $m = 1$ και επιλέγουμε $k_1 \geqslant 1$ ώστε $\rho(x_{k_1}, x) \geqslant \varepsilon$. Θέτουμε $m = k_1 + 1$ και επιλέγουμε $k_2 \geqslant k_1 + 1 > k_1$ ώστε $\rho(x_{k_2}, x) \geqslant \varepsilon$. Συνεχίζουμε επαγωγικά: αν έχουμε επιλέξει $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε $\rho(x_{k_j}, x) \geqslant \varepsilon$

για κάθε $j = 1, \dots, n$, θέτουμε $m = k_n + 1$ και επιλέγουμε $k_{n+1} \geqslant k_n + 1 > k_n$ ώστε $\rho(x_{k_{n+1}}, x) \geqslant \varepsilon$.

Η υπακολουθία (x_{k_n}) δεν έχει υπακολουθία η οποία να συγκλίνει στο x, διότι όλοι οι όροι της έχουν απόσταση τουλάχιστον ίση με ε από το x. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

2.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X \times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο d. Δείξτε ότι η $\rho : (X \times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $X \times X$ και $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y) \in X$, τότε $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$. Αν όμως η d είναι μετρική γινόμενο, από την $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y)$ έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Από γνωστή πρόταση, αυτό έχει σαν συνέπεια την $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ (θυμηθείτε την ανισότητα $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y)$).

2.6. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n \to x$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ με $g(y) = \rho(y, x)$. Παρατηρήστε ότι η g είναι συνεχής: αυτό προκύπτει άμεσα με τον ορισμό της συνέχειας, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε $y, z \in X$,

$$|g(y) - g(z)| = |\rho(y, x) - \rho(z, x)| \leqslant \rho(y, z).$$

Από την υπόθεση έχουμε $g(x_n) \to g(x)$, δηλαδή

$$\rho(x_n, x) \to \rho(x, x) = 0$$

όταν το $n \to \infty$. Άρα, $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Ομάδα Β΄

2.7. *Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leqslant 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε το*

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \Big\{ x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) : \; x(n) \in X_n \Big\}.$$

Δηλαδή, ο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες οι οποίες στη n-οστή θέση έχουν στοιχείο του X_n. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)).$$

Δείξτε ότι ο (X,d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

Υπόδειξη. Η d ορίζεται καλά λόγω της υπόθεσης για τις διαμέτρους των (X_n,d_n): για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x(n),y(n)\in X_n$ ισχύει $d_n(x(n),y(n))\leqslant 1$ άρα, για κάθε $x,y\in X$ έχουμε
$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x(n),y(n))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1<+\infty.$$
Είναι φανερό ότι $d(x,y)\geqslant 0$ για κάθε $x,y\in X$. Επίσης, $d(x,y)=0$ αν και μόνο αν $d_n(x(n),y(n))=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(n)=y(n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x=y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της d χρησιμοποιούμε τη συμμετρική ιδιότητα των d_n: αν $x,y\in X$ έχουμε $d_n(x(n),y(n))=d_n(y(n),x(n))$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς,
$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x(n),y(n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(y(n),x(n))=d(y,x).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x,y,z\in X$. Εφαρμόζουμε πρώτα την τριγωνική ανισότητα για κάθε d_n: έχουμε
$$d_n(x(n),z(n))\leqslant d_n(x(n),y(n))+d_n(y(n),z(n)),\quad n\in\mathbb{N}.$$
Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε
$$\begin{aligned}d(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x(n),z(n))\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x(n),y(n))+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(y(n),z(n))\\ &= d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$
Για να δείξουμε ότι η d είναι μετρική γινόμενο πρέπει να δείξουμε ότι: αν (x_m) είναι ακολουθία στον X και $x\in X$, τότε
$$\lim_{m\to\infty}d(x_m,x)=0\quad\text{αν και μόνο αν}\quad\lim_{m\to\infty}d_n(x_m(n),x(n))=0\ \text{για κάθε}\ n\in\mathbb{N}.$$
Η κατεύθυνση $(\Rightarrow)$ έπεται άμεσα από το γεγονός ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει
$$d_n(x_m(n),x(n))\leqslant 2^n d(x_m,x).$$
Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_m) και το x στο X ικανοποιούν την $\lim\limits_{m\to\infty}d_n(x_m(n),x(n))=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Για κάθε $n = 1, \ldots, k$ έχουμε $\lim\limits_{m\to\infty} d_n(x_m(n), x(n)) = 0$, άρα

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} d_n(x_m(n), x(n)) = 0.$$

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m \geqslant m_0$,

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} d_n(x_m(n), x(n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι, για κάθε $m \geqslant m_0$,

$$d(x_m, x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} d_n(x_m(n), x(n)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_m(x_m(n), x(n)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $d(x_m, x) \to 0$.

2.8. *Έστω $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Δείξτε ότι ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $\rho_n : X_n \times X_n \to \mathbb{R}$ με

$$\rho_n(x(n), y(n)) = \frac{d_n(x(n), y(n))}{1 + d_n(x(n), y(n))}$$

είναι μετρική στο X_n, διότι $\rho_n = f \circ d_n$ όπου $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ η συνάρτηση $f(t) = \frac{t}{1+t}$ (δείτε την Άσκηση 5 στο Φυλλάδιο 1). Επίσης, είναι φανερό ότι $\rho_n(x(n), y(n)) \leqslant 1$ για κάθε $x(n), y(n) \in X_n$, δηλαδή $\mathrm{diam}(X_n, \rho_n) \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από την προηγούμενη Άσκηση, η d είναι μετρική στο X και είναι μετρική γινόμενο *ως προς τις* ρ_n: ισχύει $d(x_k, x) \to 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} \rho_n(x_k(n), x(n)) = 0$.

Για να δείξουμε ότι η d είναι μετρική γινόμενο *ως προς τις* d_n αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (σταθερό) $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής:

$$d_n(x_k(n), x(n)) \to 0 \;\text{ αν και μόνο αν }\; \rho_n(x_k(n), x(n)) = \frac{d_n(x_k(n), x(n))}{1 + d_n(x_k(n), x(n))} \to 0.$$

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου ισχυρισμού:

Έστω (a_k) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $b_k = \frac{a_k}{1+a_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, $a_k \to 0$ αν και μόνο αν $b_k \to 0$ (άσκηση).

2.9. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n \in \ell_p$ με*

$$x_n = (x(1), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots).$$

Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον ℓ_∞;

Υπόδειξη. Η ακολουθία $x \in \ell_p$, άρα $\sum_{k=1}^\infty |x(k)|^p < +\infty$. Έπεται (οι «ουρές» συγκλίνουσας σειράς τείνουν στο 0) ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^\infty |x(k)|^p = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $x - x_n = (0, \ldots, 0, x(n+1), x(n+2), \ldots)$, οπότε

$$\|x - x_n\|_p^p = \sum_{k=n+1}^\infty |x(k)|^p \to 0.$$

Στον ℓ_∞ δεν έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα: αν θεωρήσουμε τη σταθερή ακολουθία $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ τότε $x - x_n = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\|x - x_n\|_\infty = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_\infty = 1 \neq 0.$$

2.10. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \ldots, x_n, x, \ldots)$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Η ακολουθία (y_n) έχει οριστεί ως εξής: $y_{2k-1} = x_k$ και $y_{2k} = x$, $k \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k \geqslant k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = 2k_0 - 1$ και θεωρούμε $n \geqslant n_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $n = 2k$ τότε $\rho(y_n, x) = \rho(x, x) = 0 < \varepsilon$.

(ii) Αν $n = 2k-1$ τότε $2k-1 \geqslant n_0 = 2k_0 - 1$, δηλαδή $k \geqslant k_0$. Άρα, $\rho(y_n, x) = \rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Είδαμε ότι $\rho(y_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, $y_n \to x$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $y_n \to y$ για κάποιο $y \in X$. Τότε, $y_{2k} \to y$. Όμως, η (y_{2k}) είναι σταθερή και ίση με x, άρα $y = x$. Τώρα, από την $y_n \to x$ βλέπουμε ότι $y_{2k-1} \to x$, άρα $x_k \to x$.

2.11. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Υποθέτουμε ότι $x_n \to x \in X$. Δείξτε ότι: για κάθε μετάθεση (1-1 και επί συνάρτηση) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x.*

Υπόδειξη. Έστω σ μια μετάθεση του $\mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k > k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Θεωρούμε το σύνολο $A(k_0) = \{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(k_0)\}$. Αφού η σ είναι 1-1 και επί, το $A(k_0)$ έχει ακριβώς k_0 στοιχεία. Θέτουμε $n_0 = \max A(k_0)$ (το μέγιστο στοιχείο του $A(k_0)$).

Τότε, αν $n > n_0$ έχουμε $n \neq \sigma^{-1}(j)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k_0$. Δηλαδή, $\sigma(n) \neq j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\sigma(n) > k_0$, άρα $\rho(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$.

Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$. Έπεται ότι $x_{\sigma(n)} \to x$.

2.12. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Θέτουμε*

$$A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Δείξτε ότι: αν $x_n \to x \in X$ τότε για κάθε 1-1 συνάρτηση $f : A \to A$ ισχύει $f(x_n) \to x$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k > k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Θεωρούμε το σύνολο $C = \{x_1, \ldots, x_{k_0}\}$ και ορίζουμε $B = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in C\}$. Αφού η f είναι 1-1, το σύνολο B έχει το πολύ k_0 στοιχεία (για κάθε $k \leqslant k_0$ υπάρχει το πολύ ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x_n) = x_k$). Θέτουμε $n_0 = \max B$ (το μέγιστο στοιχείο του B).

Τότε, αν $n > n_0$ έχουμε $n \notin B$. Δηλαδή, $f(x_n) \notin C$, το οποίο σημαίνει ότι $f(x_n) = x_s$ για κάποιο $s > k_0$, άρα $\rho(f(x_n), x) = \rho(x_s, x) < \varepsilon$.

Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(f(x_n), x) < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$. Έπεται ότι $f(x_n) \to x$.

2.13. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Λέμε ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) *Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση τότε είναι βασική (άρα, και φραγμένη). Ισχύει το αντίστροφο;*

(β) *Αν η (x_n) είναι βασική τότε έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.*

(γ) *Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση. Έστω $\varepsilon > 0$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1})$ συγκλίνει, άρα – από το κριτήριο Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών – υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m > k \geqslant N$,

$$\sum_{n=k}^{m-1} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Έστω $m > k \geqslant N$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα γράφουμε

$$\rho(x_k, x_m) \leqslant \rho(x_k, x_{k+1}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant \sum_{n=k}^{m-1} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και μια ακολουθία (a_k) ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να συγκλίνει αλλά να μην συγκλίνει απολύτως (παράδειγμα, η $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$). Θέτουμε $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Τότε, η (x_n) είναι συγκλίνουσα, άρα είναι βασική. Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_k| = \infty.$$

Άρα, η (x_n) δεν έχει φραγμένη κύμανση.

(β) Έχουμε υποθέσει ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2}$ για κάθε $k, m \geqslant k_1$.

Στη συνέχεια θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2^2}$ για κάθε $k, m \geqslant k_2$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: στο n-οστό βήμα θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ και βρίσκουμε $k_n > k_{n-1}$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $k, m \geqslant k_n$.

Θεωρούμε την υπακολουθία (x_{k_n}). Από τον τρόπο ορισμού των k_n βλέπουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $k_{n+1}, k_n \geqslant k_n$, άρα $\rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$. Έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$. Συνεπώς, η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με φραγμένη κύμανση. Από το (α) η (x_{k_n}) είναι βασική. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία (x_{k_n}). Από το (β) η (x_{k_n}) έχει υπακολουθία $(x_{k_{s_n}})$ η οποία έχει φραγμένη κύμανση. Η $(x_{k_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n), συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

2.14. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Δείξτε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα $\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία (x_{t_n}). Όπως στην Άσκηση 2.13(β) βρίσκουμε υπακολουθία $(x_{t_{s_n}})$ της (x_{t_n}) η οποία ικανοποιεί την

$$\rho(x_{t_{s_{n+1}}}, x_{t_{s_n}}) < \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $(x_{t_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n), έχουμε το ζητούμενο (με $k_n = t_{s_n}$).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$. Τότε, η (x_{k_n}) είναι βασική ακολουθία. Πράγματι, αν $m > n$ έχουμε

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_m}) \leqslant \rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) + \cdots + \rho(x_{k_{m-1}}, x_{k_m}) < \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, αν επιλέξουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$, έχουμε: για κάθε $m > n \geqslant n_0$,

$$\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon.$$

Κεφάλαιο 3

Τοπολογία μετρικών χώρων

Ομάδα Α΄

3.1. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και F,G υποσύνολα του X. Αν το F είναι κλειστό και το G είναι ανοικτό, δείξτε ότι το $F \setminus G$ είναι κλειστό και το $G \setminus F$ είναι ανοικτό.*

Υπόδειξη. Γράφουμε $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$. Αφού το G είναι ανοικτό, το $X \setminus G$ είναι κλειστό. Τότε, το $F \cap (X \setminus G)$ είναι κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων.

Όμοια, γράφουμε $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$. Αφού το F είναι κλειστό, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Τότε, το $G \cap (X \setminus F)$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων.

3.2. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του X γράφεται ως τομή ανοικτών υποσυνόλων του (X,ρ).*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε $B \subseteq X$ γράφεται ως ένωση κλειστών συνόλων, γράφοντας

$$B = \bigcup_{x\in B} \{x\}.$$

[Τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα σε κάθε μετρικό χώρο]. Έστω τώρα $A \subseteq X$. Θέτοντας $B = X \setminus A$ έχουμε

$$X \setminus A = \bigcup_{i\in I} F_i$$

όπου $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε,

$$A = (X \setminus A)^c = \bigcap_{i\in I} (X \setminus F_i) = \bigcap_{i\in I} G_i,$$

όπου κάθε $G_i = X \setminus F_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

3.3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το $G = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in G$. Τότε, $f(x) > 0$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon = f(x)/2 > 0$ βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: αν $y \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $f(y) > f(x)/2 > 0$. Συνεπώς, $B(x,\delta) \subseteq G$. Έπεται ότι το G είναι ανοικτό.

Έστω (x_n) ακολουθία στο F με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η f είναι συνεχής στο x. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Συνεπώς, $x \in F$. Έπεται ότι το F είναι κλειστό.

3.4. *Δείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων και κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.*

Υπόδειξη. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right) \ \text{ και } \ (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n} \right].$$

Ελέγξτε τις δύο ισότητες.

3.5. *Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.*

Υπόδειξη. Έστω $F = \{x_1, \dots, x_m\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ). Για κάθε $j = 1, \dots, m$, το μονοσύνολο $\{x_j\}$ είναι κλειστό σύνολο. Γράφουμε

$$F = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_m\}.$$

Αφού η ένωση πεπερασμένων το πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι το F είναι κλειστό.

3.6. *Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό σύνολο. Μπορεί σε έναν μετρικό χώρο μια σφαίρα να είναι το κενό σύνολο;*

Υπόδειξη. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Δείχνουμε ότι η $S(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0,x) = \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο αποδεικνύοντας το εξής: αν $x_n \in S(x_0,\varepsilon)$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε $x \in S(x_0,\varepsilon)$. Πράγματι, $\rho(x_0,x_n) = \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$|\rho(x_0,x) - \rho(x_0,x_n)| \leqslant \rho(x,x_n) \to 0,$$

άρα $\rho(x_0,x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0,x_n) = \varepsilon$. Συνεπώς, $x \in S(x_0,\varepsilon)$.

Υπάρχει περίπτωση μια σφαίρα $S(x_0,\varepsilon)$, σε κάποιον μετρικό χώρο, να είναι το κενό σύνολο. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ τότε, για κάθε $x_0 \in X$, ισχύει $S(x_0,2)=\emptyset$.

3.7. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εξετάστε, αν ισχύει πάντοτε η ισότητα*

$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

[*Υπενθύμιση: Για κάθε $A \subseteq X$ συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή θήκη του A.*]

Υπόδειξη. Ισχύει πάντοτε ο εγκλεισμός

$$\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Πράγματι, έστω $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) σημείων της $B(x,\varepsilon)$ ώστε $y_n \to y$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $d(x,y_n) < \varepsilon$. Συνεπώς,

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x,y_n) \leqslant \varepsilon.$$

Δηλαδή, $y \in \widehat{B}(x,\varepsilon)$.

Δεν ισχύει πάντοτε ισότητα: αν θεωρήσουμε ένα σύνολο X που έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τη διακριτή μετρική δ, τότε, για κάθε $x \in X$, έχουμε $B(x,1) = \{x\}$ άρα $\overline{B(x,1)} = \{x\}$, ενώ $\widehat{B}(x,1) = X$ (και $X \neq \{x\}$ από την υπόθεση για το πλήθος των στοιχείων του X).

3.8. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Η διαγώνιος του $X \times X$ είναι το σύνολο $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό στον $X \times X$ ως προς τη μετρική d_2, όπου*

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d^2(x_1,y_1) + d^2(x_2,y_2)}.$$

Γενικότερα, αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό ως προς κάθε μετρική γινόμενο στον $X \times X$.

Υπόδειξη. Έστω ρ μια μετρική γινόμενο στο $X \times X$. Θεωρούμε ακολουθία $(x_n,x_n) \in \Delta$ ώστε $(x_n,x_n) \xrightarrow{\rho} (x,y) \in X \times X$ και αποδεικνύουμε ότι $x=y$, δηλαδή $(x,y) \in \Delta$. Αυτό αποδεικνύει ότι το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times X, \rho)$.

Αφού $(x_n,x_n) \xrightarrow{\rho} (x,y)$ και η ρ είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ και $x_n \xrightarrow{d} y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας στον (X,d) βλέπουμε ότι, πράγματι, $x=y$.

Στις ασκήσεις του Κεφαλαίου 2 είδαμε ότι η μετρική

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d^2(x_1,y_1) + d^2(x_2,y_2)}$$

είναι μετρική γινόμενο στο $X \times X$. Συνεπώς, το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times X, d_2)$.

3.9. *Υπάρχει άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς; Υπάρχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από άρρητους;*

Υπόδειξη. Ένα άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς είναι το $\mathbb{N}$. Δεν υπάρχει μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να αποτελείται μόνο από άρρητους: θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα και σε κάθε διάστημα υπάρχει ρητός.

3.10. *Έστω A, B δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,d). Αποδείξτε ότι:*
(α) *Αν $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.*
(β) *Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε ότι: αν $x \in X$ και $x \notin \overline{A}$ τότε $x \in B^\circ$: αφού $x \notin \overline{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Όμως, από την υπόθεση ότι $A \cup B = X$ έχουμε $X \setminus A \subseteq B$. Άρα, $B(x,\varepsilon) \subseteq B$ και αυτό δείχνει ότι $x \in B^\circ$.

Δείξαμε ότι $X \setminus \overline{A} \subseteq B^\circ$. Άρα, $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

(β) Έστω $x \in \overline{A} \cap B^\circ$. Αφού $x \in B^\circ$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq B$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει $y \in A$ το οποίο ανήκει στην $B(x,\varepsilon) \subseteq B$. Τότε, $y \in A \cap B$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $A \cap B = \emptyset$ από την υπόθεση.

Από το άτοπο συμπεραίνουμε ότι $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.

3.11. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*
(α) *$(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$ για κάθε $A, B \subseteq X$.*
(β) *$\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$ για κάθε $A, B \subseteq X$.*
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους εγκλεισμούς με ισότητες;

Υπόδειξη. (α) Έστω $A, B \subseteq X$. Έστω $x \in (A \setminus B)^\circ$. Αφού $A \setminus B \subseteq A$, έχουμε $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ$. Συνεπώς, $x \in A^\circ$.

Επίσης, $x \in (A \setminus B)^\circ \subseteq A \setminus B$, άρα $x \notin B$. Όμως, $B^\circ \subseteq B$, άρα $x \notin B^\circ$.

Είδαμε ότι $x \in A^\circ$ και $x \notin B^\circ$. Άρα, $x \in A^\circ \setminus B^\circ$. Έπεται ότι $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$.

(β) Έστω $A, B \subseteq X$. Έστω $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Αφού $x \notin \overline{B}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap B = \emptyset$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x,\varepsilon)$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $x_n \in A \setminus B$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Όμως, η ακολουθία $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$ συγκλίνει στο x ως υπακολουθία της (x_n). Άρα, $x \in \overline{A \setminus B}$. Έπεται ότι $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους παραπάνω εγκλεισμούς με ισότητες. Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν πάρουμε $A = \mathbb{R}$ και $B = \mathbb{Q}$, έχουμε

$$(A \setminus B)^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset\ , \ \text{ ενώ } \ A^\circ \setminus B^\circ = \mathbb{R}^\circ \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset \,, \quad \text{ενώ} \quad \overline{A \setminus B} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

3.12. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$. Ισχύει το ίδιο για το εσωτερικό του A;*

Υπόδειξη. Από την $A \subseteq \overline{A}$ και τον ορισμό της διαμέτρου έπεται άμεσα ότι $\mathrm{diam}(A) \leqslant \mathrm{diam}(\overline{A})$. Για την αντίστροφη ανισότητα, υποθέτουμε ότι $\mathrm{diam}(A) < +\infty$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in \overline{A}$. Υπάρχουν $z, w \in A$ ώστε $\rho(z, x) < \varepsilon$ και $\rho(y, w) < \varepsilon$. Τότε, $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, w) + \rho(w, y) < \varepsilon + \mathrm{diam}(A) + \varepsilon$. Συνεπώς,

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in \overline{A}\} \leqslant \mathrm{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leqslant \mathrm{diam}(A)$.

Δεν είναι γενικά σωστό ότι $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(A^\circ)$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $A = (0, 1) \cup \{2\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε $\mathrm{diam}(A) = 2$ και $A^\circ = (0, 1)$, άρα $\mathrm{diam}(A^\circ) = 1$. Φυσικά, ισχύει πάντα η ανισότητα $\mathrm{diam}(A) \geqslant \mathrm{diam}(A^\circ)$ διότι $A^\circ \subseteq A$.

3.13. (α) *Έστω A ανοικτό υποσύνολο του (X, ρ) και $G \subseteq A$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό στο A αν και μόνο αν είναι ανοικτό στον X.*

(β) *Έστω A κλειστό υποσύνολο του (X, ρ) και $G \subseteq A$. Είναι σωστό ότι το G είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν είναι κλειστό στον X;*

Υπόδειξη. (α) Αν το G είναι ανοικτό στο A τότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $G = A \cap U$. Όμως, τα A, U είναι ανοικτά υποσύνολα του X, άρα το $G = A \cap U$ είναι ανοικτό στον X. Αντίστροφα, αν το G είναι ανοικτό στον X, γράφοντας $G = A \cap G$ βλέπουμε ότι το G είναι ανοικτό στο A.

(β) Αν το G είναι κλειστό στο A τότε υπάρχει κλειστό $V \subseteq X$ ώστε $G = A \cap V$. Όμως, τα A, V είναι κλειστά υποσύνολα του X, άρα το $G = A \cap U$ είναι κλειστό στον X. Αντίστροφα, αν το G είναι κλειστό στον X, γράφοντας $G = A \cap G$ βλέπουμε ότι το G είναι κλειστό στο A.

3.14. *Βρείτε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ως προς τη συνήθη μετρική.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $D = \{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\}$. Το D είναι αριθμήσιμο διότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Έχουμε $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ διότι $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Τέλος, το D είναι πυκνό στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών ώστε $q_n \to x - \sqrt{2}$, οπότε $q_n + \sqrt{2} \in D$ και $q_n + \sqrt{2} \to x$.

Ομάδα Β΄

3.15. *Έστω* $(X, \|\cdot\|)$ *χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι* $\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$ *για κάθε* $x \in X$ *και κάθε* $r > 0$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Στην Άσκηση 3.7 είδαμε ότι $\widehat{B}(x,r) \supseteq \overline{B(x,r)}$. Επίσης, $B(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$. Αφού $\widehat{B}(x,r) = B(x,r) \cup S(x,r)$, για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι

$$S(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}.$$

Έστω $y \in S(x,r)$. Τότε, $\|y-x\| = r$. Θεωρούμε μια ακολουθία (t_n) στο $(0,1)$ με $t_n \to 1$. Ορίζουμε $y_n = x + t_n(y-x)$. Τότε:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|y_n - x\| = \|t_n(y-x)\| = t_n\|y-x\| = t_n r < r,$$

δηλαδή, $y_n \in B(x,r)$.

(ii) Ισχύει

$$\|y-y_n\| = \|y-x-t_n(y-x)\| = \|(1-t_n)(y-x)\| = (1-t_n)\|y-x\| = (1-t_n)r \to 0,$$

δηλαδή, $y_n \to y$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $y \in \overline{B(x,r)}$. Συνεπώς, $S(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$.

3.16. *Δείξτε ότι ο* c_0 *είναι κλειστό υποσύνολο του* ℓ^∞. *Τι μπορείτε να πείτε για τον* c_{00}*; Είναι ανοικτό υποσύνολο του* ℓ_∞*; κλειστό υποσύνολο του* ℓ_∞*;*

Υπόδειξη. Έστω (x_k) ακολουθία στον c_0 με $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x \in \ell_\infty$. Θα δείξουμε ότι $x \in c_0$.

Κάθε x_k είναι μια μηδενική ακολουθία: $x_k = (x_k(1), \ldots, x_k(n), \ldots)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_k(n) = 0$. Επίσης, $x = (x(1), \ldots, x(n), \ldots)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση έχουμε $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$, άρα υπάρχει k_0 με την ιδιότητα

$$\|x_{k_0} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για την ακρίβεια, το παραπάνω ισχύει για όλους τελικά τους δείκτες k, μία όμως τιμή k_0 μας είναι αρκετή. Αφού

$$\|x_{k_0} - x\|_\infty = \sup\{|x_{k_0}(n) - x(n)| : n \in \mathbb{N}\},$$

έχουμε

$$(*) \qquad |x_{k_0}(n) - x(n)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty} x_{k_0}(n) = 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$(**) \qquad |x_{k_0}(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τις $(*)$, $(*)$ και την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή, βλέπουμε ότι

$$|x(n)| \leqslant |x(n) - x_{k_0}(n)| + |x_{k_0}(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$. Δηλαδή, $x \in c_0$.

Ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του c_0. Αν θέσουμε

$$x_k = \big(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\big)$$

τότε $x_k \in c_{00}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$x = \big(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\big).$$

Τότε, $x \in c_0 \subseteq \ell_\infty$, διότι $x(n) = \frac{1}{n} \to 0$, και $x - x_k = \big(0, \ldots, 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \ldots\big)$, δηλαδή

$$\|x - x_k\|_\infty = \frac{1}{k+1} \to 0.$$

Όμως, $x \notin c_{00}$, διότι $x(n) = \frac{1}{n} \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ο c_{00} δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του c_0. Έστω $x = (x(1), \ldots, x(m), 0, 0, \ldots) \in c_{00}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε

$$y = \big(x(1), \ldots, x(m), \frac{\varepsilon}{m+1}, \frac{\varepsilon}{m+2}, \ldots\big).$$

Ελέγξτε ότι $\|x - y\|_\infty = \frac{\varepsilon}{m+1} < \varepsilon$, δηλαδή $y \in B(x, \varepsilon)$. Όμως, $y \notin c_{00}$. Άρα, το x δεν είναι εσωτερικό σημείο του c_{00}: αυτό που δείξαμε στην πραγματικότητα είναι ότι ο c_{00} έχει κενό εσωτερικό μέσα στον c_0 (άρα και στον ℓ_∞).

3.17. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το G είναι ανοικτό.*

(β) *Για κάθε $A \subseteq X$, $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.*

(γ) *Για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $A \subseteq X$ και έστω $x \in G \cap \overline{A}$. Τότε, $x \in G$ και $x \in \overline{A}$. Συνεπώς, υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \to x$. Αφού το G είναι ανοικτό και $a_n \to x \in G$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \in G$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$

περιέχεται στο $G \cap A$ και συγκλίνει στο x ως υπακολουθία της (x_n). Έπεται ότι $x \in \overline{G \cap A}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Έστω $A \subseteq X$. Από την $G \cap A \subseteq G \cap \overline{A}$ βλέπουμε ότι $\overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \overline{A}}$.

Για τον άλλο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι, από την υπόθεση, $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ και το $\overline{G \cap A}$ είναι κλειστό. Έπεται ότι $\overline{G \cap \overline{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$ (γενικά, αν το F είναι κλειστό και $B \subseteq F$, τότε $\overline{B} \subseteq \overline{F} = F$).

(γ) $\Rightarrow$ (α) Εφαρμόζουμε το (γ) με $A = X \setminus G$: έχουμε

$$\overline{G \cap \overline{X \setminus G}} = \overline{G \cap (X \setminus G)} = \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Άρα,

$$G \cap (X \setminus G^\circ) = G \cap \overline{X \setminus G} = \emptyset.$$

Έπεται ότι

$$G \subseteq X \setminus (X \setminus G^\circ) = G^\circ.$$

Αφού $G \subseteq G^\circ$, το G είναι ανοικτό (διότι, ισχύει πάντοτε η $G^\circ \subseteq G$, άρα $G = G^\circ$).

3.18. *Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα.*

Υπόδειξη. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος, ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \;\; \text{ή} \;\; G = \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n),$$

όπου ενδέχεται κάποιο από τα a_n να είναι το $-\infty$ και κάποιο από τα b_n να είναι το $+\infty$. Για κάθε n μπορούμε να βρούμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(a_{n,k})$ ρητών και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(b_{n,k})$ ρητών στο (a_n, b_n) με $\lim_{k \to \infty} a_{n,k} = a_n$ και $\lim_{k \to \infty} b_{n,k} = b_n$ (από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$). Τότε,

$$(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_{n,k}, b_{n,k})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$G = \bigcup_{n,k} (a_{n,k}, b_{n,k}),$$

κάθε διάστημα $(a_{n,k}, b_{n,k})$ έχει ρητά άκρα και τα διαστήματα αυτά είναι αριθμήσιμα το πλήθος.

3.19. *Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα (δηλάδή διαφορετικά από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) τα οποία να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.*

Υπόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ (διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Αφού $A \neq \mathbb{R}$, υπάρχει $x \notin A$.

Το A είναι μη κενό, συνεπώς υπάρχει $y \in A$. Προφανώς $y \neq x$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $y > x$. Ορίζουμε

$$B = \{t \in A : t > x\}.$$

Το B είναι μη κενό (διότι $y \in B$) και κάτω φραγμένο από το x. Άρα, υπάρχει το $s = \inf B$ και $s \geqslant x$.

Αφού $s = \inf B$, υπάρχει ακολουθία στοιχείων του B που συγκλίνει στο s. Άρα, $s \in \overline{B} \subseteq \overline{A} = A$ διότι το A είναι κλειστό.

Αφού $s \in A$, $x \notin A$ και $s \geqslant x$, έχουμε $s > x$. Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το A είναι και ανοικτό. Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(s - \delta, s + \delta) \subseteq A$. Όμως τότε, στο $(s-\delta, s)$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του A το οποίο είναι μεγαλύτερο από το x (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του B το οποίο είναι μικρότερο από το $\inf B$, άτοπο.

3.20. (α) *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έστω F_n κλειστό υποσύνολο του $(n, n+1)$. Θέτουμε $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.*

(β) *Βρείτε μια ακολουθία ξένων ανά δυο κλειστών συνόλων στο $\mathbb{R}$ των οποίων η ένωση δεν είναι κλειστό σύνολο.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $a_n = \inf F_n$ και $b_n = \sup F_n$. Τότε $a_n, b_n \in \overline{F_n}$ και αφού το F_n είναι κλειστό, έχουμε $a_n, b_n \in F_n$. Αφού το F_n είναι υποσύνολο του $(n, n+1)$, συμπεραίνουμε ότι $n < a_n \leqslant b_n < n + 1$ και $F_n \subseteq [a_n, b_n]$.

Δείχνουμε ότι το $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ ως εξής: έστω $x \in \overline{F}$. Υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in [n, n + 1)$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία (x_k) στο F ώστε $x_k \to x$. Θέτουμε

$$\varepsilon = \min\{n - b_{n-1}, a_{n+1} - (n + 1)\} > 0.$$

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$b_{n-1} = n - (n - b_{n-1}) \leqslant x - \varepsilon < x_k < x + \varepsilon \leqslant (n + 1) + a_{n+1} - (n + 1) = a_{n+1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $x_k \in F_n$ για κάθε $k \geqslant k_0$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι $x \in \overline{F_n} = F_n \subseteq F$.

Δείξαμε ότι $\overline{F} \subseteq F$. Άρα, το F είναι κλειστό.

(β) Θέτουμε $F_n = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα F_n είναι κλειστά, ξένα ανά δύο, και

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το F δεν είναι κλειστό σύνολο: αφού $\frac{1}{n} \to 0$, έχουμε $0 \in \overline{F}$. Όμως, $0 \notin F$.

3.21. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*
(α) *Αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχει ανοικτό $G \subseteq X$, ώστε $G \neq \emptyset$ και $X \setminus G \neq \emptyset$.*
(β) *Αν το X είναι άπειρο σύνολο, τότε υπάρχει ανοικτό $G \subseteq X$ ώστε το G και το $X \setminus G$ να είναι άπειρα.*

Υπόδειξη. (α) Αφού το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, μπορούμε να βρούμε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε, $d(x,y) > 0$ άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $y \notin B(x,\varepsilon)$. Θέτουμε $G = B(x,\varepsilon)$. Το G είναι ανοικτό και μη κενό διότι $x \in G$. Επίσης, $X \setminus G \neq \emptyset$ διότι $y \notin G$.

(β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Υπάρχουν $x, y \in X$, $x \neq y$ τα οποία είναι σημεία συσσώρευσης του X. Βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. Στην $B(x,\varepsilon)$ και στην $B(y,\varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του X (χαρακτηρισμός του σημείου συσσώρευσης). Θέτουμε $G = B(x,\varepsilon)$. Το G είναι ανοικτό και έχει άπειρα στοιχεία. Το $X \setminus G$ είναι κι αυτό άπειρο σύνολο, διότι περιέχει την $B(y,\varepsilon)$ που έχει άπειρα στοιχεία.

2. Ο X έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης. Αφού το X είναι άπειρο σύνολο και όλα τα σημεία του (εκτός από ένα το πολύ) είναι μεμονωμένα σημεία του X, μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) στο X, με όρους διαφορετικούς ανά δύο, ώστε κάθε x_n να είναι μεμονωμένο σημείο του X.

[Θυμηθείτε ότι ο x είναι μεμονωμένο σημείο του X αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X. Δηλαδή, αν υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_x) \cap (X \setminus \{x\}) = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $B(x,\varepsilon_x) = \{x\}$, δηλαδή το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο.]

Θέτουμε $G = \{x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$. Τότε, το

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_{2n}\}$$

είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων και έχει άπειρα στοιχεία. Το $X \setminus G$ είναι επίσης άπειρο, αφού περιέχει το σύνολο $\{x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}, \ldots\}$.

3.22. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Υπόδειξη. Αφού $x \neq y$, έχουμε $\rho(x,y) = \delta > 0$. Θέτουμε $U = B(x,\delta/3)$ και $V = B(y,\delta/3)$. Τα U, V είναι ανοικτά και, προφανώς, $x \in U$, $y \in V$. Παρατηρούμε ότι: αν

$z \in \overline{U} = \overline{B(x,\delta/3)}$ τότε $z \in \widehat{B}(x,\delta/3)$, δηλαδή $\rho(x,z) \leqslant \delta/3$. Ομοίως, αν $z \in \overline{V}$ έχουμε $\rho(z,y) \leqslant \delta/3$. Αν λοιπόν $z \in \overline{U} \cap \overline{V}$, τότε

$$\delta = \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

3.23. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει, επιπλέον, ότι $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$;*

Υπόδειξη. Αφού το F είναι κλειστό υποσύνολο του X και $x \notin F = \overline{F}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$B(x,\delta) \cap F = \emptyset.$$

Θέτουμε

$$U = B(x,\delta/3) \text{ και } V = X \setminus \widehat{B}(x,2\delta/3) = \{y \in X : \rho(x,y) > 2\delta/3\}.$$

Προφανώς $x \in U$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $F \subseteq V$. Παρατηρούμε ότι:

(i) Αν $z \in \overline{U}$ τότε $\rho(z,x) \leqslant \delta/3$.

(ii) Αν $z \in \overline{V}$ τότε $\rho(z,x) \geqslant 2\delta/3$.

Έπεται ότι $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

3.24. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Θέτουμε A' το παράγωγο σύνολο του A, δηλαδή το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) $\overline{A} = A \cup A'$. *Συμπεράνατε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.*

(β) *Το A' είναι κλειστό σύνολο.*

(γ) *Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $A' \subseteq B'$.*

(δ) $A' = (\overline{A})'$. *Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.*

(ε) $(A')' \subseteq A'$. *Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.*

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq \overline{A}$. Επίσης, αν $x \in A'$ τότε κάθε ανοικτή μπάλα $B(x,\varepsilon)$ περιέχει σημεία του A (και μάλιστα διαφορετικά από το x), άρα $x \in \overline{A}$. Αυτό δείχνει ότι $A' \subseteq \overline{A}$ και έπεται ότι $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Αντίστροφα, αν $x \in \overline{A}$ και $x \notin A$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $x \notin A$, άρα $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (υπάρχει σημείο του A

στην $B(x,\varepsilon)$ και αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι το x). Συνεπώς, $x \in A'$. Δείξαμε ότι $\overline{A} \setminus A \subseteq A'$, άρα $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

Δείχνουμε τώρα ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του: αν το A είναι κλειστό, τότε $A = \overline{A} = A \cup A'$, άρα $A' \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $A' \subseteq A$ τότε $\overline{A} = A \cup A' \subseteq A \cup A = A$. Αφού $\overline{A} \subseteq A$, το A είναι κλειστό.

(β) Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{A'} \subseteq A'$. Έστω $x \in \overline{A'}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap A'$. Αφού η $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Αφού $y \in A'$, η $B(y,\delta)$ περιέχει άπειρα σημεία του A. Συνεπώς, υπάρχει $a \in A$, $a \neq x$ ώστε $a \in B(y,\delta)$. Αφού $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$, έχουμε $a \in B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$. Δείξαμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Άρα, $x \in A'$.

Συνεπώς, $\overline{A'} \subseteq A'$ και το A' είναι κλειστό.

(γ) Έστω $x \in A'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in A$, $y \neq x$ ώστε $y \in B(x,\varepsilon)$. Αφού $A \subseteq B$ έχουμε $y \in B$. Συνεπώς, $y \in B(x,\varepsilon) \cap (B \setminus \{x\})$. Άρα, $y \in B'$.

(δ) Από το (γ) βλέπουμε ότι $A' \subseteq (\overline{A})'$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$).

Αντίστροφα, έστω $x \in (\overline{A})'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in \overline{A}$ ώστε $y \neq x$ και $y \in B(x,\varepsilon)$. Επίσης, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ και $x \notin B(y,\delta)$ (αυτό γίνεται αν επιλέξουμε $\delta > 0$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις $\delta < \rho(x,y)$ και $\delta < \varepsilon - \rho(x,y)$). Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $z \in A$ με $z \in B(y,\delta)$. Τότε, $z \in A$, $z \neq x$ και $z \in B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $x \in A'$.

(ε) Από το (α) έχουμε $(A')' \subseteq \overline{A'}$. Όμως, είδαμε στο (β) ότι το A' είναι κλειστό. Δηλαδή, $\overline{A'} = A'$. Έπεται ότι $(A')' \subseteq A'$.

Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, θεωρήστε το σύνολο $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $A' = \{0\}$ και $(A')' = \emptyset$.

3.25. *Εξετάστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς:*
(α) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$.*
(β) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$.*
(γ) *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$.*

Υπόδειξη. (α) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{n + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(γ) Δεν υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης οποιουδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό σύνολο. Όμως, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.26. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$, η απόσταση του A από το B ορίζεται ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της απόστασης:

(α) *αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.*

(β) $\mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}) = \mathrm{dist}(A, B)$.

(γ) $\mathrm{dist}(A, B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A, B), \mathrm{dist}(A, C)\}$.

(δ) *Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B ενός μετρικού χώρου (X, ρ) τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε, $\mathrm{dist}(A, B) \leqslant \rho(x, x) = 0$. Άρα, $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

(β) Αφού $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ έχουμε

$$\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} \subseteq \{\rho(a, b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\}.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} \geqslant \inf\{\rho(a, b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\} = \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και τυχόντα $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $\rho(a, x) < \varepsilon$ και $\rho(y, b) < \varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(A, B) \leqslant \rho(a, b) \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) < \rho(x, y) + 2\varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\mathrm{dist}(A, B) - 2\varepsilon < \rho(x, y)$$

για κάθε $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Έπεται ότι

$$\mathrm{dist}(A, B) - 2\varepsilon \leqslant \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{dist}(A, B) \leqslant \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B})$.

(γ) Από τις $B \subseteq B \cup C$ και $C \subseteq B \cup C$ έπεται άμεσα ότι $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \mathrm{dist}(A, B)$ και $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \mathrm{dist}(A, C)$. Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leqslant \min\{\mathrm{dist}(A, B), \mathrm{dist}(A, C)\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $x \in A$ και $y \in B \cup C$ ώστε $\rho(x, y) < \mathrm{dist}(A, B \cup C) + \varepsilon$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $y \in B$ τότε $\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \rho(x,y) < \operatorname{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$.

(ii) Αν $y \in C$ τότε $\operatorname{dist}(A,C) \leqslant \rho(x,y) < \operatorname{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$.

Έπεται ότι

$$\min\{\operatorname{dist}(A,B), \operatorname{dist}(A,C)\} < \operatorname{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

(δ) Ένα παράδειγμα στο Ευκλείδειο επίπεδο δίνουν τα σύνολα $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$ (εξηγήστε γιατί είναι κλειστά). Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \left\| \left(x, \frac{1}{x}\right) - (x,0) \right\|_2 = \frac{1}{x},$$

άρα $\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Συνεπώς, $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

Ένα παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ δίνουν τα σύνολα $A = \mathbb{N} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \left\{n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \left| n - \left(n + \frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{1}{2n},$$

άρα $\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Συνεπώς, $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

3.27. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A να είναι η απόσταση των συνόλων $\{x\}$ και A:*

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) *$\operatorname{dist}(x,A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.*

(β) *$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \rho(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$.*

(γ) *Το σύνολο $\{x \in X : \operatorname{dist}(x,A) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο $\{x \in X : \operatorname{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$ είναι κλειστό.*

(δ) *Αν $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,B)$ για κάθε $x \in X$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $\operatorname{dist}(x,A) = 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(x,a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(β) Έστω $x, y \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a)$, δηλαδή $\operatorname{dist}(x,A) - \rho(x,y) \leqslant \rho(y,a)$ για κάθε $a \in A$. Έπεται ότι $\operatorname{dist}(x,A) - \rho(x,y) \leqslant \operatorname{dist}(y,A)$, άρα

$$\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \leqslant \rho(x,y).$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι $\mathrm{dist}(y,A) - \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,y)$, άρα

$$|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \rho(x,y).$$

(γ) Έστω $U = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon\}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in U$ και επιλέγουμε $0 < \delta < \varepsilon - \mathrm{dist}(x,A)$. Για κάθε $y \in B(x,\delta)$ ισχύει $\mathrm{dist}(y,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,A) + \rho(y,x) < \varepsilon$. Άρα, $B(y,\delta) \subseteq U$. Αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό.

Έστω $F = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon\}$. Θεωρούμε $x_n \in F$ με $x_n \to x$. Τότε, $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x_n,A)+\rho(x_n,x) \leqslant \varepsilon+\rho(x_n,x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon+\rho(x_n,x) \to \varepsilon$ διότι $\rho(x_n,x) \to 0$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \varepsilon$ δηλαδή $x \in F$. Αυτό αποδεικνύει ότι το F είναι κλειστό.

(δ) Από την $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ έπεται ότι $\mathrm{dist}(x,\overline{A}) \leqslant \mathrm{dist}(x,B) \leqslant \mathrm{dist}(x,A)$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,\overline{A})$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in \overline{A}$ ώστε $\rho(x,y) < \mathrm{dist}(x,\overline{A}) + \varepsilon$. Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(y,a) < \varepsilon$. Τότε, $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \rho(x,a) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,a) < \mathrm{dist}(x,\overline{A}) + 2\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \mathrm{dist}(x,\overline{A})$.

3.28. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι*

$$A' = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = 0\}.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $x \in A'$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A \setminus \{x\}$ ώστε $\rho(x,a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν $\mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A \setminus \{x\}\} = 0$.

3.29. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.*

Υπόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ όπου $G_n = \{x \in X : \mathrm{dist}(x,F) < 1/n\}$. Πράγματι, κάθε G_n περιέχει το F (διότι, αν $x \in F$ τότε $d(x,F) = 0 < 1/n$), άρα

$$F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ τότε $\mathrm{dist}(x,F) < \frac{1}{n}$ για όλα τα n, άρα $\mathrm{dist}(x,F) = 0$. Έπεται ότι $x \in \overline{F} = F$ διότι το F είναι κλειστό. Τέλος, κάθε G_n είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω τώρα G ανοικτό υποσύνολο του X. Το $X \setminus G$ είναι κλειστό, άρα $X \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου κάθε G_n είναι ανοικτό. Τότε, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου κάθε $F_n = X \setminus G_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

3.30. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Αποδείξτε τις εξής ιδιότητες του συνόρου του A:*

(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$ *ή ισοδύναμα* $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. *Επομένως, το σύνορο είναι κλειστό σύνολο.*

(ε) *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν* $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $x \in \mathrm{bd}(A)$ αν και μόνο αν κάθε μπάλα $B(x, \varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A και με το A^c. Από την άλλη πλευρά, $x \in \mathrm{bd}(A^c)$ αν και μόνο αν κάθε μπάλα $B(x, \varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A^c και με το $(A^c)^c = A$. Είναι λοιπόν φανερό ότι $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) Αν $x \in \mathrm{bd}(A)$ τότε κάθε μπάλα $B(x, \varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A, άρα $x \in \overline{A}$. Δηλαδή, $\mathrm{bd}(A) \subseteq \overline{A}$. Επίσης, $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς, $\overline{A} \supseteq \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A}$ και ας υποθέσουμε ότι $x \notin A^\circ$. Τότε, κάθε μπάλα $B(x, \varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A και δεν περιέχεται στο A άρα έχει μη κενή τομή με το A^c. Έπεται ότι $x \in \mathrm{bd}(A)$. Δείξαμε ότι $\overline{A} \setminus A^\circ \subseteq \mathrm{bd}(A)$, άρα $\overline{A} \subseteq \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) Γνωρίζουμε ότι $X = \overline{A} \cup (X \setminus A)^\circ$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{bd}(A) \cap A^\circ = \emptyset$ (αν $x \in A^\circ$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap A^c = \emptyset$, άρα $x \notin \mathrm{bd}(A)$). Είδαμε ότι $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$, άρα $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Χρησιμοποιώντας την $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Έπεται ότι το $\mathrm{bd}(A)$ είναι κλειστό σύνολο (γράφεται ως τομή δύο κλειστών συνόλων).

(ε) Αν το A είναι κλειστό τότε $\mathrm{bd}(A) \subseteq A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) = \overline{A} = A$. Αν $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$, τότε $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ \subseteq A \cup A = A$, άρα το A είναι κλειστό.

3.31. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του X τότε το $\mathrm{bd}(A)$ έχει κενό εσωτερικό.*

(β) *Αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ τότε $\mathrm{bd}(A \cup B) = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$.*

Υπόδειξη. (α) Έχουμε δει ότι $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση που το A είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί).

Έστω $x \in [\mathrm{bd}(A)]^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathrm{bd}(A)$. Αφού $x \in \mathrm{bd}(A)$, υπάρχει $y \in A \cap B(x, \varepsilon)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το A είναι ανοικτό, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B(y, \delta) \subseteq A$. Αυτό όμως είναι άτοπο: έχουμε $y \in \mathrm{bd}(A)$, άρα η $B(y, \delta)$ πρέπει να περιέχει σημεία του A^c.

Υποθέτοντας ότι υπάρχει $x \in [\mathrm{bd}(A)]^\circ$ καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς, το $\mathrm{bd}(A)$ έχει κενό εσωτερικό.

(β) Έστω $x \in \mathrm{bd}(A)$. Τότε $x \in \overline{A}$, άρα $x \notin \overline{B}$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $B(x,\delta_0) \cap \overline{B} = \emptyset$. Τότε, αν $0 < \delta \leqslant \delta_0$ έχουμε:

(i) $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$ άρα $B(x,\delta) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

(ii) Υπάρχει $y \in B(x,\delta)$ ώστε $y \notin A$. Επίσης, $y \notin B$ αφού $B(x,\delta) \cap \overline{B} = \emptyset$. Άρα, $y \notin A \cup B$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x,\delta) \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$.

Παρατηρώντας ότι, αν κάθε $B(x,\delta)$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$ έχει μη κενή τομή με το $A \cup B$ και το συμπλήρωμά του τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε μπάλα $B(x,\delta)$ με μεγαλύτερη ακτίνα, συμπεραίνουμε ότι $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$. Άρα, $\mathrm{bd}(A) \subseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$. Όμοια δείχνουμε ότι $\mathrm{bd}(B) \subseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$, άρα $\mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B) \subseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$. Τότε, $x \in \overline{A \cup B}$ άρα, είτε $x \in \overline{A}$ ή $x \in \overline{B}$. Ας υποθέσουμε ότι $x \in \overline{A}$. Όπως πριν, βρίσκουμε $\delta_0 > 0$ ώστε $B(x,\delta_0) \cap \overline{B} = \emptyset$. Τότε, αν $0 < \delta \leqslant \delta_0$ έχουμε:

(i) Υπάρχει $y \in A \cup B$ ώστε $y \in B(x,\delta)$ διότι $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$. Όμως, $y \notin B$ διότι $B(x,\delta) \cap \overline{B} = \emptyset$. Άρα, $y \in A$ και αυτό σημαίνει ότι $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$.

(ii) Υπάρχει $y \in B(x,\delta)$ ώστε $y \notin A \cup B$. Άρα, $y \notin A$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x,\delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Παρατηρώντας ότι, αν κάθε $B(x,\delta)$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$ έχει μη κενή τομή με το A και το συμπλήρωμά του τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε μπάλα $B(x,\delta)$ με μεγαλύτερη ακτίνα, συμπεραίνουμε ότι $x \in \mathrm{bd}(A)$.

Υποθέτοντας ότι $x \in \overline{B}$ δείχνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι $x \in \mathrm{bd}(B)$. Σε κάθε περίπτωση, $x \in \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$. Άρα, $\mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B) \supseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$.

3.32. *Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(\mathrm{bd}(A))^\circ = \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $\mathrm{bd}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Έπεται ότι $(\mathrm{bd}(\mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}$.

3.33. *Έστω A υποσύνολο του (X,ρ). Αν G και H είναι ξένα ανοικτά σύνολα στο A, δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V στο X ώστε $G = A \cap U$ και $H = A \cap V$.*

Υπόδειξη. Το G είναι ανοικτό στο A, άρα γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$G = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x).$$

Ομοίως, το H γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$H = \bigcup_{y \in H} B_{\rho_A}(y, \varepsilon_y).$$

Από την $G \cap H = \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι αν $x \in G$ και $y \in H$ τότε $\rho(x,y) \geqslant \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$. Ορίζουμε $U = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x/2)$ και $V = \bigcup_{y \in H} B_\rho(y, \varepsilon_y/2)$. Τότε, τα U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του X και

$$A \cap U = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x/2) = G \quad \text{και} \quad A \cap V = \bigcup_{y \in H} B_{\rho_A}(y, \varepsilon_y/2) = H.$$

Μένει να δείξουμε ότι $U \cap V = \emptyset$. Έστω $z \in U \cap V$. Τότε, υπάρχουν $x \in G$ και $y \in H$ ώστε $z \in B_\rho(x, \varepsilon_x/2)$ και $z \in B_\rho(y, \varepsilon_y/2)$. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} \leqslant \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\},$$

δηλαδή $\rho(x,y) < \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$, το οποίο είναι άτοπο.

3.34. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε οικογένεια ξένων ανοικτών υποσυνόλων του X είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη.*

Υπόδειξη. Ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος, άρα υπάρχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο D ώστε $\overline{D} = X$. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν G είναι ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του X τότε $G \cap D \neq \emptyset$ (πράγματι, αν αυτό δεν ήταν σωστό, θα είχαμε $D \subseteq X \setminus G$ άρα $X = \overline{D} \subseteq \overline{X \setminus G} = X \setminus G$, το οποίο είναι άτοπο).

Έστω $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια μη κενών, ξένων ανά δύο ανοικτών υποσυνόλων του X. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε κάποιο $d_i \in G_i \cap D$. Η συνάρτηση $f : I \to D$ που απεικονίζει το $i \in I$ στο $d_i \in G_i \cap D$ είναι 1-1: αν $i \neq j$ τότε $(G_i \cap D) \cap (G_j \cap D) = \emptyset$, άρα $d_i \neq d_j$. Έπεται ότι το I είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του D, άρα το I είναι το πολύ αριθμήσιμο. Ισοδύναμα, η οικογένεια $(G_i)_{i \in I}$ είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη.

3.35. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.*

(β) *Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;*

(γ) *Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό υποσύνολο του X;*

Υπόδειξη. (α) Από την $D \cap G \subseteq G$ έχουμε $\overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap G$. Το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon) \cap G$. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $z \in B(y,\delta) \cap D$. Τότε, $z \in B(x,\varepsilon) \cap (G \cap D)$. Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in G \cap D$ ώστε $z \in B(x,\varepsilon)$. Άρα, $x \in \overline{G \cap D}$. Έπεται ότι $\overline{G} \subseteq \overline{G \cap D}$.

(β) Από το (α) έχουμε $\overline{G \cap D} = \overline{G}$. Όμως, $\overline{G} = X$ διότι το G έχει υποτεθεί και πυκνό. Συνεπώς, $\overline{G \cap D} = X$ και το $G \cap D$ είναι πυκνό.

Η υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό είναι ουσιαστική: η τομή δύο πυκνών συνόλων δεν είναι απαραίτητα πυκνό σύνολο. Για παράδειγμα, το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

(γ) Δεν είναι πάντα σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι πυκνό υποσύνολο του X. Για παράδειγμα, θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ σαν υπόχωρο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική). Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ το σύνολο $F_N = \{q_1, \ldots, q_N\}$ είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο, άρα το $G_N = \mathbb{Q} \setminus F_N$ είναι ανοικτό. Επίσης, κάθε G_N είναι πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$: αν $q \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon > 0$ τότε στην $B(x,\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί, άρα και κάποιος q_n με δείκτη $n > N$. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon) \cap G_N \neq \emptyset$.

Είδαμε ότι κάθε G_N είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Όμως, $\bigcap_{N=1}^{\infty} G_N = \emptyset$ αφού, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, $q_N \notin G_N$ άρα $q_N \notin \bigcap_{N=1}^{\infty} G_N$.

3.36. *Έστω $(X_1,d_1), \ldots, (X_n,d_n)$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο (X,d) με $X = \prod_{i=1}^n X_i$ και $d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν κάθε G_i είναι d_i-ανοικτό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $\prod_{i=1}^n G_i$ είναι d-ανοικτό στον X.*

(β) *Αν κάθε F_i είναι d_i-κλειστό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $\prod_{i=1}^n F_i$ είναι d-κλειστό στον X.*

(γ) *Αν κάθε D_i είναι πυκνό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $D = \prod_{i=1}^n D_i$ είναι πυκνό στον X.*

Ειδικότερα, αν κάθε (X_i,d_i), $i = 1,...,n$ είναι διαχωρίσιμος τότε ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n G_i$. Τότε, $x_i \in G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αφού κάθε G_i είναι d_i-ανοικτό στον X_i, μπορούμε να βρούμε $r_i > 0$ ώστε $B_{d_i}(x_i, r_i) \subseteq G_i$, $i = 1, \ldots, n$. Θέτουμε $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ και αποδεικνύουμε ότι $B_d(x,r) \subseteq \prod_{i=1}^n G_i$. Πράγματι, αν $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B_d(x,r)$ τότε $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i,y_i) < r$, οπότε $d_i(x_i,y_i) <$

$r \leqslant r_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $y_i \in B_{d_i}(x_i, r_i) \subseteq G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $y \in \prod_{i=1}^n G_i$.

Έπεται ότι το $\prod_{i=1}^n G_i$ είναι ανοικτό στον (X, d).

(β) Έστω (x^m) ακολουθία στο $\prod_{i=1}^n F_i$ με $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m) \xrightarrow{d} x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Η d είναι μετρική γινόμενο, συνεπώς $x_i^m \xrightarrow{d_i} x_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αφού κάθε F_i είναι d_i-κλειστό στον X_i, συμπεραίνουμε ότι $x_i \in F_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, άρα $x \in \prod_{i=1}^n F_i$. Έπεται ότι το $\prod_{i=1}^n F_i$ είναι d-κλειστό στον X.

(γ) Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού κάθε D_i είναι πυκνό στον X_i, υπάρχουν $y_i \in D_i$ ώστε $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αν θέσουμε $y = (y_1, \ldots, y_n)$ τότε $y \in D$ και $d(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$. Έπεται ότι το $D = \prod_{i=1}^n D_i$ είναι πυκνό στον X.

Ειδικότερα, αν κάθε (X_i, d_i), $i = 1, ..., n$ είναι διαχωρίσιμος τότε ο (X, d) είναι διαχωρίσιμοσ: πράγματι, στον προηγούμενο ισχυρισμό, αν κάθε D_i είναι αριθμήσιμο τότε το $D = \prod_{i=1}^n D_i$ είναι επίσης αριθμήσιμο και, όπως είδαμε, πυκνό στον (X, d).

Ομάδα Β΄ – Συμπληρωματικές ασκήσεις

3.37. *Θεωρούμε το σύνολο* $A = \{1/n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$ *εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική του* $\mathbb{R}$. *Να βρεθούν όλα τα ανοικτά υποσύνολα του* $(A, |\cdot|)$.

Υπόδειξη. Κάθε $B \subseteq A$ με $0 \notin B$, είναι ανοικτό: γράφεται ως ένωση μονοσυνόλων $\{1/n\}$, καθένα από τα οποία είναι ανοικτό σύνολο (για μια εξήγηση, δείτε την Άσκηση 1.3 (ε) παρακάτω). Μένει λοιπόν να εξετάσουμε ποιά σύνολα $C \subseteq A$ με $0 \in C$ είναι ανοικτά.

Αν C είναι ένα τέτοιο σύνολο, το $0 \in C^\circ$ άρα περιέχει όλους τελικά τους $1/n$ (διότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \subseteq C$ και ισχύει $0 < 1/n < \varepsilon$ τελικά). Άρα, θα πρέπει το $A \setminus C$ να είναι πεπερασμένο. Αντίστροφα, κάθε $C \subseteq A$ με $0 \in C$ και $A \setminus C$ πεπερασμένο είναι ανοικτό, διότι το συμπλήρωμά του (δηλαδή, το $A \setminus C$) είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο.

3.38. *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος και* $A \subseteq B \subseteq X$. *Δείξτε ότι: αν το* A *είναι πυκνό στο* B *και το* B *είναι πυκνό στο* X *τότε το* A *είναι πυκνό στο* X.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τυχόν $x \in X$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού το B είναι πυκνό στο X υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(b, x) < \varepsilon/2$, και αφού το A είναι πυκνό στο B υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(a, b) < \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $d(a, x) < \varepsilon$.

3.39. *Θεωρούμε το* $\mathbb{R}$ *με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν υπάρχει* $E \subseteq \mathbb{R}$, *διαφορετικό από το* $\emptyset$ *και το* $\mathbb{R}$, *το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα (για καθεμία ξεχωριστά δώστε παράδειγμα με αιτιολόγηση ή αποδείξτε ότι τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει):*

(α) *Το E είναι άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(β) *Το E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.*

(γ) *Το E είναι ανοικτό αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(δ) *Το E είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

(ε) *Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία (δηλαδή, το $E \setminus E'$ είναι άπειρο σύνολο).*

Υπόδειξη. (α) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\mathbb{Z}$: για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ισχύει $B(m, 1/2) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{m\}) = \emptyset$. Αν $x \notin \mathbb{Z}$ τότε, ακόμα ισχυρότερα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

(β) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{m + \frac{1}{2n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι σημείο συσσώρευσης του E: η ακολουθία $b_n = m + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει στο m και όλοι οι όροι της είναι διάφοροι του m. Το E δεν περιέχει διάστημα (διότι δεν περιέχει άρρητους) άρα δεν έχει εσωτερικά σημεία.

(γ) Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο: ως ανοικτό και μη κενό, θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, b), και κάθε $x \in (a, b)$ θα ήταν σημείο συσσώρευσης του E (εξηγήστε γιατί).

(δ) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Εξηγήστε γιατί είναι πυκνό.

(ε) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Περιέχεται στο $[0, 1]$ και το μοναδικό σημείο συσσώρευσής του είναι το 0. Εξηγήστε γιατί: το λεπτό σημείο είναι ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $\frac{1}{n}$ είναι μεμονωμένο σημείο του E, αφού (π.χ. για $n \geqslant 2$) αν πάρουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n(n+1)} = \min\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\} > 0$ τότε το μοναδικό σημείο του E στο $(1/n - \varepsilon_n, 1/n + \varepsilon_n)$ είναι το $1/n$.

3.40. *Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

(i) *Αν το A είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $A \setminus F$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

(ii) *Αν τα D_1, D_2 είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $D_1 \cap D_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (i) Σωστό: Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Στο $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A (διότι, αν τα μόνα σημεία του A ήταν τα $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ τότε στο $(x - \varepsilon, a_1)$ δεν θα υπήρχε σημείο του A, και αυτό είναι άτοπο αφού το A είναι πυκνό). Αφού το

$A\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ είναι άπειρο και το F είναι πεπερασμένο, έχουμε $(A\setminus F)\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\supseteq[A\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)]\setminus F\neq\emptyset$.

(ii) Λάθος: το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

3.41. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x\in X$. Θέτουμε $A=\{x_n : n=1,2,\ldots\}$. Αποδείξτε ότι:*

(i) *Αν $x\in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n}\to x$.*

(ii) *Αν η (x_n) είναι βασική, τότε το A' περιέχει το πολύ ένα σημείο.*

(iii) *Αν η (x_n) είναι βασική και $A'\neq\emptyset$, τότε η (x_n) είναι συγκλίνουσα.*

Υπόδειξη. (i) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A στην $B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στην $B(x,\varepsilon)$. Έτσι, παίρνοντας $\varepsilon=1,1/2,\ldots$ βρίσκουμε (διαδοχικά) $k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}<\cdots$ ώστε $d(x,x_{k_n})<\frac{1}{n}$ (στο n-οστό βήμα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι άπειροι $x_s\in B(x,1/n)$, άρα και κάποιος x_{k_n} με δείκτη $k_n>k_{n-1}$). Η (x_{k_n}) που ορίζεται έτσι είναι υπακολουθία της (x_n) και συγκλίνει στο x.

(ii) και (iii) μαζί: Έστω x σημείο συσσώρευσης του A. Από το προηγούμενο ερώτημα, η (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x. Αφού η (x_n) είναι βασική, έπεται ότι $x_n\to x$ (θεωρία). Αυτό αποδεικνύει και το (ii): αν το A είχε δύο σημεία συσσώρευσης $x\neq y$, τότε θα είχαμε $x_n\to x$ και $x_n\to y$, άτοπο.

3.42. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in X$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε η $B(x,\varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό σύνολο.*

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $x\in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, κάθε $A\subseteq X$ γράφεται ως ένωση ανοικτών συνόλων, $A=\bigcup_{x\in A}\{x\}$, άρα είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω λοιπόν $x\in X$. Από την υπόθεση υπάρχει ε_x ώστε $B(x,\varepsilon_x)=\{x\}$ ή $B(x,\varepsilon_x)=\{x,x_1,\ldots,x_N\}$, όπου $x_1,\ldots,x_N\neq x$. Στην δεύτερη περίπτωση, επιλέγουμε

$$0<\delta<\min\{d(x,x_1),\ldots,d(x,x_N)\}.$$

Τότε, $B(x,\delta)=\{x\}$ (εξηγήστε γιατί). Σε κάθε περίπτωση, το $\{x\}$ είναι ανοικτή μπάλα κατάλληλης ακτίνας, άρα ανοικτό σύνολο.

3.43. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):*

(α) *Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geqslant 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Υπόδειξη. (α) Σωστό. Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $D \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, άρα $x_0 \in D$ (ένα πυκνό σύνολο τέμνει κάθε ανοικτό υποσύνολο).

(β) Σωστό. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (y_m) σημείων του A είναι βασική, άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y_m, y_{m_0}) < 1/2$ για κάθε $m \geqslant m_0$. Αφού οι y_m, y_{m_0} είναι όροι της (x_n), αναγκαστικά έχουμε $y_m = y_{m_0}$, δηλαδή η (y_m) είναι τελικά σταθερή και συγκλίνει στο $y_{m_0} \in A$.

3.44. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$ με την Ευκλείδεια μετρική. Αποδείξτε ότι: αν A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και αν $x, y \in A^\circ$ τότε $\|x - y\|_2 < \mathrm{diam}(A)$.*

Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα σε κάθε μετρικό χώρο;

Υπόδειξη. Αν το A έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία τότε έχει κενό εσωτερικό και το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο (δεν υπάρχουν $x, y \in A^\circ$). Υποθέτουμε λοιπόν ότι το A έχει άπειρα (το «τουλάχιστον δύο» θα έφτανε) σημεία, οπότε $\mathrm{diam}(A) > 0$.

Έστω $x, y \in A^\circ$. Μπορούμε να υποθέσουε ότι $x \neq y$, αλλιώς $\|x - y\|_2 = 0 < \mathrm{diam}(A)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y, \delta) \subseteq A$. Το $z = y + \frac{\delta}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|_2}$ ανήκει στην $B(y, \delta)$ διότι $\|z - y\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta$. Επίσης,

$$\mathrm{diam}(A) \geqslant \|z - x\| = \left\| \left(\|y - x\|_2 + \frac{\delta}{2} \right) \frac{y - x}{\|y - x\|_2} \right\| = \|y - x\|_2 + \frac{\delta}{2} > \|y - x\|_2.$$

Σημείωση. Δεν ισχύει το ίδιο σε κάθε μετρικό χώρο: αν πάρουμε ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο σημεία, και αν θεωρήσουμε την διακριτή μετρική σε αυτό και $A = X$, τότε για οποιαδήποτε δύο σημεία $x \neq y$ στο $A^\circ = A = X$ έχουμε $\delta(x, y) = 1 = \mathrm{diam}(A)$.

3.45. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω A ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \in A$ και (x_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,*

$$B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A.$$

Υπόδειξη. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε (α) $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και (β) για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A$.

Έστω $z \in B(x_n, 1/n)$. Τότε,

$$d(z,x) \leqslant d(z,x_n) + d(x_n,x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, $z \in B(x,\varepsilon) \Longrightarrow z \in A$.

3.46. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Έστω $m \geqslant 2$ και $y_1,\dots,y_m$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του X. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα $G_1,\dots,G_m \subseteq X$ ώστε $y_i \in G_i$ για κάθε $i = 1,\dots,m$.*

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε τις ανοικτές μπάλες $G_i = B(y_i,\delta)$, όπου

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{d(y_i,y_j)}{2} : i \neq j\right\},$$

τότε αυτές είναι ξένες.

Ομάδα Γ΄

3.47. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $P \subseteq X$. Το P λέγεται τέλειο αν είναι κενό ή είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης γι' αυτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Ένα συνόλο $P \subseteq (X,\rho)$ είναι τέλειο αν και μόνο αν $P = P'$.*

(β) *Κάθε κλειστό (μη τετριμμένο) διάστημα στο $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική) είναι τέλειο σύνολο. Επίσης, το $\mathbb{R}$ είναι τέλειο αν θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

(γ) *Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο P του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. [Υπόδειξη. Το P είναι άπειρο. Αν είναι αριθμήσιμο, γράφεται στη μορφή $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίστε κατάλληλη ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[a_n,b_n] \cap P \neq \emptyset$ αλλά $x_n \notin [a_n,b_n]$.]*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το P είναι μη κενό (αλλιώς η ισότητα $P = P'$ ισχύει προφανώς). Υποθέτουμε πρώτα ότι το P είναι τέλειο: τότε το P είναι κλειστό και $P \subseteq P'$. Όμως, $P = \overline{P} = P \cup P'$, άρα $P \supseteq P'$. Συνεπώς, $P = P'$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $P = P'$. Τότε, το P είναι κλειστό διότι το P' είναι κλειστό (στην Άσκηση 3.24 είδαμε ότι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης οποιουδήποτε συνόλου είναι κλειστό). Από την $P = P'$ έχουμε $P \subseteq P'$. Άρα, το P είναι τέλειο με βάση τον ορισμό.

(β) Ελέγχεται εύκολα. Για παράδειγμα, αν $A = [a,b]$ τότε κάθε $x \in [a,b]$ είναι όριο ακολουθίας (x_n) στο $[a,b]$ με $x_n \neq x$ για κάθε n (εξηγήστε γιατί). Όμοια αν

$$A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και για κάθε $(x,0) \in A$ έχουμε $(x_n,0) := \left(x+\frac{1}{n},0\right) \in A$, $(x_n,0) \to (x,0)$ και $(x_n,0) \neq (x,0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Έστω P μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in P$ και, από τον ορισμό του τέλειου συνόλου, $x \in P'$. Από τον χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης, στο $(x-1,x+1)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του P. Άρα, το P είναι άπειρο.

Υποθέτουμε ότι το P είναι αριθμήσιμο. Δηλαδή, $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα ορίσουμε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ με $b_n - a_n \to 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[a_n,b_n] \cap P \neq \emptyset$ αλλά $x_n \notin [a_n,b_n]$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{y\}$. Αφού $y \in [a_n,b_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $y \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $y \notin P$. Από την άλλη πλευρά, $y \in P'$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n - a_n \to 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $b_n - a_n < \varepsilon$. Γι' αυτό το $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_{k_n} \in P$ ώστε $x_{k_n} \in [a_n,b_n]$, άρα $|y - x_{k_n}| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$. Αφού $y \notin P$, έχουμε $x_{k_n} \neq y$. Σε κάθε μπάλα $B(y,\varepsilon)$ βρήκαμε σημείο του P διαφορετικό από το y. Άρα, $y \in P'$. Δηλαδή, $y \in P' \setminus P$, το οποίο είναι άτοπο αφού το P είναι τέλειο.

Διαδικασία ορισμού των $[a_n,b_n]$: Υπάρχει σημείο x_{k_1} του P διαφορετικό από το x_1, για παράδειγμα το x_2. Θεωρούμε διάστημα $[a_1,b_1]$ με μέσο το x_{k_1} έτσι ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και $x_1 \notin [a_1,b_1]$.

Αφού το x_{k_1} είναι σημείο συσσώρευσης του P, στο $[a_1,b_1]$ υπάρχουν άπειρα σημεία του P, άρα στο (a_1,b_1) μπορούμε να βρούμε σημείο x_{k_2} του P διαφορετικό από το x_2. Θεωρούμε διάστημα $[a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$ με μέσο το x_{k_2} έτσι ώστε $b_2 - a_2 < 1/2$ και $x_2 \notin [a_2,b_2]$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει $[a_n,b_n] \subseteq [a_{n-1},b_{n-1}] \subseteq \cdots \subseteq [a_1,b_1]$ ώστε: κάθε $[a_s,b_s]$ έχει μέσο κάποιο $x_{k_s} \in P$, $b_s - a_s < 1/s$ και $x_s \notin [a_s,b_s]$, $s = 1,\ldots,n$. Αφού το x_{k_n} είναι σημείο συσσώρευσης του P, στο $[a_n,b_n]$ υπάρχουν άπειρα σημεία του P, άρα στο (a_n,b_n) μπορούμε να βρούμε σημείο $x_{k_{n+1}}$ του P διαφορετικό από το x_{n+1}. Θεωρούμε διάστημα $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$ με μέσο το $x_{k_{n+1}}$ έτσι ώστε $b_{n+1} - a_{n+1} < 1/(n+1)$ και $x_{n+1} \notin [a_{n+1},b_{n+1}]$. Επαγωγικά, ορίζεται η ακολουθία των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ με τις ιδιότητες που ζητούσαμε.

3.48. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x λέγεται σημείο συμπύκνωσης του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $A \cap (x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε δεν έχει σημεία συμπύκνωσης.*

(β) *Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης του A τότε $P' = P$ και το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.*

(γ) *Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε υπάρχουν τέλειο σύνολο P και αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) Αν το A είχε κάποιο σημείο συμπύκνωσης, τότε το σύνολο $A \cap (x-1, x+1)$ θα ήταν υπεραριθμήσιμο. Άρα, το A θα ήταν υπεραριθμήσιμο.

(β) Θεωρούμε μια αρίθμηση των ρητών $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις ανοικτές μπάλες $V_{nk} = B(q_n, 1/k)$. Ορίζουμε W να είναι η ένωση όλων των V_{nk} που περιέχουν αριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A και θέτουμε $P = \mathbb{R} \setminus W$.

Παρατηρούμε ότι το $W \cap A$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, άρα το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

Το W είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων, άρα το P είναι κλειστό. Συνεπώς, $P' \subseteq P$. Μένει να δείξουμε ότι το P είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης του A και ότι $P \subseteq P'$. Έστω $x \in P$ και $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ και $q_n \in \mathbb{Q}$ με $|q_n - x| < 1/k$. Τότε, $x \in V_{nk}$ άρα η V_{nk} δεν περιέχεται στο W. Αυτό σημαίνει ότι η V_{nk} περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A. Όμως, $V_{nk} \subseteq B(x, \varepsilon)$. Δείξαμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A, άρα το x είναι σημείο συμπύκνωσης του A. Τέλος, αφού το $W \cap A$ είναι αριθμήσιμο, η V_{nk} περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του P, άρα και κάποιο διαφορετικό από το x. Έπεται ότι $x \in P'$.

Μένει να δούμε ότι στο P περιέχονται όλα τα σημεία συμπύκνωσης του A. Αν $x \notin P$ τότε $x \in W$. Το W είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq W$. Όμως το $W \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα η $B(x, \delta)$ περιέχει αριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A. Έπεται ότι το x δεν είναι σημείο συμπύκνωσης του A.

(γ) Αν το A είναι αριθμήσιμο, θέτουμε $P = \emptyset$ και $Z = A$. Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο, θέτουμε P το σύνολο των σημείων σημείων συμπύκνωσης του A. Το A είναι κλειστό και $P \subseteq \overline{A}$, άρα $P \subseteq A$. Από το (β) γνωρίζουμε ότι το $Z = A \setminus P$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

3.49. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στο X. Το $x \in X$ λέγεται οριακό σημείο της (x_n) αν υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Θέτουμε $L(x_n)$ το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (x_n). Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $L(x_n) = \{x\}$. Ισχύει το αντίστροφο;*

(β) *Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ τότε $A' \subseteq L(x_n) \subseteq \overline{A}$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι οι εγκλεισμοί μπορεί να είναι γνήσιοι.*

(γ) *Το $L(x_n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

(δ) *Αν το A δεν είναι κλειστό, δείξτε ότι $L(x_n) \neq \emptyset$. Αν επιπλέον, η (x_n) είναι ρ-Cauchy, τότε είναι ρ-συγκλίνουσα.*

(ε) *Το x είναι οριακό σημείο της (x_n) αν και μόνο για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \geqslant n$ ώστε $x_m \in B_\rho(x, \varepsilon)$.*

Υπόδειξη. (α) Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε κάθε υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο x. Συνεπώς, $L(x_n) = \{x\}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει: στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_n = 1$ αν ο n είναι άρτιος και $x_n = n$ αν ο n είναι περιττός. Η (x_n) δεν συγκλίνει και $L(x_n) = \{1\}$ (εξηγήστε γιατί).

(β) Αν $x \in A'$ τότε σε κάθε περιοχή του x υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας (x_n) (διότι περιέχει άπειρα στοιχεία του A). Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα του x, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) ώστε $\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in L(x_n)$.

Αν $x \in L(x_n)$ τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$. Η $y_n = x_{k_n}$ είναι ακολουθία στο A και $y_n \to x$, άρα $x \in \overline{A}$.

Για το παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία $(x_n) = (0, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ στο $\mathbb{R}$. Τότε, $\overline{A} = A = \{0, 1\}$. Παρατηρήστε ότι $A' = \emptyset$ και $L(x_n) = \{1\}$ διότι $x_n \to 1$.

(γ) Έστω $x \in \overline{L(x_n)}$. Υπάρχει ακολουθία (y_m) οριακών σημείων της (x_n) ώστε $y_m \to x$. Θέτουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε y_{s_1} ώστε $\rho(x, y_{s_1}) < 1$. Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_{s_1}, x_{k_1}) < 1 - \rho(x, y_{s_1})$ διότι το y_{s_1} είναι οριακό σημείο της (x_n). Τότε, $\rho(x, x_{k_1}) < 1$ από την τριγωνική ανισότητα.

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1 < \cdots < k_n$ ώστε $\rho(x, x_{k_l}) < \frac{1}{l}$, $l = 1, \dots, n$. Θέτουμε $\varepsilon = 1/(n+1)$ και βρίσκουμε $y_{s_{n+1}}$ ώστε $\rho(x, y_{s_{n+1}}) < 1/(n+1)$. Υπάρχει $k_{n+1} > k_n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_{s_{n+1}}, x_{k_{n+1}}) < 1 - \rho(x, y_{s_{n+1}})$ διότι το $y_{s_{n+1}}$ είναι οριακό σημείο της (x_n) (οπότε, οσοδήποτε κοντά στο $y_{s_{n+1}}$ υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n)). Τότε, $\rho(x, x_{k_{n+1}}) < 1/(n+1)$ από την τριγωνική ανισότητα.

Επαγωγικά ορίζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με την ιδιότητα $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Άρα, $x \in L(x_n)$.

(δ) Αν το A δεν είναι κλειστό, τότε $A' \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in X$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει άπειρους όρους της (x_n), βρίσκουμε αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) ώστε $\rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, συμπεραίνουμε ότι $x \in L(x_n)$. Άρα, $L(x_n) \neq \emptyset$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι η (x_n) είναι ρ-Cauchy, συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι ρ-συγκλίνουσα (άμεσο, αφού έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).

(ε) Αν το x είναι οριακό σημείο της (x_n) τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Αν μας δοθούν $\varepsilon > 0$ και $n_1 \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε πρώτα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x, x_{k_n}) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$ και κατόπιν παρατηρούμε ότι αν $n = \max\{n_0, n_1\}$ τότε $k_n \geqslant n \geqslant n_1$ και $\rho(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Θέτοντας $m = k_n$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \geqslant n$ ώστε $x_m \in B_\rho(x, \varepsilon)$, βρίσκουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ επαγωγικά: θέτουμε $k_0 = 1$ και στο

n-οστό βήμα, θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση βρίσκουμε $k_n \geqslant k_{n-1} + 1$ ώστε $\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$.

3.50. *Σωστό ή λάθος; Για κάθε άπειρο μετρικό χώρο (X, d) υπάρχει άπειρο υποσύνολο A του X ώστε κάθε $G \subseteq A$ να είναι ανοικτό ως προς τη σχετική μετρική στο A.*

Υπόδειξη. Σωστό. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν ο X έχει άπειρα το πλήθος μεμονωμένα σημεία, τότε υπάρχει $A \subseteq X$, άπειρο, το οποίο αποτελείται εξ ολοκλήρου από μεμονωμένα σημεία του X. Το A έχει την ιδιότητα που θέλουμε: αν $G \subseteq A$ και $a \in G$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(a, \delta) \cap X = \{a\}$. Ειδικότερα, $B(a, \delta) \cap A = \{a\} \subseteq G$. Άρα, το G είναι ανοικτό στο A.

(β) Αν ο X έχει πεπερασμένα το πλήθος μεμονωμένα σημεία, τότε επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in X'$. Τότε, υπάρχει ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα $\rho(x_1, x_0) > \rho(x_2, x_0) > \cdots$ και $\varepsilon_n := \rho(x_n, x_0) \to 0$. Θέτουμε $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Το A έχει την ιδιότητα που θέλουμε: αν $G \subseteq A$ και $x \in G$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_n$. Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\}$. Τότε, για κάθε $k \neq n$ ισχύει

$$\rho(x_k, x_n) \geqslant |\varepsilon_k - \varepsilon_n| \geqslant \min\{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\} > \varepsilon,$$

άρα $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\} \subseteq G$.

3.51. *Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

(β) *Αν S είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δυο στοιχείων του S, η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.*

Υπόδειξη. (α) Έστω M το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X. Έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι: αν $x \in M$ τότε υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) = \{x\}$. Αφού $B(x, \varepsilon_x) \cap D \neq \emptyset$, έπεται ότι $x \in D$. Δηλαδή, το M είναι υποσύνολο του D.

Αν υποθέσουμε ότι ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος τότε υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D_0 του X. Έχουμε $M \subseteq D_0$, άρα το M είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω S υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X. Θεωρούμε τον υπόχωρο (S, ρ_S) του (X, ρ). Αν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος τότε ο (S, ρ_S) είναι επίσης διαχωρίσιμος (έχει αποδειχθεί: έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του). Από το (α) το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του (S, ρ_S) είναι το πολύ αριθμήσιμο. Άρα, υπάρχει $x \in S$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του (S, ρ_S). Από τον χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο S με όρους διαφορετικούς ανά δύο και διαφορετικούς από το x ώστε $\rho_S(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $\rho(x_n, x) \to 0$.

3.52. *Έστω $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$D(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $z = e^{2\pi\theta i}$ στο $\mathbb{C}$ και το σύνολο $A(\theta) = \{z^n = e^{2\pi n\theta i} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n > m$ στο $\mathbb{N}$ ώστε $0 < |z^n - z^m| < \varepsilon$, άρα $0 < |z^{n-m} - 1| < \varepsilon$.

Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η ακολουθία (z^n) είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε, δύο όροι αυτής της υπακολουθίας, που έχουν αρκετά μεγάλους δείκτες, ικανοποιούν τον ισχυρισμό.

Θέτουμε $w = z^{n-m}$ και παρατηρούμε ότι $|w^{k+1} - w^k| = |w - 1| < \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία $z^{k(n-m)}$, $k = 1, 2, \ldots$ είναι διαφορετικά ανά δύο σημεία της περιφέρειας $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ και σχηματίζουν τόξα με χορδές μήκους μικρότερου από ε. Έπεται ότι κάθε τόξο της $\mathbb{T}$, που έχει μήκος μικρότερο από 2ε, περιέχει σημείο της μορφής $z^{k(n-m)}$. Έπεται ότι το $A(\theta)$ είναι πυκνό στην $\mathbb{T}$.

Τώρα, έστω $(x, y) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1$. Από τα προηγούμενα, υπάρχει ακολουθία φυσικών k_s ώστε $e^{2\pi k_s\theta i} \to e^{2\pi t i}$. Έπεται ότι

$$(\cos(2\pi k_s\theta), \sin(2\pi k_s\theta)) \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = (x, y).$$

Άρα, το $D(\theta)$ είναι πυκνό στην S^1.

3.53. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Το $A \subseteq X$ λέγεται πουθενά πυκνό αν $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν $A \subseteq \overline{(X \setminus \overline{A})}$.*

(β) *Το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό και κλειστό αν και μόνον αν το $X \setminus A$ είναι πυκνό και ανοικτό.*

(γ) *Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το A είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν $A = \mathrm{bd}(A)$.*

(δ) *Αν το A είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X και το $X \setminus B$ είναι πυκνό τότε το $X \setminus (A \cup B)$ είναι πυκνό στον X.*

(ε) *Η ένωση πεπερασμένου πλήθους πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι πουθενά πυκνό. Από την $\overline{A} = \overline{\overline{A}} = \mathrm{int}(\overline{A}) \cup \mathrm{bd}(\overline{A})$ παίρνουμε

$$\overline{A} = \mathrm{bd}(\overline{A}) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}}$$

άρα $\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus \overline{A}}$.

Αντίστροφα, αν $\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus \mathrm{int}(\overline{A})$, τότε η $\overline{A} = \mathrm{int}(\overline{A}) \cup \mathrm{bd}(\overline{A})$ μας δίνει την $\overline{A} \subseteq \mathrm{bd}(\overline{A})$, δηλαδή,

$$\mathrm{int}(\overline{A}) \cup \mathrm{bd}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{bd}(\overline{A}).$$

Αφού $\mathrm{int}(\overline{A}) \cap \mathrm{bd}(\overline{A}) = \emptyset$ έπεται ότι $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$, άρα το A είναι πουθενά πυκνό.

(β) Αν το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό και κλειστό τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό και πυκνό (διότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ = X$). Αντίστροφα, αν το $X \setminus A$ είναι ανοικτό και πυκνό, τότε το A είναι κλειστό και $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A} = X$, δηλαδή $A^\circ = \emptyset$, άρα το A είναι κλειστό και πουθενά πυκνό.

(γ) Αν το A είναι κλειστό και πουθενά πυκνό τότε $A^\circ = \emptyset$, οπότε η $A = \overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A)$ μας δίνει $A = \mathrm{bd}(A)$. Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό και $A = \mathrm{bd}(A)$, τότε $\mathrm{bd}(A) = A = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A)$, οπότε $A^\circ = \emptyset$ (διότι $A^\circ \cap \mathrm{bd}(A) = \emptyset$).

(δ) Υποθέτουμε ότι το A είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X και το $X \setminus B$ είναι πυκνό. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού το $\overline{A}$ έχει κενό εσωτερικό, υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \setminus \overline{A}$. Το $B(x,\varepsilon) \setminus \overline{A}$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon) \setminus \overline{A}$. Το $X \setminus B$ έχει υποτεθεί πυκνό, άρα υπάρχει $u \in B(y,\delta) \cap (X \setminus B)$. Τότε, $u \in B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus (A \cup B))$. Δηλαδή, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$. Συνεπώς, το $X \setminus (A \cup B)$ είναι πυκνό στον X.

(ε) Έστω $A_1, \ldots, A_n$ πουθενά πυκνά υποσύνολα του X. Αν $F_i = \overline{A_i}$, $i = 1, \ldots, n$, τότε κάθε F_i είναι κλειστό και έχει κενό εσωτερικό. Επίσης, $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ έχει κενό εσωτερικό.

Γνωρίζουμε ότι το F_1 έχει κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $1 \leqslant k < n$, το $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ έχει κενό εσωτερικό και δείχνουμε ότι το $F_1 \cup \cdots \cup F_k \cup F_{k+1}$ έχει κενό εσωτερικό. Το ζητούμενο προκύπτει με διαδοχικές εφαρμογές αυτού του ισχυρισμού.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αφού το $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ έχει κενό εσωτερικό και $\overline{X \setminus F_{k+1}} = X \setminus (F_{k+1})^\circ = X$ δηλαδή το $X \setminus F_{k+1}$ είναι πυκνό, εφαρμόζοντας το (δ) βλέπουμε αμέσως ότι το $(X \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k)) \setminus F_{k+1} = X \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k \cup F_{k+1})$ είναι πυκνό. Άρα, το $F_1 \cup \cdots \cup F_k \cup F_{k+1}$ έχει κενό εσωτερικό.

3.54. *Έστω (q_n) μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε*

$$I_n = \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ότι το U^c είναι πουθενά πυκνό.

Υπόδειξη. Κάθε I_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως ανοικτό διάστημα, άρα το $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοικτό. Από τον ορισμό του, το U περιέχει το $\mathbb{Q}$, άρα $\overline{U} \supseteq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Έπεται ότι το U είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\mathrm{int}(U^c) = \mathbb{R} \setminus \overline{U} = \emptyset$, δηλαδή το U^c είναι πουθενά πυκνό.

3.55. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το A είναι πουθενά πυκνό.*

(β) *Το $\overline{A}$ δεν περιέχει μη κενό ανοικτό σύνολο.*

(γ) *Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει ένα μη κενό ανοικτό σύνολο ξένο προς το A.*

(δ) *Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει μια ανοικτή μπάλα ξένη προς το A.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\overline{A}$. Τότε, $G \subseteq \mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$ διότι το A είναι πουθενά πυκνό. Άρα, το μόνο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $\overline{A}$ είναι το κενό σύνολο.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Έστω G μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X. Αφού έχουμε υποθέσει το (β), το $G \setminus \overline{A}$ είναι μη κενό και ανοικτό. Άρα, υπάρχουν $x \in G$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq G \setminus \overline{A}$. Έπεται το ζητούμενο, αφού $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, το $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στο G.

(γ) $\Rightarrow$ (δ): Έστω G μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X. Αφού έχουμε υποθέσει το (γ), υπάρχει μη κενό και ανοικτό $G_1 \subseteq G$ ώστε $G_1 \cap A = \emptyset$. Επιλέγουμε τυχόν $x \in G_1$ και βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq G_1$. Τότε, η ανοικτή μπάλα $B(x,\varepsilon)$ περιέχεται στο G και $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$.

(δ) $\Rightarrow$ (α): Έστω $A \subseteq X$ το οποίο δεν είναι πουθενά πυκνό και ικανοποιεί την πρόταση (δ). Τότε, υπάρχουν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq \overline{A}$. Αφού ισχύει η (δ) για το A, υπάρχει $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ ώστε $B(y,\delta) \cap A = \emptyset$. Τότε, $B(y,\delta) \subseteq (X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ και, ταυτόχρονα, $B(y,\delta) \subseteq B(x,\epsilon) \subseteq \overline{A}$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

3.56. *Έστω (X_n,ρ_n), $n = 1,2,\dots$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x,y) \leqslant 1$ για κάθε $x,y \in X_n$, $n = 1,2,\dots$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο (X,ρ), όπου $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(x(n),y(n))$. Σταθεροποιούμε $\alpha = (\alpha(n))$ στον X. Θεωρούμε τα σύνολα*

$$D_m = \{x = (x(n)) \in X : x(n) = \alpha(n),\ n > m\},\ m = 1,2,\dots$$

και ορίζουμε

$$D_\alpha := \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m.$$

Αποδείξτε ότι το D_α είναι πυκνό στον X.

Υπόδειξη. Έστω $x = (x(n))$ στον X και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ και ορίζουμε $y = (x(1), \ldots, x(m), \alpha(m+1), \alpha(m+2), \ldots)$. Τότε, $y \in D_m \subseteq D_\alpha$ και

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{\rho_n(x(n), x(n))}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\rho_n(x(n), \alpha(n))}{2^n} \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\rho_n(x(n), \alpha(n))}{2^n} \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $B_\rho(x,\varepsilon) \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Έπεται ότι το D_α είναι πυκνό στον (X,ρ).

3.57. *Έστω A, B αριθμήσιμα, πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι αύξουσα, 1-1 και επί.*

Υπόδειξη. Έστω $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ δύο αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε αύξουσα, 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \to B$ (και την αντίστροφή της $g : B \to A$) με την εξής επαγωγική διαδικασία:

1. Θέτουμε $f(a_1) = b_1$ και $g(b_1) = a_1$.

2. Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ και $g(b_1), \ldots, g(b_n)$ έτσι ώστε: (i) αν $f(a_k)$ είναι κάποιο b_s από τα $b_1, \ldots, b_n$ τότε $g(b_s) = a_k$, (ii) αν $g(b_k)$ είναι κάποιο a_s από τα $a_1, \ldots, a_n$ τότε $f(a_s) = b_k$, (iii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\{a_1, \ldots, a_n, g(b_1), \ldots, g(b_n)\}$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\{b_1, \ldots, b_n, f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$.

Ορίζουμε τα $f(a_{n+1})$ και $g(b_{n+1})$ ως εξής: αν $a_{n+1} = g(b_k)$ για κάποιο $k = 1, \ldots, n$, θέτουμε $f(a_{n+1}) = b_k$. Αλλιώς, $a_{n+1} \notin A_n = \{a_1, \ldots, a_n, g(b_1), \ldots, g(b_n)\}$. Κοιτάζουμε τη διάταξη των στοιχείων του A_n και τη θέση του a_{n+1} ανάμεσα σε αυτά. Το σύνολο $B_n = \{f(a_1), \ldots, f(a_n), b_1, \ldots, b_n\}$ έχει ακριβώς την ίδια διάταξη και από την πυκνότητα του B μπορούμε να βρούμε κάποιο b_s το οποίο να έχει την ίδια θέση ως προς τα στοιχεία του B_n (με την θέση του a_{n+1} ως προς τα στοιχεία του A_n). Ορίζουμε $f(a_{n+1}) = b_s$. Τότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_n \cup \{a_{n+1}\}$. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε το $g(b_{n+1})$ αν $b_{n+1} \notin B_n \cup \{f(a_{n+1})\}$, έτσι ώστε η g να είναι γνησίως αύξουσα στο $B_n \cup \{b_{n+1}, f(a_{n+1})\} = B_{n+1}$.

Επαγωγικά, ορίζονται οι $f : A \to B$ και $g : B \to A$ έτσι ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα και επί, και η g να είναι η αντίστροφη της f.

Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

Ομάδα Α΄

4.1. *Έστω $f, g : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ δυο συνεχείς συναρτήσεις και D πυκνό υποσύνολο του (X, ρ). Δείξτε ότι:*

(α) *Το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.*

(β) *Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, τότε $f \equiv g$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στο E με $x_n \to x \in X$. Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x, έχουμε $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ και $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. Όμως, $x_n \in E$ άρα $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Άρα, $x \in E$.

(β) Από το (α), το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό. Από την $D \subseteq E$ έπεται ότι $X = \overline{D} \subseteq E$, δηλαδή $E = X$. Άρα, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

4.2. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$, $\rho(y, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2$. Τότε, αν τα $x, y \in X$ ικανοποιούν τις $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\rho(y, x_0) < \delta$ έχουμε

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \sigma(f(x), f(x_0)) + \sigma(f(x_0), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\rho(y, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Θέτοντας $y = x_0$ (παρατηρήστε ότι $\rho(x_0, x_0) < \delta$) βλέπουμε ότι αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

4.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχουν συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, ώστε $G = f^{-1}(V)$.*

Υπόδειξη. Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής γνωρίζουμε ότι για κάθε ανοικτό $V \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.

Αντίστροφα, έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Υποθέτουμε πρώτα ότι $X \setminus G \neq \emptyset$. Τότε, η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x, X \setminus G)$ είναι καλά ορισμένη, μη αρνητική, και ισχύει $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in X \setminus G$ διότι το $X \setminus G$ είναι κλειστό. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$G = f^{-1}((0, \infty)).$$

Αφού το $V = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχουμε το ζητούμενο. Αν $G = X$, θεωρούμε την $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ και γράφουμε $G = X = f^{-1}(\mathbb{R})$.

4.4. (α) *Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $Z(f)$ το σύνολο μηδενισμού της f, δηλαδή*

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι: αν η f είναι συνεχής τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό στον X.

(β) *Έστω $F \subseteq X$. Δείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ ώστε $Z(f) = F$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού η $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(β) Λόγω του (α) αρκεί να δείξουμε ότι αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του X τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $Z(f) = F$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $F \neq \emptyset$. Τότε, για τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x, F)$ έχουμε $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{F} = F$, δηλαδή $Z(f) = F$. Αν $F = \emptyset$ θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που δεν μηδενίζεται πουθενά, για παράδειγμα τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

4.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με χ_A την χαρακτηριστική συνάρτηση του A, όπου $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως*

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων συνέχειας της χ_A ειναι το $A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$, το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της είναι το $\mathrm{bd}(A)$ και ότι η f είναι συνεχής αν και μόνον αν το A είναι ανοικτό και κλειστό (clopen).

Υπόδειξη. Έστω $x \in A^\circ$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq A$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ αν επιλέξουμε το συγκεκριμένο $\delta > 0$ έχουμε: αν $x_1 \in B(x,\delta)$ τότε

$$|\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| = |1-1| = 0 < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η χ_A είναι συνεχής στο x. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η χ_A είναι συνεχής σε κάθε $x \in (X \setminus A)^\circ$: υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x,\delta) \subseteq X \setminus A$, συνεπώς η χ_A είναι σταθερή και ίση με μηδέν στην $B(x,\delta)$.

Έστω $x \in \mathrm{bd}(A)$. Υπάρχουν ακολουθίες (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$ και (x_n') στο $X \setminus A$ ώστε $x_n' \to x$. Τότε, $\chi_A(x_n) = 1 \to 1$ και $\chi_A(x_n') = 0 \to 0$. Από την αρχή της μεταφοράς, η f είναι ασυνεχής στο x.

Αφού $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$, έπεται το ζητούμενο.

Για την τελευταία ερώτηση, με βάση τα προηγούμενα, η χ_A είναι συνεχής αν και μόνο αν $\mathrm{bd}(A) = \emptyset$. Τότε, από την $\overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A)$ βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\overline{A} = A^\circ$, δηλαδή αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό και κλειστό.

4.6. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Το γράφημα της f είναι το σύνολο*

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο. Δώστε παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

Υπόδειξη. Έστω d μια μετρική γινόμενο στο $X \times Y$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_n, f(x_n)) \in \mathrm{Gr}(f)$ με $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{d} (x,y) \in X \times Y$. Αφού η d είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} y$. Αφού η f είναι συνεχής στο x και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου για την $(f(x_n))$ συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$. Συνεπώς, $(x,y) = (x, f(x)) \in \mathrm{Gr}(f)$. Έπεται ότι το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό σύνολο στον $(X \times Y, d)$.

Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα σωστό. Η $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι ασυνεχής στο 0. Παρατηρήστε όμως ότι $\mathrm{Gr}(f) = A \cup B$ όπου $A = \{(0,0)\}$ και $B = \big\{\big(x, \frac{1}{x}\big) \mid x > 0\big\}$. Το A είναι κλειστό ως μονοσύνολο, ενώ το B είναι επίσης κλειστό (Άσκηση 3.27). Άρα, το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό στο $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.

4.7. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση και έστω A διαχωρίσιμο υποσύνολο του X (δηλαδή, ο (A,ρ_A) είναι διαχωρίσιμος). Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του Y.*

Υπόδειξη. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $(A,\rho|_A)$. Θεωρούμε το $f(D) \subseteq f(A)$. Το $f(D)$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον $(f(A),\sigma|_{f(A)})$. Έστω $y \in f(A)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x_1 \in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στο A, μπορούμε να βρούμε $d \in D \cap B(x,\delta)$. Τότε, $f(d) \in f(D)$ και $\sigma(f(d), y) = \sigma(f(d), f(x)) < \varepsilon$. Τα $y \in f(A)$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, άρα το $f(D)$ είναι πυκνό (και αριθμήσιμο) υποσύνολο του $f(A)$.

4.8. *Δώστε παράδειγμα φραγμένης, συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορεί μια μη φραγμένη συνάρτηση να είναι ομοιόμορφα συνεχής;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x^2)$. Η f είναι συνεχής και φραγμένη: $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δούμε, θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \text{ και } y_n = \sqrt{n\pi}.$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0,$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένες. Για παράδειγμα, η $g(x) = x$.

4.9. *Δώστε ένα παράδειγμα δυο ξένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου τα οποία διαχωρίζονται, αλλά δε διαχωρίζονται πλήρως.*

Υπόδειξη. Λέμε ότι δύο ξένα υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου (X,ρ) διαχωρίζονται αν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq X$ ώστε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Αν επιπλέον ισχύει $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, λέμε ότι τα A και B διαχωρίζονται πλήρως. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε τα σύνολα $A = (-\infty, 0)$ και $B = (0, \infty)$. Τα A και B διαχωρίζονται, διότι είναι ήδη ανοικτά: αν πάρουμε $U = A$ και $V = B$ τότε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = A \cap B = \emptyset$.

Όμως, δεν διαχωρίζονται πλήρως: αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ανοικτά σύνολα $U_1 \supseteq A$ και $V_1 \supseteq B$, τότε $0 \in \overline{A} \subseteq \overline{U_1}$ και $0 \in \overline{B} \subseteq \overline{V_1}$, άρα $0 \in \overline{U_1} \cap \overline{V_1}$ δηλαδή $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} \neq \emptyset$.

4.10. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός. Δείξτε ότι ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο (Y,σ) είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του (X,ρ). Θεωρούμε το $f(D) \subseteq Y$. Το $f(D)$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον (Y,σ). Έστω $y \in Y$ και έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι επί, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x_1 \in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, μπορούμε να βρούμε $d \in D \cap B(x,\delta)$. Τότε, $f(d) \in f(D)$ και $\sigma(f(d), y) = \sigma(f(d), f(x)) < \varepsilon$. Τα $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, άρα το $f(D)$ είναι πυκνό (και αριθμήσιμο) υποσύνολο του Y.

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε μόνο το γεγονός ότι η f είναι επί και συνεχής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρειαστούμε τη συνέχεια (και το «επί») της f^{-1}.

Ομάδα Β΄

4.11. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Δείξτε ότι, αν για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(A') \subseteq (f(A))'$, τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;*

Υπόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι: αν $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subseteq X$ τότε η f είναι συνεχής. Πράγματι, αν $C \subseteq Y$ κλειστό, θέτοντας $A = f^{-1}(C)$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$, άρα $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, δηλαδή το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Με βάση αυτό το κριτήριο συνέχειας, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Λόγω της $\overline{A} = A \cup A'$, αρκεί να δείξουμε ότι $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ (το οποίο είναι φανερό) και $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$. Όμως, από την υπόθεση έχουμε $f(A') \subseteq (f(A))'$ και $\overline{f(A)} = f(A) \cup (f(A))'$ άρα $(f(A))' \subseteq \overline{f(A)}$. Συνεπώς, $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$.

Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα σωστό. Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, το $f(A')$ είναι μονοσύνολο για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A' \neq \emptyset$ (για παράδειγμα, αν $A = \mathbb{R}$) ενώ $(f(A))' = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί).

4.12. *Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (Y,\delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική στον Y. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Αν η f είναι σταθερή τότε είναι προφανώς συνεχής. Αντίστροφα, έστω $f : \mathbb{R} \to (Y,\delta)$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$ και το $y_0 = f(x_0) \in Y$. Το $\{y_0\}$ είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό στον (Y,δ) (εξηγήστε γιατί). Άρα, το $A = f^{-1}(\{y_0\})$

είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έχουμε δείξει ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $A = \emptyset$ ή $A = \mathbb{R}$. Αφού $x_0 \in A$, συμπεραίνουμε ότι $A = \mathbb{R}$. Συνεπώς, $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η f είναι σταθερή).

4.13. *Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ λέγεται τοπικά φραγμένη (locally bounded) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U_x του x ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι φραγμένη.*

(α) *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι τοπικά φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;*

(β) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι συνεχής.*

(ii) *Η f είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και έστω $x \in X$. Παίρνοντας $\varepsilon = 1 > 0$ βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), 1)$. Θέτοντας $U_x = B(x, \delta)$ έχουμε το ζητούμενο. Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα σωστό: για παράδειγμα, υπάρχουν πολλές φραγμένες, ασυνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(β) Από το (α) και την Άσκηση 4.6 έχουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση (μεταξύ μετρικών χώρων) είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα. Αντίστροφα, έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$ αλλά $f(x_n) \not\to f(x)$. Περνώντας σε υπακολουθία της (x_n) μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι τοπικά φραγμένη, υπάρχουν περιοχή U_x του x και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant M$ για κάθε $t \in U_x$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in U_x$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, $|f(x_n)| \leqslant M$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα η $(f(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Τότε, $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \in \mathrm{Gr}(f)$ και $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to (x, y)$. Αφού το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$, δηλαδή $f(x_{k_n}) \to f(x)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $|f(x_{k_n}) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4.14. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση και D πυκνό υποσύνολο του X. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς.*

(α) *Αν η $f|_D$ είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη.*

(β) *Αν η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(γ) *Αν η $f|_D$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.*

Υπόδειξη. (α) Η υπόθεση ότι η $f|_D$ είναι φραγμένη σημαίνει ότι υπάρχει (κλειστή) μπάλα $\hat{B}(y, r)$ στον Y ώστε $f(d) \in \hat{B}(y, r)$ για κάθε $d \in D$. Έστω $x \in X$. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, υπάρχει ακολουθία (d_n) στο D με $d_n \to x$. Τότε, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(d_n)$ άρα $f(x) \in \overline{\hat{B}(y,r)} = \hat{B}(y,r)$. Αυτό δείχνει ότι $f(X) \subseteq \hat{B}(x,r)$, δηλαδή η f είναι φραγμένη.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $d_1, d_2 \in D$ και $\rho(d_1, d_2) < \delta$ τότε $\sigma(f(d_1), f(d_2)) < \varepsilon$. Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta/2$. Η f είναι συνεχής στα x_1 και x_2, άρα υπάρχει $\eta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x, x_i) < \eta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, μπορούμε να βρούμε $d_1, d_2 \in D$ ώστε $\rho(d_1, x_1) < \min\{\delta/4, \eta\}$ και $\rho(d_2, x_2) < \min\{\delta/4, \eta\}$. Τότε,

$$\rho(d_1, d_2) \leqslant \rho(d_1, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, d_2) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta,$$

άρα $\sigma(f(d_1), f(d_2)) < \varepsilon$. Επίσης, από τις $\rho(d_i, x_i) < \eta$ ($i = 1, 2$) παίρνουμε $\sigma(f(d_i), f(x_i)) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Έπεται ότι

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \sigma(f(x_1), f(d_1)) + \sigma(f(d_1), f(d_2)) + \sigma(f(d_2), f(x_2)) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Δείξαμε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $x_1, x_2 \in X$ και $\rho(x_1, x_2) < \delta/2$ τότε $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < 3\varepsilon$. Άρα, η $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Δεν είναι απαραίτητα σωστό: η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1. Το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < 0\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η $f|_D$ είναι 1-1 (παρατηρήστε ότι: αν $t \neq s$ και $f(t) = f(s) \neq 0$ τότε $t = -s$, και ειδικότερα, οι t, s είναι ετερόσημοι και είτε $t, s \in \mathbb{Q}$ ή $t, s \notin \mathbb{Q}$).

4.15. *Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: αν $A, B \subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A, B) < \delta$, τότε $\mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in X$ και $\rho(x, y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Θεωρούμε $A, B \subseteq X$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} < \delta.$$

Τότε, υπάρχουν $a_0 \in A$ και $b_0 \in B$ ώστε $\rho(a_0, b_0) < \delta$. Έπεται ότι $\sigma(f(a_0), f(b_0)) < \varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(f(A), f(B)) = \inf\{\sigma(f(a), f(b)) : a \in A, b \in B\} \leqslant \sigma(f(a_0), f(b_0)) < \varepsilon.$$

(β) $\Rightarrow$ (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A, B \subseteq X$ και $\mathrm{dist}(A, B) < \delta$ τότε $\mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$. Θεωρούμε $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta$. Αν θέσουμε $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$ τότε $\mathrm{dist}(A, B) = \rho(x, y) < \delta$, συνεπώς $\sigma(f(x), f(y)) = \mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$.

4.16. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ κλειστά και ξένα. Αν $f : X \to [0, 1]$ είναι η συνάρτηση του Urysohn, δηλαδή $f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x,A)}{\mathrm{dist}(x,A)+\mathrm{dist}(x,B)}$, αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν $\mathrm{dist}(A, B) = 0$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Αν $\mathrm{dist}(A, B) = \delta > 0$, τότε η f είναι δ^{-1}-Lipschitz.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} = 0$, μπορούμε να βρούμε $x_n \in A$ και $y_n \in B$ ώστε $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Τότε, $\rho(x_n, y_n) \to 0$. Αν η f ήταν ομοιόμορφα συνεχής, θα είχαμε $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Όμως, $f \equiv 0$ στο A και $f \equiv 1$ στο B, άρα $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \not\to 0$. Έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Για συντομία γράφουμε $d_A(x) := \mathrm{dist}(x, A)$ και $d_B(x) := \mathrm{dist}(x, B)$. Έστω $x \in X$. Για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε

$$\rho(x, a) + \rho(x, b) \geqslant \rho(a, b) \geqslant \mathrm{dist}(A, B) = \delta.$$

Παίρνοντας infimum πρώτα ως προς $a \in A$ και μετά ως προς $b \in B$ συμπεραίνουμε ότι

$$d_A(x) + d_B(x) \geqslant \delta \text{ για κάθε } x \in X.$$

Έστω $x, y \in X$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι οι d_A, d_B είναι συναρτήσεις Lipschitz με σταθερά 1, έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} - \frac{d_A(y)}{d_A(y) + d_B(y)}\right| \\
&= \frac{1}{(d_A(x) + d_B(x))(d_A(y) + d_B(y))} |d_A(x)d_B(y) - d_A(y)d_B(x)| \\
&= \frac{1}{(d_A(x) + d_B(x))(d_A(y) + d_B(y))} |(d_A(x) - d_A(y))d_B(y) + d_A(y)(d_B(y) - d_B(x))| \\
&\leqslant \frac{1}{(d_A(x) + d_B(x))(d_A(y) + d_B(y))} \big(|d_A(x) - d_A(y)|d_B(y) + d_A(y)|d_B(y) - d_B(x)|\big) \\
&\leqslant \frac{1}{(d_A(x) + d_B(x))(d_A(y) + d_B(y))} \big(d_B(y) + d_A(y)\big)\rho(x, y) \\
&= \frac{1}{(d_A(x) + d_B(x))} \rho(x, y) \leqslant \frac{1}{\delta} \rho(x, y).
\end{aligned}$$

4.17. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ και $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$ (ομοιόμορφα) συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \in B \end{cases}$$

είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που οι f_1, f_2 είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f_1 είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $a_1, a_2 \in A$ και $\rho(a_1, a_2) < \delta_1$ τότε $|f_1(a_1) - f_1(a_2)| < \varepsilon$. Όμοια, αφού η f_2 είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $b_1, b_2 \in B$ και $\rho(b_1, b_2) < \delta_2$ τότε $|f_2(b_1) - f_2(b_2)| < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2, \mathrm{dist}(A, B)\} > 0$. Έστω $x, y \in A \cup B$ με $\rho(x, y) < \delta$. Αφού $\rho(x, y) < \mathrm{dist}(A, B)$, θα έχουμε $x, y \in A$ ή $x, y \in B$. Στην πρώτη περίπτωση, αφού $\rho(x, y) < \delta < \delta_1$ παίρνουμε $|f(x) - f(y)| = |f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon$. Στη δεύτερη, αφού $\rho(x, y) < \delta < \delta_2$ παίρνουμε $|f(x) - f(y)| = |f_2(x) - f_2(y)| < \varepsilon$. Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4.18. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f επεκτείνεται σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F : \overline{A} \to \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in \overline{A}$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$. Η (x_n) είναι βασική, άρα η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ (διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Τότε, υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$. Αν (x_n') είναι κάποια άλλη ακολουθία στο A με $x_n' \to x$, τότε $\rho(x_n, x_n') \to 0$ άρα $f(x_n') - f(x_n) \to 0$ (πάλι από την ομοιόμορφη συνέχεια της f). Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ παίρνοντας σαν (x_n) μία από τις ακολουθίες του A που συγκλίνουν στο x (το όριο δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας).

Η F είναι επέκταση της f: αν $x \in A$ τότε η σταθερή ακολουθία $x_n = x$ είναι στο A και συγκλίνει στο x, άρα $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x)$. Μένει να δείξουμε ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $z, w \in A$ και $\rho(z, w) < \delta$ τότε $|f(z) - f(w)| < \varepsilon/2$. Έστω $x, y \in \overline{A}$ με $\rho(x, y) < \delta$. Υπάρχουν $x_n, y_n \in A$ ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Τότε, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y) < \delta$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, y_n) < \delta$. Από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Συνεπώς, $|F(x) - F(y)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$.

4.19. *Εξετάστε αν ισχυουν τα παρακάτω.*

(α) *Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.*

(β) *Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.*

(γ) *Το $\mathbb{Q}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.*

(δ) *Το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. (α) Το $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$. Δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ διότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

(β) Το $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$. Δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ διότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

(γ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Θεωρούμε την ακολουθία (q_n) στο $\mathbb{Q}$ με $q_n = \frac{1}{n}$. Έχουμε $q_n = \frac{1}{n} \to 0 \in \mathbb{Q}$, άρα $f(1/n) \to f(0)$. Αναγκαστικά, η $f(1/n)$ πρέπει να είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(0)$ (οι συγκλίνουσες ακολουθίες ακεραίων είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες ακεραίων). Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(1/n) = f(0)$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, αφού η f είναι 1-1, θα πρέπει να ισχύει $1/n = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$, το οποίο είναι άτοπο.

(δ) Το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$. Έχουμε δει ότι κάθε συνάρτηση $u : \mathbb{N} \to (X, \rho)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και κάθε συνάρτηση $v : \mathbb{Z} \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισοπληθικά, άρα υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Τότε, οι f και f^{-1} είναι συνεχείς, άρα η f είναι ομοιομορφισμός.

4.20. *Δίνονται οι μετρικοί χώροι $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ και ο χώρος γινόμενο $\prod_{i=1}^k X_i$ με μετρική γινόμενο την $d_\infty = \max\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to \prod_{i=1}^k X_i$ με $f = (f_1, \ldots, f_k)$, όπου $f_i : X \to X_i$ για $i = 1, \ldots, k$. Δείξτε τα εξής:*

(α) *Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν οι $f_i,\ i = 1, \ldots, k$ είναι συνεχείς.*

(β) *Η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν κάθε f_i είναι Lipschitz.*

(γ) *Η f είναι ομοιομόρφα συνεχής αν και μόνο αν οι $f_i,\ i = 1, \ldots, k$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.*

(δ) *Είναι σωστό ότι η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν οι f_i είναι ισομετρίες;*

(ε) *Είναι σωστό ότι η f είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν οι f_i είναι ομοιομορφισμοί;*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$. Αν οι $f_i,\ i = 1, \ldots, k$ είναι συνεχείς τότε $f_i(x_n) \to f_i(x)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$ από το γεγονός ότι η d_∞ είναι μετρική γινόμενο. Για την αντίστροφη κατεύθυνση παρατηρήστε ότι $f_i = \pi_i \circ f$, $i = 1, \ldots, k$ (βλέπε Άσκηση 4.24).

(β) Αν κάθε f_i είναι Lipschitz με σταθερά $M_i > 0$ τότε για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) : i = 1, \ldots, k\} \leqslant (\max M_i)\, \rho(x, y).$$

Αντίστροφα, αν η f είναι Lipschitz με σταθερά $M > 0$ τότε για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i = 1, \dots, k$ έχουμε

$$d_i(f_i(x), f_i(y)) \leqslant d_\infty(f(x), f(y)) \leqslant M\,\rho(x, y).$$

(γ) Υποθέτουμε πρώτα ότι οι $f_i,\ i = 1, \dots, k$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $\delta_i > 0$ ώστε: αν $\rho(x, y) < \delta_i$ τότε $d_i(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$. Τότε, αν $\rho(x, y) < \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ έχουμε

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) : i = 1, \dots, k\} < \varepsilon.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση δουλεύουμε ανάλογα.

(δ) Αν κάθε f_i είναι ισομετρία τότε η f είναι ισομετρία. Πράγματι, έχουμε για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$, $d_i(f_i(x), f_i(y)) = \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X_i$. Τότε, αν $x, y \in X$ ισχύει:

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) : 1 \leqslant i \leqslant k\} = \rho(x, y).$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $\pi_i : (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) = x_i$ (δηλαδή την i–προβολή) τότε καμιά από τις π_i δεν είναι ισομετρία, αλλά η $f = (\pi_1, \dots, \pi_k) : (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρία αφού είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

(ε) Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι μπορεί η f να είναι ομοιομορφισμός και καμιά από τις f_i να μην είναι. Επίσης, μπορεί κάθε f_i να ομοιομορφισμός και η f να μην είναι: Αν θεωρήσουμε τις $f_1, f_2 : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = -x$ τότε αυτές είναι ομοιομορφισμοί, αλλά η $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι επί. (Παρατηρήστε ότι στέλνει όλα τα σημεία στην ευθεία $x + y = 0$.)

Ομάδα Β΄ – Συμπληρωματικές ασκήσεις

4.21. *Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:*

(α) Η συνάρτηση $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ με $g(x, y) = \sigma(f(x), y)$ είναι συνεχής.

(β) Το σύνολο $A = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \in B_\sigma(y, 1)\}$ είναι ανοικτό.

Υπόδειξη. (α) Έστω $(x_n, y_n) \to (x, y)$ στον $X \times Y$. Τότε, $x_n \to x$ και $y_n \to y$ (στον $X \times Y$ εννοείται ότι έχουμε μια μετρική γινόμενο). Αφού η f είναι συνεχής και $x_n \to x$, έχουμε $f(x_n) \to f(x)$. Έπεται ότι, στον Y,

$$\sigma(f(x_n), y_n) \to \sigma(f(x), y),$$

δηλαδή $g(x_n, y_n) \to g(x, y)$. Από την αρχή της μεταφοράς, η g είναι συνεχής.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$A = \{(x, y) : \sigma(f(x), y) < 1\} = \{(x, y) : g(x, y) < 1\} = g^{-1}((-\infty, 1)).$$

Αφού η g είναι συνεχής, το A είναι ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $(-\infty, 1)$.

4.22. *Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x \in X : f(x) < a\}$ και $\{x \in X : f(x) > b\}$ είναι ανοικτά.*

Υπόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x \in X : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$ και $\{x \in X : f(x) > b\} = f^{-1}((b, \infty))$ είναι ανοικτά σύνολα ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών ημιευθειών.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, και θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x_0, \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $a = f(x_0) + \varepsilon$ και $b = f(x_0) - \varepsilon$, έχουμε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)\} = \{x \in X : f(x) < f(x_0) + \varepsilon\} \cap \{x \in X : f(x_0) - \varepsilon < f(x)\}$$

είναι ανοικτό σύνολο, και $x_0 \in A$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq A$.

4.23. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f \circ f = f$. Δείξτε ότι το σύνολο $f(X)$ είναι κλειστό.*

Υπόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(X)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $y_n = f(x_n)$. Αφού η f είναι συνεχής και $f \circ f = f$, έχουμε

$$f(y_n) = f(f(x_n)) = (f \circ f)(x_n) = f(x_n) = y_n.$$

Πάλι από την συνέχεια της f, αφού $y_n \to y$ έχουμε $y_n = f(y_n) \to f(y)$. Δηλαδή, $f(y) = y$. Άρα, $y \in f(X)$.

4.24. *Έστω $f, g : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x \in X$ ώστε $f(x) \neq g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε: για κάθε $y, z \in B(x, r)$ ισχύει $f(y) \neq g(z)$.*

Υπόδειξη. Αφού $f(x) \neq g(x)$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$(*) \qquad B(f(x), \varepsilon) \cap B(g(x), \varepsilon) = \emptyset.$$

Από την συνέχεια της f και της g στο x μπορούμε να βρούμε $r_1 > 0$ ώστε $f(B(x, r_1)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ και $r_2 > 0$ ώστε $g(B(x, r_2)) \subseteq B(g(x), \varepsilon)$. Θέτουμε $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$. Τότε, αν $y, z \in B(x, r)$ έχουμε $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ και $g(z) \in B(g(x), \varepsilon)$ και από την $(*)$ έπεται ότι $f(y) \neq g(z)$.

4.25. *Θεωρούμε τα σύνολα* $\mathbb{N}$ *και* $\mathbb{Q}$ *με την συνήθη μετρική.*

(α) *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του* $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ *με την ιδιότητα* $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) *Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση* $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(γ) *Εξετάστε αν οι* $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ *και* $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ *είναι ομοιομορφικοί.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$. Κάθε G_n είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ (εξηγήστε γιατί) και $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) Επιλέγουμε $\delta = 1/2$. Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ έχουμε: αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $|m - n| < 1/2$, τότε $m = n$, άρα $f(m) = f(n)$ και έπεται ότι $|f(m) - f(n)| = 0 < \varepsilon$.

(γ) Έστω $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής, 1-1 και επί. Θεωρούμε την $q_n = \frac{1}{n} \to 0$. Τότε, $g(q_n) \to g(0)$. Αφού η $(g(q_n))$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία φυσικών, είναι τελικά σταθερή και ίση με το όριό της $g(0)$. Όμως τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $g(1/n) = g(q_n) = g(0)$ για κάθε $n \geqslant n_0$, και αφού η g είναι 1-1 συμπεραίνουμε ότι $1/n = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άτοπο. Αφού δεν υπάρχει $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής, 1-1 και επί, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

4.26. *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος και έστω* $f : X \to \mathbb{R}$ *και* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:*

(α) *Αν οι* f *και* g *είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η* $g \circ f$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Αν η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η* g *είναι συνεχής, τότε η* $g \circ f$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(γ) *Αν η* f *είναι συνεχής και φραγμένη και η* g *είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η* $g \circ f$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. (α) Σωστό: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $\eta > 0$ ώστε «για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$ με $|u - v| < \eta$ ισχύει $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$». Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε «για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \eta$». Τότε, αν $d(x, y) < \delta$, θεωρώντας τα $u = f(x)$ και $v = f(y)$ που ικανοποιούν την $|u - v| < \eta$, συμπεραίνουμε ότι $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$.

(β) Σωστό: η εικόνα $f(X)$ του X είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα $[-M, M]$. Η $\tilde{g} = g|_{[-M,M]}$ (ο περιορισμός της g στο $[-M, M]$) είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Από το (α) η σύνθεση $\tilde{g} \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ διότι $f(X) \subseteq [-M, M]$ (εξηγήστε).

(γ) Λάθος: αν ίσχυε, θεωρώντας την $g_0(x) = x$, η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα είχαμε ότι κάθε συνεχής και φραγμένη $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι $f = g_0 \circ f$. Αυτό δεν ισχύει: π.χ. η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4.27. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:*

(α) *Αν $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι συμπαγές.*

(β) *Αν $K \subseteq X$ είναι φραγμένο, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι φραγμένο.*

(γ) *Αν $K \subseteq X$ είναι φραγμένο και η f είναι συνάρτηση Lipschitz, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Σωστό: Θεώρημα στο Κεφάλαιο 6 (δίνονται εκεί δύο διαφορετικές αποδείξεις).

(β) Λάθος: η ταυτοτική απεικόνιση $I : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής και το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο ως προς την δ, όμως το $I(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο με τη συνήθη μετρική.

(γ) Σωστό: η απόδειξη δίνεται στο Κεφάλαιο 4 (στην παράγραφο για τις συναρτήσεις Lipschitz).

4.28. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Είναι το σύνολο $K = \{(f(x), g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ απαραίτητα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$;*

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και $g(x) = 0$ τότε βλέπουμε ότι για $x_n = n$ έχουμε ότι η $z_n := (f(x_n), g(x_n)) = (f(x_n), 0)$ είναι ακολουθία του K, η οποία συγκλίνει στο $(0, 0)$. Όμως, $(0, 0) \notin K$.

4.29. *Έστω F_1, F_2 ξένα κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένη συνεχής συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h \equiv f$ στο F_1 και $h \equiv g$ στο F_2.*

Υπόδειξη. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to [0, 1]$ ώστε $\phi|_{F_1} = 0$ και $\phi|_{F_2} = 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) := (1 - \phi(x))f(x) + \phi(x)g(x), \; x \in X.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η h έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

4.30. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής, 1-1 συνάρτηση* $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $t \in [0,1]$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_t(x) = f(t,x)$. Αφού η f είναι συνεχής και 1-1, το ίδιο ισχύει για την f_t. Άρα, η εικόνα $I_t = f_t([0,1])$ της f_t είναι ένα κλειστό διάστημα $I_t = [a_t, b_t]$, με $a_t < b_t$.

Τα διαστήματα I_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, είναι ξένα (αν υπήρχε κάποιο $z \in I_t \cap I_s$, όπου $t \neq s$, τότε θα είχαμε $z = f(t,x) = f(s,y)$ για κάποια $x, y \in [0,1]$, το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι 1-1). Όμως, είναι υπεραριθμήσιμα το πλήθος και αυτό οδηγεί σε άτοπο: επιλέγουμε ρητό $q_t \in I_t$ και η απεικόνιση $t \mapsto q_t$ είναι 1-1, το οποίο είναι άτοπο αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Ομάδα Γ΄

4.31. *Έστω F μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : F \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in F$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το $\mathbb{R} \setminus F$ σαν ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων: $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup (a_n, b_n)$. Παρατηρήστε ότι για κάθε n ισχύει $a_n, b_n \in F$, δηλαδή οι τιμές $f(a_n)$, $f(b_n)$ είναι ορισμένες. Επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζοντάς την σε κάθε (a_n, b_n). Ο απλούστερος τρόπος είναι να θέσουμε

$$g(x) = \frac{b_n - x}{b_n - a_n} f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} f(b_n), \quad x \in (a_n, b_n),$$

δηλαδή να πάρουμε την g γραμμική στο $[a_n, b_n]$. Αν $x \in F$ ορίζουμε $g(x) = f(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι συνεχής σε κάθε (a_n, b_n), αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι η g είναι συνεχής σε κάθε σημείο του F. Για να ελέγξετε τη συνέχεια της g στο x από δεξιά, δείξτε πρώτα ότι υπάρχουν τα εξής τρία ενδεχόμενα:

(i) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $[x, x+\delta) \subset F$.

(ii) Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x = a_n$.

(iii) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_n, b_n) \subset [x, x+\delta)$.

Έστω ότι δεν ισχύει το 1. Τότε για κάθε $\delta > 0$ έχουμε $F^c \cap [x, x+\delta) \neq \emptyset$. Αν $x = a_n$ τελειώσαμε, διαφορετικά για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[x, x+\delta) \cap (a_n, b_n) \neq \emptyset$. Αυτό όμως δίνει ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_n, b_n) \subseteq [x, x+\delta)$. (Πράγματι· κατ' αρχήν παρατηρήστε ότι δε μπορεί να είναι $a_n < x$ λόγω του ότι τα (a_n, b_n) είναι ξένα ανά δυο. Τώρα, αν $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[x, x+\delta) \cap (a_n, b_n) \neq \emptyset$. Τότε για $0 < \delta' < a_n - x$

έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_k, b_k) \cap [x, x+\delta') \neq \emptyset$. Άρα, το (a_k, b_k) είναι αριστερά από το (a_n, b_n) αφού είναι ξένα, δηλαδή $(a_k, b_k) \subseteq [x, x+\delta)$).

Τώρα δείχνουμε ότι σε καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις η g είναι συνεχής από τα δεξιά στο x. Έστω $\varepsilon > 0$.

Για το (i): Έχουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $[x, x+\delta_1) \subseteq F$. Η f είναι συνεχής στο x (από τα δεξιά) άρα, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $t \in F \cap [x, x+\delta_2)$ τότε $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ και $t \in [x, x+\delta)$. Τότε είναι $t \in F$, άρα

$$|g(t) - g(x)| = |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Για το (ii): Έχουμε ότι $x = a_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε για $0 < \delta < \min\{\frac{(b_n - a_n)\varepsilon}{1 + |f(b_n) - f(a_n)|}, b_n - a_n\}$ ισχύει $[x, x+\delta) \subseteq [a_n, b_n)$ και αν $t \in [x, x+\delta)$ έχουμε:

$$|g(t) - g(x)| = \left| \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}(t - x) \right| < \delta \left| \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} \right| < \varepsilon.$$

Για το (iii): Από τη συνέχεια της f στο x (από τα δεξιά) έχουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $t \in F \cap [x, x+\delta_1)$ τότε $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/3$. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_k, b_k) \subseteq [x, x+\delta_1)$. Τότε, αν $t \in [x, a_k)$ (εδώ $\delta = a_k - x > 0$) διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $t \in F$, τότε ισχύει: $|g(t) - g(x)| = |f(t) - f(x)| < \varepsilon/3$.
- Αν $t \notin F$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $t \in (a_m, b_m)$. Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την περίπτωση $x < a_m < b_m < a_k$. Τότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} |g(t) - g(x)| &= \left| \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(t - a_m) + f(a_m) - f(x) \right| \\ &\leqslant |f(b_m) - f(a_m)| + |f(a_m) - f(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

  αφού $a_m, b_m \in F \cap [x, x+\delta_1)$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση η g είναι συνεχής στο x από τα δεξιά. Όμοια δείχνουμε τη συνέχεια από αριστερά.

4.32. *Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Για κάθε $\delta \geqslant 0$ ορίζουμε το μέτρο συνέχειας (modulus of continuity) της f ως εξής:*

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : d(x, y) \leqslant \delta,\ x, y \in X\}.$$

(α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $\omega_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ είναι αύξουσα, δηλαδή αν $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2$ τότε $\omega_f(\delta_1) \leqslant \omega_f(\delta_2)$.*

(β) *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $f : X \to Y$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν ισχύει* $\omega_f(\delta) \to 0$ *καθώς* $\delta \to 0^+$.

Υπόδειξη. (α) Αν $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2$ τότε $\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x,y) \leqslant \delta_1,\ x, y \in X\} \subseteq \{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x,y) \leqslant \delta_2,\ x, y \in X\}$, άρα

$$\begin{aligned} \omega_f(\delta_1) &= \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x,y) \leqslant \delta_1,\ x, y \in X\} \\ &\leqslant \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x,y) \leqslant \delta_2,\ x, y \in X\} \\ &= \omega_f(\delta_2). \end{aligned}$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta_1$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Έστω $0 < \delta < \delta_1$. Τότε,

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x,y) \leqslant \delta,\ x, y \in X\} \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Τότε, αν $x, y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta$ έχουμε $\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \omega_f(\delta) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4.33. *Έστω* $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. *Η* f *λέγεται ανοικτή αν για κάθε ανοικτό* $G \subseteq X$ *το* $f(G)$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* Y. *Ανάλογα, η* f *λέγεται κλειστή αν για κάθε κλειστό* $F \subseteq X$ *το* $f(F)$ *είναι κλειστό υποσύνολο του* Y.

(α) *Δώστε παράδειγμα: συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι ανοικτή, ανοικτής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής, συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι κλειστή, κλειστής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.*

(β) *Αν η* $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ *είναι 1-1 και επί, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (i) η* f *είναι ανοικτή, (ii) η* f *είναι κλειστή, (iii) η* f^{-1} *είναι συνεχής.*

Συνεπώς, αν η f *είναι συνεχής και ανοικτή (ή κλειστή) τότε είναι ομοιομορφισμός.*

Υπόδειξη. (α) Η ταυτοτική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \delta)$ με $g(x) = x$ είναι ανοικτή, διότι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι δ-ανοικτά. Δεν είναι όμως συνεχής: στην άσκηση 6 είδαμε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στον $(\mathbb{R}, \delta)$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις. Η ίδια συνάρτηση είναι κλειστή (αλλά όχι συνεχής). Η ταυτοτική συνάρτηση $g^{-1} : (\mathbb{R}, \delta) \to \mathbb{R}$ με $g^{-1}(x) = x$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι κλειστή ούτε ανοικτή (θα έπρεπε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ να είναι κλειστά, ή αντίστοιχα, ανοικτά).

Άλλα παραδείγματα: κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ δεν είναι ανοικτή (εξηγήστε γιατί). Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ απεικονίζει το

$(-1,1)$ στο $[0,1)$. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ απεικονίζει το κλειστό σύνολο $[0,\infty)$ στο $[0,1)$.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ανοικτή. Έστω F κλειστό υποσύνολο του (X,ρ). Τότε, το $X\setminus F$ είναι ανοικτό, άρα το $f(X\setminus F)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (Y,σ). Όμως, $f(X\setminus F)=Y\setminus f(F)$ διότι η f είναι 1-1 και επί. Άρα, το $f(F)$ είναι κλειστό. Έπεται ότι η f είναι κλειστή.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι κλειστή. Για κάθε κλειστό $F\subseteq X$ έχουμε ότι το $(f^{-1})^{-1}(F)=F$ είναι κλειστό στον (Y,σ). Άρα, η f^{-1} είναι συνεχής.

Υποθέτουμε τέλος ότι η $f^{-1}:Y\to X$ είναι συνεχής. Τότε, για κάθε $G\subseteq X$ ανοικτό, έχουμε ότι το $f(G)=(f^{-1})^{-1}(G)$ είναι ανοικτό. Άρα, η f είναι ανοικτή.

4.34. *Έστω (X_i,d_i) , $i=1,\dots,m$ μετρικοί χώροι και $X=\prod_{i=1}^m X_i$ ο χώρος γινόμενο με τη μετρική $d=\sum_{i=1}^m d_i$. Η συνάρτηση $i-$προβολή είναι η $\pi_i:X\to X_i$ που ορίζεται ως εξής:*

$$\pi_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_m)=x_i.$$

Αποδείξτε ότι η π_i είναι συνεχής, επί και ανοικτή.

Υπόδειξη. Η π_i είναι προφανώς επί: αν $x_i\in X_i$ επιλέγουμε τυχόντα $x_j\in X_j$, $j\neq i$ και για το $x=(x_1,\dots,x_m)\in X$ έχουμε $\pi_i(x)=x_i$. Η συνέχεια της π_i προκύπτει από το γεγονός ότι η d είναι μετρική γινόμενο. Αν $x^n=(x_1^n,\dots,x_m^n)\xrightarrow{d}x=(x_1,\dots,x_m)$ τότε, για κάθε $j\leqslant m$ έχουμε $x_j^n\xrightarrow{d_j}x_j$, άρα $\pi_i(x^n)=x_i^n\xrightarrow{d_i}x_i=\pi_i(x)$. Από την αρχή της μεταφοράς η π_i είναι συνεχής. Τέλος, η π_i είναι ανοικτή: έστω $G\subseteq X$ ανοικτό. Αν $x=(x_1,\dots,x_m)\in G$ τότε μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε $B_d(x,\delta)\subseteq G$. Από τον ορισμό της d ελέγχουμε εύκολα ότι

$$U:=B_{d_1}(x_1,\delta/m)\times\cdots\times B_{d_m}(x_m,\delta/m)\subseteq B_d(x,\delta)\subseteq G.$$

Τότε, $\pi_i(U)=B_{d_i}(x_i,\delta/m)\subseteq\pi_i(G)$, δηλαδή $B_{d_i}(\pi_i(x),\delta/m)\subseteq\pi_i(G)$. Αφού το $p_i(x)\in\pi_i(G)$ ήταν τυχόν, το $\pi_i(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i.

4.35. *Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$. Δείξτε ότι η f είναι ανοικτή αν και μόνο αν $f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ$ για κάθε $A\subseteq X$. Δώστε παράδειγμα μιας συνεχούς, ανοικτής συνάρτησης $f:X\to Y$ και κάποιου $A\subseteq X$ ώστε το $f(A^\circ)$ να περιέχεται γνήσια στο $(f(A))^\circ$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ανοικτή. Έστω $A\subseteq X$. Το A° είναι ανοικτό, άρα το $f(A^\circ)$ είναι ανοικτό. Αφού $A^\circ\subseteq A$, έχουμε $f(A^\circ)\subseteq f(A)$. Έπεται ότι $f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, απλώς παρατηρούμε ότι αν G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X τότε η υπόθεση μας δίνει $f(G)=f(G^\circ)\subseteq(f(G))^\circ$. Τότε, $f(G)=(f(G))^\circ$ άρα το $f(G)$ είναι ανοικτό.

Η προβολή $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\pi_1(x, y) = x$ είναι συνεχής και ανοικτή (δείτε την Άσκηση 4.24). Αν θέσουμε $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ τότε $A^\circ = \emptyset$ και $f(A) = \mathbb{R}$. Άρα, $f(A^\circ) = \emptyset$ ενώ $(f(A))^\circ = \mathbb{R}$.

4.36. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική στον X.*

(β) *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή.*

(γ) *Ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(δ) *Για κάθε μετρικό χώρο Y, κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής.*

(ε) *Η κλειστή θήκη κάθε ανοικτού συνόλου $G \subseteq X$ είναι ανοικτό σύνολο.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Υποθέτουμε ότι η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική στον X. Έστω (x_n) ακολουθία στον X με $\rho(x_n, x) \to 0$. Αφού $\rho \sim \delta$, θα ισχύει $\delta(x_n, x) \to 0$. Όμως, γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον (X, δ) είναι τελικά σταθερή. Άρα, η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Υποθέτουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή. Έστω x σημείο συσσώρευσης του X. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X η οποία συγκλίνει στο x και έχει όρους διαφορετικούς ανά δύο. Τότε, η (x_n) είναι συγκλίνουσα και δεν είναι τελικά σταθερή, άτοπο.

(γ) $\Rightarrow$ (δ) Υποθέτουμε ότι ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης. Έστω (Y, σ) μετρικός χώρος, $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Αφού το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \delta) = \{x_0\}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε $f(B_\rho(x_0, \delta)) = \{f(x_0)\} \subseteq B_\sigma(f(x_0), \varepsilon)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0.

(δ) $\Rightarrow$ (ε) Υποθέτουμε ότι, για κάθε μετρικό χώρο Y, κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_G : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα (από την Άσκηση 4.5) έχουμε $\mathrm{bd}(G) = \emptyset$. Τότε, $\overline{G} = G \cup \mathrm{bd}(G) = G$, δηλαδή το $\overline{G}$ είναι ανοικτό.

(ε) $\Rightarrow$ (α) Υποθέτουμε ότι η κλειστή θήκη κάθε ανοικτού συνόλου $G \subseteq (X, \rho)$ είναι ανοικτό σύνολο. Για να δείξουμε ότι $\rho \sim \delta$ πρέπει να ελέγξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\delta} x$ δηλαδή αν και μόνο αν η (x_n) είναι τελικά σταθερή (με όρους ίσους με x). Η μία κατεύθυνση είναι φανερή, υποθέτουμε λοιπόν ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αν η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή μπορούμε να υποθέσουμε (περνώντας αν χρειαστεί σε υπακολουθία) ότι η ακολουθία $\rho(x_n, x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική. Μπορούμε τότε να βρούμε ακολουθία ακτίνων $\delta_n > 0$ ώστε οι μπάλες $B(x_n, \delta_n)$ να είναι ξένες και $x \notin \bigcup_{n=1}^\infty B(x_n, \delta_n)$ (άσκηση). Ορίζουμε $G_1 = \bigcup_{k=1}^\infty B(x_{2k}, \delta_{2k})$ και $G_2 = \bigcup_{k=1}^\infty B(x_{2k-1}, \delta_{2k-1})$. Τα G_1, G_2 είναι ξένα από την κατασκευή. Ορίζουμε $U_1 = \overline{G_1}$ και $U_2 = \overline{G_2}$. Έχουμε $G_1 \subseteq X \setminus G_2$

και το $X \setminus G_2$ είναι κλειστό, άρα $U_1 \subseteq X \setminus G_2$. Από την υπόθεση, το U_2 είναι ανοικτό και, ξεκινώντας τώρα από την $G_2 \subseteq X \setminus U_1$ βλέπουμε ότι $U_2 \subseteq X \setminus U_1$, δηλαδή, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Όμως, από την $x_{2k} \xrightarrow{\rho} x$ έχουμε $x \in \overline{G_1} = U_1$ και από την $x_{2k-1} \xrightarrow{\rho} x$ έχουμε $x \in \overline{G_2} = U_2$. Άρα $x \in U_1 \cap U_2$, το οποίο είναι άτοπο.

4.37. (α) *Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται κάτω ημισυνεχής αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \leqslant t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$, ισχύει*

$$f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Δώστε παράδειγμα κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.

(β) *Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται άνω ημισυνεχής αν η $-f$ είναι κάτω ημισυνεχής. Διατυπώστε και αποδείξτε χαρακτηρισμούς της άνω ημισυνεχούς συνάρτησης, αντίστοιχους με τους χαρακτηρισμούς της κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης που περιγράφτηκαν στο* (α).

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής. Έστω (x_n) στο X με $x_n \to x \in X$. Θέτουμε $t = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$. Αν $f(x) > t$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x \notin F_{t+\varepsilon} = \{z \in X : f(z) \leqslant t + \varepsilon\}$. Αφού το $F_{t+\varepsilon}$ είναι κλειστό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $F_{t+\varepsilon} \cap B(x, \delta) = \emptyset$. Όμως, υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x$ ώστε $f(x_{k_n}) \to t$. Αυτό σημαίνει ότι τελικά θα ισχύουν οι $x_{k_n} \in B(x, \delta)$ και $f(x_{k_n}) < t + \varepsilon$, δηλαδή $x_{k_n} \in F_{t+\varepsilon}$. Έπεται ότι $F_{t+\varepsilon} \cap B(x, \delta) \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω $F_t = \{z \in X : f(z) \leqslant t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε $x \in \overline{F_t}$. Τότε, υπάρχει (x_n) στο F_t με $x_n \to x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n) \leqslant t$, άρα $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant t$. Από την υπόθεση, $f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant t$, δηλαδή $x \in F_t$. Άρα, το F_t είναι κλειστό.

Μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση που δεν είναι συνεχής είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x = 0$ και $f(x) = 1$ αν $x \neq 0$ (εξηγήστε γιατί).

(β) Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ είναι *άνω ημισυνεχής* αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \geqslant t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Η f είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$, ισχύει

$$f(x) \geqslant \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση που δεν είναι συνεχής είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x = 0$ και $f(x) = 0$ αν $x \neq 0$ (εξηγήστε γιατί).

4.38. *Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, σ) οι οποίοι δεν είναι ομοιομορφικοί αλλά ικανοποιούν το εξής: υπάρχουν συναρτήσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ οι οποίες είναι συνεχείς, 1-1 και επί.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του $\mathbb{R}$:

$$X = \{-m : m \in \mathbb{N}\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1) \right), \quad Y = X \cup \{1\}$$

με τη συνήθη μετρική. Τότε, οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ με

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant -2 \\ 1, & x = -1 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant -1 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 2 \leqslant x < 3 \\ x-2, & x \geqslant 4 \end{cases}$$

είναι συνεχείς 1-1 και επί. Παρ' όλα αυτά οι X, Y δεν είναι ομοιομορφικοί. Πράγματι· αν υπάρχει $h : Y \to X$ ομοιομορφισμός τότε, η $h|_{[0,1]} : [0,1] \to Y$ είναι συνεχής και 1-1. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής το $h([0,1])$ είναι κλειστό και φραγμένο (μη τετριμμένο) διάστημα. Οπότε υπάρχει $n \geqslant 0$ ώστε $f([0,1]) \subseteq [2n, 2n+1)$. Έστω $f([0,1]) = [a,b] \subseteq [2n, 2n+1)$. Τότε υπάρχει $b < c < 2n+1$. Για τον ίδιο λόγο η h^{-1} απεικονίζει το $[b,c]$ σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, όμως διαφορετικό από το $[0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Έστω $m \geqslant 1$ ώστε $h^{-1}([b,c]) \subseteq [2m, 2m+1)$. Τότε η $h^{-1}|_{[a,c]} : [a,c] \to [0,1] \cup [2m, 2m+1)$ είναι συνεχής και το σύνολο τιμών της δεν είναι διάστημα. Αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

Κεφάλαιο 5

Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ομάδα Α΄

5.1. *Στο σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών θεωρούμε τις μετρικές* $d(m,n) = |m-n|$ *και* $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$.

(α) *Δείξτε ότι ο* $(\mathbb{N}, d)$ *είναι πλήρης αλλά ο* $(\mathbb{N}, \rho)$ *δεν είναι πλήρης.*

(β) *Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο* $\{n\}$ *είναι* d*-ανοικτό και* ρ*-ανοικτό.*

(γ) *Δείξτε ότι οι μετρικές* ρ *και* d *είναι ισοδύναμες (άρα, οι* $(\mathbb{N}, d)$ *και* $(\mathbb{N}, \rho)$ *είναι ομοιομορφικοί).*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $(\mathbb{N}, d)$. Επιλέγουμε $\varepsilon = 1/2 > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geqslant n_0$, $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < 1/2$. Αφού $x_n, x_m \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $x_n = x_m$. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει.

Στον $(\mathbb{N}, \rho)$ θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$. Η (x_n) είναι ρ-βασική: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $m > n \geqslant n_0$ έχουμε $\rho(x_m, x_n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Όμως, δεν υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(n, x) \to 0$: θα είχαμε $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right| \to 0$, δηλαδή $\frac{1}{n} \to \frac{1}{x}$ (με τη συνήθη μετρική) το οποίο σημαίνει ότι $\frac{1}{x} = 0$, άτοπο.

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Στον $(\mathbb{N}, d)$ έχουμε $\{n\} = B(n, 1/2)$. Άρα, το $\{n\}$ είναι d-ανοικτό σύνολο. Στον $(\mathbb{N}, \rho)$ παρατηρούμε ότι: αν $m > n$ τότε $\rho(m,n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ ενώ αν $m < n$ (εδώ υποθέτουμε ότι $n \geqslant 2$) όμοια βλέπουμε ότι $\rho(m,n) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$. Αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{n(n-1)}, \frac{1}{n(n+1)}\right\}$ τότε $\{n\} = B(n, \varepsilon)$. Άρα, το $\{n\}$ είναι ρ-ανοικτό.

(γ) Αφού τα μονοσύνολα είναι ανοικτά και στους δύο χώρους, ισχύει $d(x_n, x) \to 0$ αν και μόνο αν η (x_n) είναι τελικά σταθερή, το οποίο με τη σειρά του ισχύει αν και μόνο αν $\rho(x_n, x) \to 0$.

5.2. *Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$. Η συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής, άρα $\arctan x_n \to \arctan x$. Όμως τότε, $d(x_n, x) = |\arctan x_n - \arctan x| \to 0$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$: αν $d(x_n, x) \to 0$ τότε $y_n = \arctan x_n \to \arctan x = y$, άρα $x_n = \tan y_n \to \tan y = x$ (ως προς τη συνήθη μετρική). Συνεπώς, η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης, θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, d)$: έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\pi/2 - \arctan n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, αν $m, n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(n,m) = |\arctan n - \arctan m| \leqslant |\pi/2 - \arctan n| + |\pi/2 - \arctan m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n = n \to w$ ως προς την d. Τότε, $\arctan n \to \arctan w$ καθώς το $n \to \infty$. Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \pi/2$, άρα $\arctan w = \pi/2$, το οποίο είναι άτοπο.

5.3. *Θεωρούμε δύο μετρικές d_1 και d_2 στο ίδιο σύνολο X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,*

$$a d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant b d_1(x,y).$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) στον X είναι βασική στον (X, d_1) αν και μόνο αν είναι βασική στον (X, d_2).

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, d_1). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m, n \geqslant n_0$ να ισχύει $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon/b$. Τότε, αν $m, n \geqslant n_0$,

$$d_2(x_n, x_m) \leqslant b \cdot d_1(x_n, x_m) < b\,\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, d_2). Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι εντελώς ανάλογη.

5.4. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο X είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ). Το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $d_n \in D$ με την ιδιότητα $\rho(x_n, d_n) < 1/n$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geqslant n_0$,

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επίσης, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n_1 < \varepsilon/3$. Αν θέσουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, τότε για κάθε $n, m \geqslant n_2$ έχουμε

$$\rho(d_n, d_m) \leqslant \rho(d_n, x_n) + \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, d_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (d_n) είναι βασική ακολουθία στο D. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\rho(d_n, x) \to 0$. Όμως, $\rho(d_n, x_n) \leqslant 1/n$, δηλαδή $\rho(d_n, x_n) \to 0$. Άρα,

$$0 \leqslant \rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, d_n) + \rho(d_n, x) \to 0.$$

Δηλαδή, $x_n \to x$. Αφού η (x_n) ήταν τυχούσα βασική ακολουθία στον X, ο (X, ρ) είναι πλήρης.

5.5. *Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστή μπάλα*

$$\hat{B}(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(z, x) \leqslant \varepsilon\},$$

όπου $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.

Υπόδειξη. Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης τότε κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x, \varepsilon)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Γνωρίζουμε ότι κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχουν $x \in X$ και $r > 0$ ώστε $x_n \in \hat{B}(x, r)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $\hat{B}(x, r)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος με την επαγόμενη μετρική (από την υπόθεση) και η (x_n) είναι βασική στον (X, ρ), άρα είναι βασική και στον $(\hat{B}(x, r), \rho)$. Συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in \hat{B}(x, r)$ ώστε $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x_0$ στον X. Η (x_n) ήταν τυχούσα βασική ακολουθία στον X, άρα ο (X, ρ) είναι πλήρης.

5.6. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X ώστε το $X \setminus D$ να είναι επίσης πυκνό. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα D, $X \setminus D$ δεν είναι σύνολο F_σ.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα D και $X \setminus D$ είναι σύνολα F_σ. Αφού το D είναι F_σ, το $X \setminus D$ είναι σύνολο G_δ. Όμοια, αφού το $X \setminus D$ είναι F_σ, το D είναι σύνολο G_δ. Τότε, $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ και $X \setminus D = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, όπου G_n, V_n ανοικτά σύνολα. Αφού το D είναι πυκνό, κάθε $G_n \supseteq D$ είναι και πυκνό. Όμοια, αφού το $X \setminus D$ είναι πυκνό, κάθε $V_n \supseteq X \setminus D$ είναι πυκνό. Δηλαδή, η αριθμήσιμη οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από ανοικτά και πυκνά σύνολα. Από το θεώρημα του Baire, το

$$\emptyset = D \cap (X \setminus D) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right)$$

είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του X, το οποίο είναι άτοπο.

5.7. *Δείξτε ότι: αν (L_n) είναι ακολουθία ευθειών στο $\mathbb{R}^2$ τότε* $\mathrm{int}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) = \emptyset$.

Υπόδειξη. Κάθε L_n είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με κενό εσωτερικό. Συνεπώς, το $G_n = \mathbb{R}^2 \setminus L_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα του Baire, το σύνολο $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Συνεπώς,

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\right) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^2 \setminus L_n)} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = \overline{G} = \mathbb{R}^2,$$

απ¨ όπου έπεται ότι $\mathrm{int}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) = \emptyset$.

Ομάδα Β΄

5.8. (α) *Δείξτε ότι ο $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p < \infty$ είναι πλήρης.*

(β) *Δείξτε ότι ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(γ) *Δείξτε ότι ο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον ℓ_p. Γράφουμε

$$x_n = (x_n(k)) = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$,

$$(*) \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n(k) - x_s(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $x(1), \ldots, x(k), \ldots \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots)$. Θα δείξουμε ότι $x \in \ell_p$ και $\|x_n - x\|_p \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p},$$

άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$(**) \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για $n = n_0$ έχουμε ότι $x - x_{n_0} \in \ell_p$ και, αφού $x_{n_0} \in \ell_p$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_p$. Επιπλέον, η $(**)$ δείχνει ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\|x - x_n\|_p \leqslant \varepsilon,$$

απ¨ όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$.

(β) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{H}^\infty$. Γράφουμε

$$x_n = (x_n(k)) = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$,

$$(*) \qquad d(x_n, x_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$ και κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n(i) - x_s(i)| \leqslant 2^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} < 2^i \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $x(1), \ldots, x(k), \ldots \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots)$. Προφανώς, $|x(k)| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n(k)| \leqslant 1$, άρα $x \in \mathcal{H}^\infty$. Μένει να δείξουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{2^k},$$

άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{2^k} \leqslant \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{2^k} \leqslant \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x_n \xrightarrow{d} x$.

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ (γιατί ο ℓ_∞ είναι πλήρης). Ορίζουμε $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$ και $x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right) \in \ell_\infty \setminus c_{00}$. Τότε,

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup\left\{|1-1|, \ldots, \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right|, \left|0 - \frac{1}{n+1}\right|, \ldots\right\} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Βρήκαμε (x_n) στον c_{00} με $x_n \to x \in \ell_\infty \setminus c_{00}$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

5.9. *Θεωρούμε τον $\mathcal{C}([0,1])$ με μετρική την*

$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$

Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\geqslant 2}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

είναι βασική ακολουθία ως προς την ρ_1 αλλά δεν είναι συγκλίνουσα.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η (f_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την d: έστω $n > m$. Τότε, $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n$ και

$$d(f_n, f_m) = \int_0^{1/2} |f_n - f_m| + \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| + \int_{a_m}^{1} |f_n - f_m| = \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| \leqslant a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n > m \geqslant n_0$, τότε

$$d(f_n, f_m) \leqslant \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι βασική. Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την d) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leqslant \int_0^{1/2} |f(t)|dt = \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|dt \leqslant \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0,$$

δηλαδή $\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, πρέπει να ισχύει $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 1/2]$.

Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $f_n(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$. Όμως,

$$0 \leqslant \int_\delta^1 |f_n(t) - f(t)|dt \leqslant \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0,$$

άρα

$$\int_\delta^1 |1 - f(t)|dt = 0.$$

Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in (1/2, 1]$. Έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0,1]$.

5.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε αριθμήσιμο, κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.*

Υπόδειξη. Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος τότε κάθε κλειστό (άρα και κάθε αριθμήσιμο κλειστό) υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος. Αντίστροφα, έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Θεωρούμε το αριθμήσιμο σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε ο (A, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος από την υπόθεση, άρα υπάρχει $x \in A$ ώστε $x_n \to x$.

(ii) Αν το A δεν είναι κλειστό, από την $\overline{A} = A \cup A'$ συμπεραίνουμε ότι $A' \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχει $x \in X$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αυτό σημαίνει ότι κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση μπορούμε να ορίσουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$. Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα (στο x) υπακολουθία, έπεται ότι $x_n \to x$.

5.11. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον X είναι συγκλίνουσα.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης. Έστω (x_n) ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον X. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=N}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Αν $k > l \geqslant N$, τότε

$$\rho(x_l, x_k) \leqslant \rho(x_l, x_{l+1}) + \cdots + \rho(x_{k-1}, x_k) \leqslant \sum_{n=l}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Άρα, η (x_n) είναι βασική ακολουθία και, αφού ο (X,ρ) είναι πλήρης, η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

Αντίστροφα, έστω (x_n) βασική ακολουθία. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2}$ για κάθε $k, m \geqslant k_1$. Στη συνέχεια θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2^2}$ για κάθε $k, m \geqslant k_2$. Συνεχίζουμε επαγωγικά: στο n-οστό βήμα θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ και βρίσκουμε $k_n > k_{n-1}$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $k, m \geqslant k_n$. Θεωρούμε την υπακολουθία (x_{k_n}). Από τον τρόπο ορισμού των k_n βλέπουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $k_{n+1}, k_n \geqslant k_n$, άρα $\rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$. Έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$. Συνεπώς, η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση. Από την υπόθεση, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \to x$. Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα (στο x) υπακολουθία, έπεται ότι $x_n \to x$.

5.12. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$. Αποδείξτε ότι ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. Έστω (y_m) βασική ακολουθία στο A. Δηλαδή, κάθε y_m είναι όρος της ακολουθίας (x_n) ή $y = x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν το σύνολο $B = \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ των όρων της (y_m) είναι πεπερασμένο, τότε η (y_m) είναι τελικά σταθερή. [Πράγματι: αν το B είναι πεπερασμένο και έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε υπάρχει η ελάχιστη θετική απόσταση δ διακεκριμένων σημείων του B. Όμως, η (y_m) είναι βασική, άρα για μεγάλα m, n θα έχουμε $\rho(y_m, y_n) < \delta$, δηλαδή $y_m = y_n$]. Αφού η (y_m) είναι τελικά σταθερή, είναι συγκλίνουσα.

(ii) Αν το σύνολο $B = \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ των όρων της (y_m) είναι άπειρο, τότε είτε $y_m = x$ για άπειρους δείκτες m ή μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της (y_m) που είναι και υπακολουθία της (x_n). [Πράγματι: αν $y_m \neq x$ για κάθε $m \geqslant s_1$, έχουμε $y_{s_1} = x_{k_1}$ για κάποιον $k_1 \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\{y_m : m \geqslant s_1 + 1\}$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) άρα και κάποιον $y_{s_2} = x_{k_2}$ με $k_2 > k_1$. Συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε $y_{s_n} = x_{k_n}$ ώστε η (y_{s_n}) να είναι υπακολουθία της (y_n) και της (x_n) ταυτόχρονα. Αφού $x_n \to x$ έχουμε $y_{s_n} = x_{k_n} \to x$. Σε κάθε περίπτωση, η βασική ακολουθία (y_m) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα συγκλίνει.

5.13. *Έστω ρ μετρική στο $\mathbb{R}$ ώστε: (i) ο $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης και (ii) η ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mathrm{diam}_\rho([n, \infty)) \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Αφού $[n, \infty) \supseteq [n+1, \infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $a_n = \mathrm{diam}_\rho([n, \infty))$ είναι φθίνουσα (και έχει μη αρνητικούς όρους). Άρα, συγκλίνει στο $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $a_n \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Αφού η ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, έχουμε ότι κάθε $[n, \infty)$ είναι ρ-κλειστό. Έτσι, έχουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $(\mathbb{R}, \rho)$ που η ακολουθία των διαμέτρων τους συγκλίνει στο μηδέν. Αφού ο $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης, εφαρμόζεται το θεώρημα του Cantor: θα ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

5.14. *Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και $\hat{B}(x_n, r_n)$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant r_n - r_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_{n+1} = x_n$ αυτό είναι φανερό, ενώ αν $x_{n+1} \neq x_n$ παρατηρούμε ότι $y = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} r_{n+1} \in \hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \hat{B}(x_n, r_n)$, οπότε $\|y - x_n\| \leqslant r_n \implies \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leqslant r_n$. Αφού $r_n - r_{n+1} \geqslant 0$, η (r_n) είναι φθίνουσα, άρα συγκλίνει. Ειδικότερα, είναι βασική ακολουθία. Επίσης, αν $n < m$ έχουμε

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (r_{m-1} - r_m) + \cdots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m,$$

οπότε η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x_0$. Τέλος, δείχνουμε ότι $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_m \in \hat{B}(x_n, r_n)$ για κάθε $m \geqslant n$, άρα $x_0 = \lim\limits_{m \to \infty} x_m \in \hat{B}(x_n, r_n)$.

5.15. *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, με $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, τότε*

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

Υπόδειξη. Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq f(E_m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} f(E_m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: έστω $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in E_n$ ώστε $f(x_n) = y$. Αφού $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$ από το θεώρημα του Cantor. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n, x \in E_n$ άρα $\rho(x_n, x) \leqslant \mathrm{diam}(E_n) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y = y.$$

Δηλαδή, $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

5.16. *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και G μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\sigma(x,y) = \rho(x,y) + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(x, X\setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(y, X\setminus G)}\right|$$

στο $G \times G$. Δείξτε ότι ο (G,σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και ότι η σ είναι ισοδύναμη με την $\rho|_G$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in G$, τότε $\mathrm{dist}(x, X\setminus G) > 0$ και $\mathrm{dist}(y, X\setminus G) > 0$ (γιατί το $X \setminus G$ είναι κλειστό και $x, y \notin X \setminus G$). Άρα, η σ ορίζεται καλά. Ελέγχουμε εύκολα ότι η σ είναι μετρική.

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (G,σ). Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, αν $m, n \geqslant n_0$ τότε

$$0 \leqslant \rho(x_n, x_m) \leqslant \sigma(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

άρα η (x_n) είναι βασική ακολουθία και στον (X,ρ). Υπάρχει λοιπόν $x \in X$ ώστε $\rho(x_n, x) \to 0$. Επίσης,

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(x_n, X\setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x_m, X\setminus G)}\right| \leqslant \sigma(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

δηλαδή, η $(1/\mathrm{dist}(x_n, X \setminus G))$ είναι βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, άρα είναι φραγμένη. Υπάρχει λοιπόν $M > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(x_n, X \setminus G)} \leqslant M \Longrightarrow \mathrm{dist}(x_n, X \setminus G) \geqslant \frac{1}{M}.$$

Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, έχουμε $\mathrm{dist}(x_n, X \setminus G) \to \mathrm{dist}(x, X \setminus G)$, και

$$\mathrm{dist}(x, X \setminus G) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(x_n, X \setminus G) \geqslant \frac{1}{M} > 0,$$

δηλαδή $x \in G$. Τέλος,

$$\sigma(x, x_n) = \rho(x, x_n) + \left| \frac{1}{\mathrm{dist}(x, X \setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x_n, X \setminus G)} \right| \to 0.$$

5.17. *Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $V_n = X \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Όμως,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = (X \setminus G) \cap G = \emptyset.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα του Baire.

5.18. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας αν και μόνο αν είναι συνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f και $D(f)$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Γνωρίζουμε ότι το $C(f)$ είναι σύνολο G_δ, δηλαδή γράφεται στη μορφή $C(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου G_n ανοικτά υποσύνολα του X.

Υποθέτουμε πρώτα ότι το $C(f)$ είναι πυκνό. Τότε κάθε $G_n \supseteq C(f)$, άρα κάθε G_n είναι πυκνό. Έχουμε

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus C(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n),$$

κάθε $F_n := \mathbb{R} \setminus G_n$ είναι κλειστό και $\mathrm{int}(F_n) = \mathrm{int}(\mathbb{R} \setminus G_n) = \mathbb{R} \setminus \overline{G_n} = \emptyset$. Συνεπώς, το $D(f)$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας.

Αντίστροφα, αν $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου κάθε A_n είναι πουθενά πυκνό, θέτουμε $F_n = \overline{A_n}$ και έχουμε $D(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$C(f) = \mathbb{R} \setminus D(f) \supseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus F_n).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε $G_n := \mathbb{R} \setminus F_n$ είναι ανοικτό και $\overline{G_n} = \overline{\mathbb{R} \setminus F_n} = \mathbb{R} \setminus \mathrm{int}(F_n) = \mathbb{R}$, δηλαδή κάθε G_n είναι και πυκνό. Από το θεώρημα του Baire, το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus F_n)$ είναι πυκνό, άρα και το $C(f)$ είναι πυκνό.

5.19. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ώστε η d να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ώστε η d να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης. Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αφού η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, κάθε μονοσύνολο $\{q_n\}$ είναι d-κλειστό και έχει κενό εσωτερικό (αλλιώς θα ήταν ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική). Τότε έχουμε άτοπο από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire, διότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}$ και έχουμε υποθέσει ότι ο $(\mathbb{Q}, d)$ είναι πλήρης.

5.20. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και δυο συναρτήσεις $f, g : X \to X$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε η $f^k = f \circ \cdots \circ f$ να είναι συστολή, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x \in X$ ώστε $f(x) = x$.*

(β) ιτ Αν η f είναι συστολή και $f \circ g = g \circ f$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = g(x) = x$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι: αν η f έχει σταθερό σημείο τότε αυτό είναι μοναδικό. Ο λόγος είναι ότι κάθε σταθερό σημείο της f είναι επίσης σταθερό σημείο της f^k (εξηγήστε γιατί) και η f^k ως συστολή έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Αφού η f^k είναι συστολή, υπάρχει $x \in X$ ώστε $f^k(x) = x$. Τότε, $f(x) = f(f^k(x)) = f^k(f(x))$ (διότι $f \circ f^k = f^k \circ f = f^{k+1}$) δηλαδή το $f(x)$ είναι επίσης σταθερό σημείο της f^k. Όμως, μια συστολή έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Συνεπώς, $f(x) = x$.

(β) Η f είναι συστολή, άρα έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x \in X$. Μένει να δείξουμε ότι $g(x) = x$. Όμως,

$$g(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

δηλαδή, το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f. Αφού το μοναδικό σταθερό σημείο της f είναι το x έπεται ότι $g(x) = x = f(x)$.

5.21. *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, E πυκνό και G_δ-υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to X$ ισχύει $E \cap h(E) \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι κάθε ομοιομορφισμός απεικονίζει σύνολα G_δ σε σύνολα G_δ και πυκνά σύνολα σε πυκνά σύνολα. Συνεπώς, το $h(E)$ είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του X. Πιο συγκεκριμένα, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ όπου G_n ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X και $h(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ όπου κάθε $V_n = h(G_n)$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X. Αφού ο (X,d) είναι πλήρης, το θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι το σύνολο

$$E \cap h(E) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right)$$

είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του X. Ειδικότερα, $E \cap h(E) \neq \emptyset$.

Ομάδα Β′ – Συμπληρωματικές ασκήσεις

5.22. *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό ώστε η $f|_G$ να είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $F_n = f^{-1}(\{q_n\}) = \{x \in X : f(x) = q_n\}$. Αφού η f είναι συνεχής και το $\{q_n\}$ είναι κλειστό (ως μονοσύνολο), κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι

$$X = f^{-1}(\mathbb{Q}) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\{q_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ο (X,d) είναι πλήρης, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(F_{n_0})^\circ \neq \emptyset$ (από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire). Θέτουμε $G = (F_{n_0})^\circ$. Τότε, το G είναι μη κενό, ανοικτό, και $f(x) = n_0$ για κάθε $x \in G$. Δηλαδή, η $f|_G$ είναι σταθερή.

5.23. *Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο: υποθέτουμε ότι το G είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφεται στη μορφή $G = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $U_k = \mathbb{R} \setminus \{a_k\}$. Παρατηρήστε ότι κάθε U_k είναι ανοικτό και πυκνό, και ότι

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{a_k\}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k\} = \mathbb{R} \setminus G.$$

Τότε,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = (\mathbb{R} \setminus G) \cap G = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού κάθε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι πυκνό G_δ (άρα, μη κενό) σύνολο, από το θεώρημα του Baire.

5.24. *Στο $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική*

$$d(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x_n, x \neq 0$ και $|x_n - x| \to 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ (ως προς την $|\cdot|$) άρα

$$d(x_n,x) = |x_n - x| + \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| \to 0.$$

Αντίστροφα, αφού $|x_n - x| \leqslant d(x_n,x)$, αν $d(x_n,x) \to 0$ έχουμε ότι $|x_n - x| \to 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $d(x_n,x) \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n - x| \to 0$, δηλαδή η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική.

Για την πληρότητα: έστω (x_n) βασική ακολουθία ως προς την d. Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n,m \geqslant n_0$, άρα

$$|x_n - x_m| \leqslant d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \geqslant n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι βασική ως προς την συνήθη μετρική. Άρα, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|x_n - x| \to 0$. Παράλληλα, αφού

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| \leqslant d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \geqslant n_0$, έχουμε ότι η $(1/x_n)$ είναι επίσης βασική ως προς την συνήθη μετρική, άρα φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|x_n| \leqslant M$ για κάθε n. Αυτό δείχνει ότι $x \neq 0$: αν είχαμε $|x_n - 0| \to 0$ τότε θα είχαμε $\frac{1}{|x_n|} \to \infty$ και η $(1/x_n)$ δεν θα ήταν φραγμένη.

Είδαμε λοιπόν ότι $x_n \to x \neq 0$ ως προς την $|\cdot|$. Τότε, $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ ως προς την $|\cdot|$, και

$$d(x_n,x) = |x_n - x| + \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| \to 0.$$

Δηλαδή, κάθε d-βασική ακολουθία (x_n) είναι συγκλίνουσα, άρα ο (X,d) είναι πλήρης.

5.25. *Έστω d μετρική στο $\mathbb{Q}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{Q},d)$ δεν είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Γράφουμε το $\mathbb{Q}$ στη μορφή $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_k = \mathbb{Q} \setminus \{q_k\}$. Αφού η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, κάθε G_k είναι ανοικτό και πυκνό ως προς την d (διότι είναι ανοικτό και πυκνό στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ – εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Αν ο $(\mathbb{Q},d)$ ήταν πλήρης, θα είχαμε ότι η τομή $\bigcap_{k=1}^\infty G_k$ είναι d-πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, από το θεώρημα του Baire. Όμως, $\bigcap_{k=1}^\infty G_k = \emptyset$ και έτσι κααλήγουμε σε άτοπο.

5.26. *Σωστό ή λάθος; Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, και αν*

$$F_m = f^{-1}([-m,m]) = \{x\in\mathbb{R} : |f(x)|\leqslant m\},$$

τότε τουλάχιστον ένα F_m περιέχει διάστημα.

Υπόδειξη. *Σωστό.* Έστω $m\in\mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής, το $F_m = f^{-1}([-m.m])$ είναι κλειστό σύνολο (αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου).

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{R}=\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει $m_x\in\mathbb{N}$ ώστε $|f(x)|\leqslant m_x$, και τότε $x\in F_{m_x}\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$.

Αφού ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι πλήρης, εφαρμόζοντας τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire συμπεραίνουμε ότι υπάρχει m ώστε το F_m να έχει μη κενό εσωτερικό (τότε, το F_m περιέχει διάστημα).

5.27. *Έστω (X,d), (Y,σ) μετρικοί χώροι και έστω $f:X\to Y$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $y\in Y$ ορίζουμε*

$$A_y = \{x\in X : f(x)=y\} = f^{-1}(\{y\}).$$

Δείξτε ότι:

(α) *Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε $y,y'\in f(X)$ με $y\neq y'$, ισχύει* $\mathrm{dist}(A_y,A_{y'})>0$.

(β) *Αν ο (X,d) είναι πλήρης και ο Y είναι αριθμήσιμος, υπάρχει $y\in Y$ ώστε $(A_y)^\circ\neq\emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $y,y'\in f(X)$ με $y\neq y'$ και $\mathrm{dist}(A_y,A_{y'})=0$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n\in A_y$ και $x_n'\in A_{y'}$ με $d(x_n,x_n')\to 0$. Αφού η f είναθ ομοιόμορφα συνεχής, έπεται ότι $\sigma(f(x_n),f(x_n'))\to 0$. Όμως, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n)=y$ διότι $x_n\in A_y$ και $f(x_n')=y'$ διότι $x_n'\in A_{y'}$. Άρα, $\sigma(f(x_n),f(x_n'))=\sigma(y,y')$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sigma(y,y')=0$, δηλαδή $y=y'$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) Έστω ότι $Y=\{y_k : k\in\mathbb{N}\}$. Κάθε $A_k=f^{-1}(\{y_k\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d) διότι η f είναι συνεχής και το $\{y_k\}$ κλειστό. Αφού ο (X,d) είναι πλήρης και

$$X=f^{-1}(Y)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-1}(\{y_k\})=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

το ζητούμενο έπεται από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire.

5.28. *Έστω $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και έστω d μετρική στο X ώστε ο (X,d) να είναι πλήρης. Δείξτε ότι ο (X,d) έχει μεμονωμένο σημείο.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε x_n είναι σημείο συσσώρευσης του X. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το $G_n=X\setminus\{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X (ισχύει $x_n\in\overline{G_n}$, άρα

$\overline{G_n} = X$ – εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα του Baire η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό G_δ σύνολο. Όμως,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \{x_n\}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} = X \setminus X = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο.

5.29. *Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής, επί και $d(x,y) \leqslant \sigma(f(x), f(y))$ για κάθε $x, y \in X$. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις ακόλουθες προτάσεις:*

(i) *Αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε ο (Y,σ) είναι πλήρης.*

(ii) *Αν ο (Y,σ) είναι πλήρης τότε ο (X,d) είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. (i) *Σωστό.* Έστω (y_n) βασική στον Y. Αφού η f είναι επί, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Από την υπόθεση,

$$d(x_n, x_m) \leqslant \sigma(f(x_n), f(x_m)) = \sigma(y_n, y_m),$$

που αποδεικνύει ότι η (x_n) είναι βασική στον X. Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Εφόσον η f είναι συνεχής έπεται ότι $y_n = f(x_n) \to f(x) \in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο (Y,σ) είναι πλήρης.

(ii) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε τους $X = (-\pi/2, \pi/2)$ και $Y = \mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική και την συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(x) = \tan x$, τότε έχουμε $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ για κάθε $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ (χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής και το γεγονός ότι $|f'| \geqslant 1$ στο $\mathbb{R}$) και η f είναι συνεχής και επί. Παρατηρήστε ότι ο Y είναι πλήρης, ενώ ο X δεν είναι πλήρης.

5.30. *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι: είτε υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_n(x_0) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή υπάρχουν $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $f_k(x) = 0$ για κάθε $x \in G$.*

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι: αν $Z_n = \{x \in X : f_n(x) = 0\} = f_n^{-1}(\{0\})$, τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Παρατηρήστε ότι κάθε Z_n είναι κλειστό, οπότε από το θεώρημα του Baire υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(Z_k) \neq \emptyset$. Θέτουμε $G = \mathrm{int}(Z_k)$ και παρατηρούμε ότι G είναι ανοικτό στον X και $f_k|_G = 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

5.31. *Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θεωρούμε την $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με*

$$d(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n}$$

αν $m \neq n$ *και* $d(m,n) = 0$ *αν* $m = n$.

(α) *Δείξτε ότι η* d *είναι μετρική.*

(β) *Δείξτε ότι ο* $(\mathbb{N}, d)$ *είναι πλήρης.*

(γ) *Δείξτε ότι: στον* $(\mathbb{N}, d)$ *υπάρχει φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες που η τομή τους είναι το κενό σύνολο.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση όπου οι m, n, k είναι διαφορετικοί ανά δυο. Σε αυτήν την περίπτωση εύκολα έχουμε,

$$d(n,m) + d(m,k) > 2 > 1 + \frac{1}{n+k} = d(n,k).$$

(β) Έστω $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον $(\mathbb{N}, d)$. Τότε, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $i, j \geqslant i_0$ να έχουμε $d(n_i, n_j) < 1/2$. Αναγκαστικά, $n_i = n_j$. Αλλιώς, θα είχαμε $d(n_i, n_j) > 1$. Έπεται ότι η (n_i) είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει.

(γ) Θέτουμε $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$ και θεωρούμε τις κλειστές μπάλες $B_n := \hat{B}_d(n, r_n)$. Παρατηρήστε ότι $B_n = \{n, n+1, \ldots\}$, οπότε $B_n \supseteq B_{n+1}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

Ομάδα Γ΄

5.32. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με την ιδιοτητα*

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, ισχύει το εξής: $x \in \mathbb{Q}$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geqslant k$ ώστε $f_n(x) > 1/2$ (ισοδύναμα, $f_n(x) > 1/2$ για άπειρους φυσικούς n). Με άλλα λόγια,

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1/2\} \right).$$

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $f_n(x) \to 1$ άρα $f_n(x) > 1/2$ τελικά, οπότε $f_n(x) > 1/2$ για άπειρους φυσικούς n. Από την άλλη πλευρά, αν $x \notin \mathbb{Q}$ έχουμε $f_n(x) \to 0$ άρα $f_n(x) < 1/2$ τελικά, οπότε υπάρχει k ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $f_n(x) < 1/2$. Αυτό αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό (εξηγήστε γιατί).

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$G_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1/2\}$$

είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1/2\}$ είναι ανοικτό, διότι η f_n είναι συνεχής. Συνεπώς, το $\mathbb{Q} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ είναι G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτό έχουμε δει ότι δεν ισχύει: κάθε πυκνό και G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

5.33. (α) *Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$F_A(x) = \sum_{\{n : a_n \leqslant x\}} 2^{-n}$$

είναι αύξουσα, συνεχής από δεξιά παντού και ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του A.

(β) *Έστω A αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας $D(g)$ της g να είναι το $\mathbb{R} \setminus A$.*

(γ) *Έστω E κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $G = E^\circ \cap \mathbb{Q}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \chi_E(x) - \chi_G(x)$. Αποδείξτε ότι $D(h) = E$.*

(δ) *Έστω $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ένα F_σ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{n : x \in E_n\}}, & x \in \mathbb{Q} \cap E \\ -\frac{1}{\min\{n : x \in E_n\}}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap E \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $D(f_E) = E$.

Υπόδειξη. (α) Προφανώς η F_A είναι αύξουσα. Δείχνουμε ότι F_A είναι δεξιά συνεχής παντού. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n > n_0} 2^{-n} < \varepsilon$. Έστω $\delta = \min\{a_n - x_0 > 0 : n = 1, 2, \dots, n_0\}$. Έτσι, αν $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 < a_n < x_0 + \delta$, τότε $n > n_0$. Οπότε, αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ έχουμε

$$0 \leqslant F_A(x) - F_A(x_0) = \sum_{\{n : x_0 < a_n \leqslant x\}} 2^{-n} \leqslant \sum_{\{n : x_0 < a_n < x_0 + \delta\}} 2^{-n} \leqslant \sum_{n > n_0} 2^{-n} < \varepsilon.$$

Τώρα δείχνουμε ότι αν $a_k \in A$ τότε $\tau_{F_A}(a_k) > 0$. Πράγματι· αν $x < a_k$ τότε

$$F_A(a_k) - F_A(x) = \sum_{\{n : x < a_n \leqslant a_k\}} 2^{-n} \geqslant \frac{1}{2^k}.$$

Συνεπώς, $\tau_{F_A}(a_k) \geqslant \frac{1}{2^k}$ για $k = 1, 2, \dots$. Με άλλα λόγια η F_A είναι ασυνεχής στα σημεία του A (παρουσιάζει άλμα).

Για να δείξουμε ότι τα σημεία ασυνέχειας της F_A είναι ακριβώς τα σημεία του A αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \notin A$ η F_A είναι αριστερά συνεχής στο x. Το επιχείρημα είναι παρόμοιο με αυτό της συνέχειας από δεξιά και γι' αυτό παραλείπεται.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε το $D(g)=\mathbb{R}\setminus A$. Τότε, το $C(g)=A$ είναι σύνολο G_δ. Αν είναι και πυκνό, γνωρίζουμε ότι πρέπει να είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Αν $x\notin E$ τότε υπάρχει V_x ανοικτή περιοχή του x με $V_x\cap E=\emptyset$. Έτσι, $h|_{V_x}\equiv 0$ και άρα η h είναι συνεχής στο x.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η h είναι ασυνεχής στο E. Πράγματι· έστω $x\in E$ και $\delta>0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x\in E^\circ$. Τότε υπάρχουν $q\in\mathbb{Q}\cap E$, $r\in\mathbb{Q}^c\cap E$ με $x-\delta<q<r<x+\delta$. Άρα, έχουμε
$$\tau_h((x-\delta,x+\delta))\geqslant|h(q)-h(r)|=1.$$
Έτσι, είναι $\tau_h(x)\geqslant 1$.

- $x\in E\setminus E^\circ$. Τότε υπάρχει $r\notin E$ ώστε $|x-r|<\delta$. Έτσι, είναι
$$\tau_h((x-\delta,x+\delta))\geqslant|h(x)-h(r)|=1.$$
Ώστε, $\tau_h(x)\geqslant 1$.

Οπότε, σε κάθε περίπτωση αν $x\in E$ έχουμε $\tau_h(x)\geqslant 1$.

(δ) Αν $x\notin E$, τότε η f_E είναι συνεχής στο x. Πράγματι· έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Τότε, $x\notin E_1\cup\cdots\cup E_{n_0}$, άρα υπάρχει $\delta>0$ με
$$\delta<\mathrm{dist}(x,E_1\cup\cdots\cup E_{n_0}).$$
Κατόπιν, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $y\in(x-\delta,x+\delta)\cap E^c$, τότε $|f_E(y)-f_E(x)|=0<\varepsilon$.

- Αν $y\in(x-\delta,x+\delta)\cap E$, έπεται ότι υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε $y\in E_m$. Τότε, αναγκαστικά έχουμε $m>n_0$ (εξηγήστε γιατί). Έτσι,
$$|f_E(y)-f_E(x)|=\frac{1}{\min\{n:y\in E_n\}}\leqslant\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon.$$

Συνεπώς, η f_E συνεχής στο $x\in\mathbb{R}\setminus E$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η f_E είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in E$. Ειδικότερα, θα δείξουμε την ανισότητα
$$(*)\qquad \tau_{f_E}(x)\geqslant\frac{1}{N_x(1+N_x)},\quad x\in E$$
όπου $N_x=\min\{n\in\mathbb{N}:x\in E_n\}$.

Απόδειξη της $(*)$. Έστω $x \in E$ και $\delta > 0$. Τότε ορίζεται ο $N_x \equiv N$ και έχουμε ότι $x \notin \bigcup_{k<N} E_k$ (ενδεχομένως $\bigcup_{k<N} E_k = \emptyset$, αν $N = 1$). Διακρίνουμε περιπτώσεις όπως στο (γ):

- $x \in E_N \setminus E_N^\circ$: Τότε, υπάρχει $y \notin \bigcup_{j\leqslant N} E_j$ (εξηγήστε γιατί) με $|y - x| < \delta$. Τότε, παίρνουμε

$$\tau_{f_E}((x-\delta, x+\delta)) \geqslant |f_E(x) - f_E(y)| \geqslant |f_E(x)| - |f_E(y)| \geqslant \frac{1}{N(N+1)}.$$

  Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $|f_E(y)| \leqslant \frac{1}{N+1}$.[1] Άρα, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $\tau_{f_E}((x-\delta, x+\delta)) \geqslant [N(N+1)]^{-1}$ απ' όπου έπεται ότι $\tau_{f_E}(x) \geqslant [N(N+1)]^{-1}$.

- $x \in E_N^\circ$. Τότε, υπάρχουν $q \in E_N \cap \mathbb{Q}$, $r \in E_N \cap \mathbb{Q}^c$ με $x - \delta < q < r < x + \delta$. Άρα, έχουμε

$$\tau_{f_E}((x-\delta, x+\delta)) \geqslant |f_E(q) - f_E(r)| = \frac{1}{\min\{n : q \in E_n\}} + \frac{1}{\min\{n : r \in E_n\}} \geqslant \frac{2}{N}$$

  Επομένως, είναι $\tau_{f_E}(x) \geqslant \frac{2}{N}$.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι $\tau_{f_E}(x) \geqslant [N(N+1)]^{-1}$ για κάθε $x \in E$.

5.34. *Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq [0, \infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in (a, b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

Υπόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in [a, b]$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$ περνώντας σε ένα κλειστό υποδιάστημα του (a, b). Έστω $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τα σύνολα

$$K_n = \{x \in [a, b] : \forall k \geqslant n,\ |f(kx)| \leqslant \varepsilon, \} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in [a, b] : |f(kx)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Τα K_n είναι κλειστά υποσύνολα του $[a, b]$ διότι η f είναι συνεχής. Επίσης, από την υπόθεση ισχύει $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Καθώς, ο $[a, b]$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, από το θεώρημα Baire έχουμε ότι υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και διάστημα (c, d) ώστε $(c, d) \subseteq K_{n_0}$. Δηλαδή, για κάθε $y \in (c, d)$ και για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|f(ny)| \leqslant \varepsilon$, ισοδύναμα αν $y \in (n_0c, n_0d) \cup ((n_0+1)c, (n_0+1)d) \cup \cdots$ τότε $|f(y)| \leqslant \varepsilon$. Όμως, όσο το n αυξάνει τα διαστήματα γίνονται επικαλυπτόμενα. Έτσι, αν επιλέξουμε $m > \max\{n_0, \frac{c}{d-c}\}$ τότε $\bigcup_{j=m}^{\infty}(jc, jd) = (mc, +\infty)$ και αν $x > mc$ τότε $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. Άρα, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

[1] Αν $y \notin E$, τότε $|f_E(y)| = 0$, ενώ αν $y \in E$, τότε $\min\{n : y \in E_n\} \geqslant N + 1$.

5.35. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_x$, $f^{(n)}(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.*

Υπόδειξη. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: *αν μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα «για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(n)}(x) = 0$» τότε η f είναι πολυώνυμο.*

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Θεωρούμε το σύνολο A όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία δεν υπάρχει (ανοικτή) περιοχή του x ώστε αν περιορίσουμε την f εκεί να είναι πολυώνυμο. Τότε, ισχύουν τα εξής:

- Το A είναι μη κενό. Πράγματι: αν ήταν $A = \emptyset$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν ανοικτή περιοχή V_x του x και πολυώνυμο p_x ώστε $f|_{V_x} \equiv p_x$. Αν I είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει V_x ανοικτή περιοχή του x ώστε $f|_{V_x}$ είναι πολυώνυμο. Τότε, τα $(V_x)_{x\in I}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς I, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in I$ ώστε $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}$ και η $f|_{V_{x_i}}$ είναι πολυώνυμο. Για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(n_i)}(x) = 0$ για κάθε $x \in V_{x_i} \cap I$. Θέτουμε $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ οπότε $f^{(n)} \equiv 0$ στο I. Άρα, η $f|_I$ είναι πολυώνυμο για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα I. (Σημείωση: *το βήμα αυτό αιτιολογείται και χωρίς να κάνουμε χρήση της συμπάγειας των κλειστών διαστημάτων - εξηγήστε γιατί*). Θεωρούμε τα διαστήματα $J_n = [-n, n]$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε $f|_{J_n} \equiv p_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $p_n(x) = p_1(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, άρα $p_n = p_1$ για $n = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, $f(x) = p_1(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$.
- Το A είναι κλειστό. Πράγματι: αν θεωρήσουμε $y \in A^c$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ και p_δ πολυώνυμο ώστε $f|_{(y-\delta,y+\delta)} \equiv p_\delta$. Τότε, αν $z \in (y - \delta, y + \delta)$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq (y - \delta, y + \delta)$, οπότε $f|_{(z-\varepsilon,z+\varepsilon)} \equiv p_\delta$. Δηλαδή, $(y - \delta, y + \delta) \subseteq A^c$. Συνεπώς, το A^c είναι ανοικτό.

Είναι γνωστό ότι ο A είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Επίσης, τα σύνολα

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\}$$

είναι κλειστά αφού είναι τα σύνολα ριζών συνεχών συναρτήσεων. Οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Baire στον υπόχωρο A, βρίσκουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}_A(A \cap E_m) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0 \in A \cap E_m$ και $\delta > 0$ ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \subseteq E_m.$$

Ισχυρισμός 1. Ισχύει $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A\subseteq\bigcap_{j=m}^{\infty}E_m$, δηλαδή αν $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$, τότε $f^{(n)}(x)=0$ για κάθε $n\geqslant m$.

Πράγματι· αν δε συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχουν $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$ και $n>m$ ώστε $f^{(n)}(x)\neq 0$ και $f^{(k)}(x)=0$ για $m\leqslant k<n$. Υπάρχει $\eta>0$ ώστε $(x-\eta,x+\eta)\subseteq(x_0-\delta,x_0+\delta)$ και $f^{(n)}(t)\neq 0$ για κάθε $|t-x|<\eta$. Τότε, για κάθε $0<|z-x|<\eta$ από το θεώρημα του Taylor υπάρχει $t_z\in(x-\eta,x+\eta)$ ώστε

$$f^{(m)}(z)=f^{(m)}(x)+(z-x)f^{(m+1)}(x)+\cdots+\frac{(z-x)^{n-m}}{(n-m)!}f^{(n)}(t_z)=\frac{(z-x)^{n-m}}{(n-m)!}f^{(n)}(t_z)\neq 0.$$

Δηλαδή, είναι $(x-\eta,x+\eta)\cap A=\{x\}$. Απ' αυτό έπεται (με ένα επιχείρημα συμπάγειας όπως πριν) ότι η $f|_{(x,x+\eta)}$ είναι πολυώνυμο και όμοια η $f|_{(x-\eta,x)}$ είναι πολυώνυμο. Άρα, η $f|_{(x-\eta,x+\eta)}$ είναι πολυώνυμο. Άτοπο, από τον ορισμό του x.

Ισχυρισμός 2. Ισχύει $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A^c\subseteq\bigcap_{j\geqslant m}E_j$ (άρα είναι $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\cap_{j\geqslant m}E_j$ και έχουμε άτοπο, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο).

Πράγματι· έστω $t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A^c$. Τότε υπάρχουν $\varepsilon>0$ και πολυώνυμο p_ε ώστε $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\subseteq(x_0-\delta,x_0+\delta)$ και $f|_{(t-\varepsilon,t+\varepsilon)}\equiv p_\varepsilon$. Έστω $[a,b]$ το μεγιστικό διάστημα, το οποίο περιέχει το t και $f|_{[a,b]}\equiv p_\varepsilon$. Τότε, είτε $a\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$ ή $b\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$ (αν για παράδειγμα $x_0<t$, τότε $x_0\leqslant a$ εφόσον $x_0\in A$ και $a\in A$ από τη μεγιστικότητα, δηλαδή $a\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$). Ας υποθέσουμε ότι $a\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A$ (όμοια η άλλη περίπτωση). Τότε, αν $r=\deg(p_\varepsilon)$ έχουμε $f^{(r)}(a)\neq 0$ και $f^{(n)}(a)=0$ για κάθε $n\geqslant m$ (από τον Ισχυρισμό 1). Οπότε, $r<m$. Δηλαδή, για κάθε $x\in[a,b]$ ισχύει $f^{(n)}(x)=0$ για κάθε $n\geqslant m$. Ειδικότερα, $f^{(n)}(t)=0$ για κάθε $n\geqslant m$.

Κεφάλαιο 6

Συμπαγείς μετρικοί χώροι

Ομάδα Α΄

6.1. *Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Δείξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K υπάρχουν $i_1,\ldots,i_m \in I$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές (με τη σχετική μετρική). Έστω $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Τότε, τα $(K\cap V_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτά στον $(K,\rho|_K)$ και $K=\bigcup_{i\in I} K\cap V_i$. Αφού ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K=\bigcup_{j=1}^n K\cap V_{i_j}$. Τότε, $K\subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K υπάρχουν $i_1,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K\subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$. Θα δείξουμε ότι ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Θεωρούμε τυχόν κάλυμμα $(W_i)_{i\in I}$ του K από ανοικτά σύνολα W_i στο K. Τότε, υπάρχουν (U_i) ανοικτά στον X ώστε $W_i = K\cap U_i$ για κάθε $i\in I$. Έχουμε $K=\bigcup_{i\in I} W_i = \bigcup_{i\in I}(K\cap U_i)\subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Από την υπόθεση υπάρχουν $i_1,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K\subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. Τότε, $K=\bigcup_{j=1}^n (K\cap U_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^n W_{i_j}$. Συνεπώς, ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

6.2. *Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου δείξτε ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, ενώ τα διαστήματα (a,b), $[a,b)$ και $[a,\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.*

Υπόδειξη. Η περίπτωση του $[a,b]$ είναι το θεώρημα Heine–Borel: κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του $[a,b]$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Για την απόδειξη, θεωρούμε το σύνολο

$$A=\{x\in[a,b] : [a,x] \text{ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα } V_i\}.$$

Προφανώς, $A \neq \emptyset$ (διότι $a \in A$) και το A είναι άνω φραγμένο. Από το αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών έχουμε ότι υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $s = \sup A$. Εύκολα βλέπουμε ότι $a < s \leqslant b$ και αν $a \leqslant x < s$ τότε $x \in A$.

Ισχυρισμός 1. Είναι $b = s$.

Αν υποθέσουμε ότι $s = \sup A < b$, τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $s \in V_{i_0}$. Αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(s-\delta, s+\delta) \subseteq V_{i_0} \cap [a,b]$. Άρα, το $[a, s-\delta/2]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i και το $[s-\delta/2, s+\delta/2]$ περιέχεται στο V_{i_0}. Έπεται ότι το $[a, s+\delta/2]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i, το οποίο είναι άτοπο διότι $s = \sup A$. Συνεπώς, $b = s$.

Ισχυρισμός 2. Ισχύει $b \in A$.

Πράγματι· υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $b \in V_{i_0}$ και αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $a < b-\varepsilon$ και $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq V_{i_0}$. Από τον ισχυρισμό 1 έχουμε ότι $b-\varepsilon \in A$, άρα το διάστημα $[a, b-\varepsilon]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i. Αφού $[b-\varepsilon, b] \subseteq V_{i_0}$, συμπεραίνουμε ότι το $[a,b]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i. Συνεπώς, $b \in A$.

Από τον Ισχυρισμό 2 έπεται ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές.

Το (a,b) δεν είναι συμπαγές αφού αν θεωρήσουμε το ανοικτό κάλυμμα (V_n) με $V_n = (a, b-\frac{b-a}{2n})$, $n = 1, 2\ldots$ αυτό δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (παρατηρήστε ότι $V_n \subseteq V_{n+1}$). Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι τα διαστήματα $[a,b)$ και $[a,\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ θεωρώντας αντίστοιχα τα ανοικτά καλύμματα (G_n) και (W_n), όπου $G_n = (a-1, b-\frac{b-a}{2n})$ και $W_n = (a-1, a+n)$.

6.3. *Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ), αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι συμπαγές.*

Υπόδειξη. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $A\cup B$. Τότε αυτό είναι ανοικτό κάλυμμα για καθένα από τα συμπαγή A και B. Έτσι, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο I_A του I ώστε $A \subseteq \bigcup_{i\in I_A} U_i$ και υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο I_B του I ώστε $B \subseteq \bigcup_{i\in I_B} U_i$. Τώρα βλέπουμε αμέσως ότι το σύνολο $J := I_A \cup I_B$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I και ισχύει $A \cup B \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

6.4. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και E, F υποσύνολα του X ώστε το E να είναι συμπαγές, το F κλειστό και $E \cap F = \emptyset$. Αποδείξτε ότι $\operatorname{dist}(E,F) > 0$.*

Δείξτε επίσης ότι υπάρχουν A, B κλειστά, ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \operatorname{dist}(x,F)$. Έχουμε δει ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση (μάλιστα είναι 1–Lipschitz). Αφού το E είναι συμπαγές, η f

παίρνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in E$ ώστε

$$f(x_0) = \min_{x\in E} f(x) = \inf\{\mathrm{dist}(x,F) : x \in E\} = \mathrm{dist}(E,F).$$

Παρατηρήστε ότι $x_0 \notin F$ (αφού $E \cap F = \emptyset$). Αφού το F είναι κλειστό, έχουμε $\mathrm{dist}(E,F) = f(x_0) > 0$.

Για το παράδειγμα, θεωρούμε τα ξένα κλειστά υποσύνολα $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $B = \{(x,\frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \frac{1}{|x|}$$

για κάθε $x \neq 0$, άρα $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

6.5. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν $x \in X$ και A συμπαγές υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $y \in A$ ώστε $\mathrm{dist}(x,A) = \rho(x,y)$.*

(β) *Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα του X τότε, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $\mathrm{dist}(A,B) = \rho(x,y)$.*

Υπόδειξη. (α) Σταθεροποιούμε $x \in X$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f_x : A \to \mathbb{R}$ με $f_x(t) = \rho(t,x)$. Η f_x είναι συνεχής και το A είναι συμπαγές, άρα η f_x παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $y \in A$. Τότε, $\rho(x,y) = f_x(y) = \inf_{t\in A} f_x(t) =: \mathrm{dist}(x,A)$.

(β) Από τον ορισμό της απόστασης συνόλων υπάρχουν ακολουθίες (a_n) και (b_n) στο A και B αντιστοίχως ώστε $\rho(a_n,b_n) \to \mathrm{dist}(A,B)$. Επειδή το A είναι ακολουθιακά συμπαγές υπάρχουν $x \in A$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Η (b_{k_n}) είναι ακολουθία στο συμπαγές B, άρα υπάρχουν $y \in B$ και υπακολουθία $(b_{k_{\lambda_n}})$ της (b_n) ώστε $b_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho} y$. Τότε, επειδή η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_{k_n}) έχουμε ότι $a_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho} x$. Έπεται ότι $\rho(a_{k_{\lambda_n}}, b_{k_{\lambda_n}}) \to \rho(x,y)$. Αφού η $(\rho(a_{k_{\lambda_n}}, b_{k_{\lambda_n}}))$ είναι υπακολουθία της $(\rho(a_n,b_n))$, έπεται ότι $\mathrm{dist}(A,B) = \rho(x,y)$.

Σημείωση. Με ένα παρόμοιο επιχείρημα ακολουθιακής συμπάγειας θα μπορούσε να αποδειχθεί και το (α).

6.6. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.*

(α) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\overline{B}(x,\varepsilon)$ να είναι συμπαγές. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(β) *Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το σύνολο $\overline{B}(x,\varepsilon)$ να είναι συμπαγές, τότε είναι ο X κατ' ανάγκην πλήρης;*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) μια βασική ακολουθία στον (X,ρ). Θεωρούμε το $\varepsilon > 0$ της υπόθεσης. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x_{n_0},\varepsilon)$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Από την υπόθεση, το σύνολο $K = \overline{B}(x_{n_0},\varepsilon)$ είναι συμπαγές και η $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ περιέχεται σε αυτό. Άρα, υπάρχουν $x \in K$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της $(x_n)_{n\geqslant n_0}$, η οποία συγκλίνει στο x. Παρατηρήστε ότι η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n). Αφού η (x_n) είναι βασική, έπεται ότι $x_n \to x$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης.

(β) *Λάθος.* Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $X = (0,1)$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, για κάθε $x \in (0,1)$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $\hat{B}(x,\varepsilon_x) = [x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x] \subseteq (0,1)$ και κάθε $\hat{B}(x,\varepsilon_x)$ είναι συμπαγές. Όμως, ο $(X,|\cdot|)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

6.7. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Η συνάρτηση γράφημα $G_f : X \to X \times Y$ με $G_f(x) = (x, f(x))$ είναι συνεχής.*

(γ) *Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f) = \{(x,f(x)) : x \in X\}$ είναι συμπαγές στον $X \times Y$.*

Είναι αναγκαία υπόθεση ο μετρικός χώρος X να είναι συμπαγής;

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει γενικά: δεν χρησιμοποιούμε την υπόθεση της συμπάγειας του X. Έστω $x \in X$ και (x_n) ακολουθία στο X ώστε $x_n \to x$. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$. Άρα,

$$G_f(x_n) = (x_n, f(x_n)) \to (x, f(x)) = G_f(x).$$

Από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η G_f είναι συνεχής.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Αφού η $G_f : X \to X \times Y$ είναι συνεχής και το X είναι συμπαγές, έπεται ότι $G_f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X \times Y$. Όμως, το $G_f(X)$ είναι ακριβώς το γράφημα της f, δηλαδή $G_f(X) \equiv \mathrm{Gr}(f)$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Έστω $x_0 \in X$ και $x_n \to x_0$. Για να δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(f(x_n))$ έχει περαιτέρω υπακολουθία, η οποία συγκλίνει στο $f(x_0)$. Έστω λοιπόν $(f(x_{k_n}))$ υπακολουθία της $(f(x_n))$. Η $((x_{k_n}, f(x_{k_n})))$ είναι ακολουθία στο συμπαγές σύνολο $\mathrm{Gr}(f)$. Άρα, υπάρχουν $z \in X$ και υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ της (x_{k_n}) ώστε $(x_{k_{\lambda_n}}, f(x_{k_{\lambda_n}})) \to (z, f(z))$. Επειδή, ο $X \times Y$ είναι εφοδιασμένος με κάποια από τις γνωστές μετρικές γινόμενο έπεται ότι $x_{k_{\lambda_n}} \to z$ και $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to f(z)$. Αλλά, $x_{k_{\lambda_n}} \to x_0$, αφού η $(x_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n). Οπότε $z = x_0$ και έχουμε ότι $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to f(x_0)$.

Η υπόθεση της συμπάγειας του πεδίου ορισμού είναι απαραίτητη: Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ τότε αυτή είναι συνεχής στο $(0,1]$ με τη συνήθη μετρική, αλλά το γράφημά της δεν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, άρα ούτε και συμπαγές. Παρατηρήστε ότι το $(0,1]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική).

6.8. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X το $F \cap K$ είναι κλειστό.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το F είναι κλειστό και θεωρούμε ένα K συμπαγές. Τότε, το $K \cap F$ είναι κλειστό ως τομή τέτοιων.

Αντίστροφα: έστω ότι για κάθε συμπαγές K, το $K \cap F$ είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι το F είναι κλειστό. Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n) στο F ώστε $x_n \to x \in X$. Θα δείξουμε ότι το $x \in F$. Πράγματι· αν θεωρήσουμε το συμπαγές $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, τότε το $K \cap F$ είνα κλειστό. Όμως, η (x_n) περιέχεται στο $K \cap F$ και συγκλίνει στο x. Έπεται ότι $x \in K \cap F$, ειδικότερα, $x \in F$.

6.9. *Γνωρίζουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X,ρ) είναι φραγμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\rho(x,y) = \mathrm{diam}(K)$.*

Υπόδειξη. 1η Απόδειξη. Υπάρχουν $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στο K ώστε $\rho(x_n, y_n) \to \mathrm{diam}(K)$. Επειδή το K είναι συμπαγές υπάρχουν $x, y \in K$ και υπακολουθίες (x_{k_n}), (y_{k_n}) των (x_n), (y_n) αντίστοιχα ώστε $x_{k_n} \to x$ και $y_{k_n} \to y$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\rho(x_{k_n}, y_{k_n}) \to \rho(x,y)$. Επειδή, η $(\rho(x_{k_n}, y_{k_n}))$ είναι υπακολουθία της $(\rho(x_n, y_n))$ έπεται ότι $\mathrm{diam}(K) = \rho(x,y)$.

2η Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : K \times K \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \rho(x,y)$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής και ότι το $K \times K$ είναι συμπαγές. Άρα, η f παίρνει μέγιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\max f = f(x,y)$. Τότε,

$$\rho(x,y) = \max_{(t,s)\in K\times K} f(t,s) = \sup\{f(t,s) : (t,s) \in K \times K\} = \mathrm{diam}(K).$$

6.10. *Έστω (X,d), (Y,ρ) μετρικοί χώροι με τον Y συμπαγή και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $(X \times Y, \rho_1)$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Όπως είδαμε στην Άσκηση 7, αυτή η συνεπαγωγή ισχύει γενικά (χωρίς την υπόθεση της συμπάγειας του Y).

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω $x_0 \in X$ και (x_n) ακολουθία στο X ώστε $x_n \to x_0$. Για να δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία $(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$ έχει περαιτέρω υπακολουθία, η οποία συγκλίνει στο $f(x_0)$. Έστω λοιπόν μια υπακολουθία

$(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$. Η $(f(x_{k_n}))$ περιέχεται στο συμπαγές Y. Άρα, υπάρχουν $y \in Y$ και υπακολουθία $(f(x_{k_{\lambda_n}}))$ της $(f(x_{k_n}))$ ώστε $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to y$. Τότε, $(x_{k_{\lambda_n}}, f(x_{k_{\lambda_n}})) \xrightarrow{\rho_1} (x_0, y)$. Επειδή, η $((x_{k_{\lambda_n}}, f(x_{k_{\lambda_n}})))$ περιέχεται στο κλειστό $\mathrm{Gr}(f)$ έχουμε ότι $(x_0, y) \in \mathrm{Gr}(f)$, δηλαδή $y = f(x_0)$. Άρα, $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to f(x_0)$.

6.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν $A_1, \ldots, A_m$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του X τότε το $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.*

(β) *Αν A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X τότε το $\overline{A}$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να το δείξουμε για δυο σύνολα A_1, A_2. Κατόπιν επαγωγικά θα έχουμε το συμπέρασμα. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το A_1 είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in A_1$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon)$. Ομοίως, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in A_2$ ώστε $A_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(y_j, \varepsilon)$. Θέτουμε $\mathcal{Z} = \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A_1 \cup A_2$ με $\mathrm{card}(\mathcal{Z}) < \infty$ και $A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} B(z, \varepsilon)$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon/2)$. Τότε, $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{B(x_i, \varepsilon/2}$. Από την $\overline{B(x_i, \varepsilon/2)} \subseteq B(x_i, \varepsilon)$ έπεται ότι $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon)$.

6.12. (α) *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f στέλνει τα ολικά φραγμένα υποσύνολα του X σε ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y.*

(β) *Δείξτε ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς. (Υπόδειξη: Τα $\mathbb{R}$ και $(0, 1)$ είναι ομοιομορφικά.)*

Υπόδειξη. (α) Έστω $A \subseteq X$ ολικά φραγμένο και έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$, $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Το A είναι ολικά φραγμένο, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta)$. Τότε,

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k f(B(x_i), \delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(f(x_i), \varepsilon).$$

Έπεται ότι το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{t}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα συνεχής και επί. Άρα, είναι ομοιομορφισμός. Παρατηρήστε ότι το $(0, 1)$ είναι ολικά φραγμένο, ενώ το $\mathbb{R}$ δεν είναι.

6.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) βασική ακολουθία στον X. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} B(x_j, \varepsilon).$$

Ομάδα Β′

6.14. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Κάθε ισομετρία $f : X \to X$ είναι επί.*

(β) *Αν (Y, σ) είναι μετρικός χώρος ώστε να υπάρχουν ισομετρίες $g : X \to Y$ και $h : Y \to X$, τότε και ο Y είναι συμπαγής.*

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \notin f(X)$. Αφού η f είναι συνεχής και ο X συμπαγής, το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, άρα $\delta := \mathrm{dist}(x, f(X)) > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) η οποία ορίζεται αναδρομικά από τις $x_0 = x$ και $x_n = f(x_{n-1})$ για $n = 1, 2, \ldots$. Παρατηρούμε ότι η $(x_n)_{n\geqslant 1}$ περιέχεται στο $f(X)$. Από την ακολουθιακή συμπάγεια του $f(X)$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν x_n, x_m με $m > n \geqslant 1$ ώστε $\rho(x_m, x_n) < \delta$ (εξηγήστε γιατί). Από το γεγονός ότι η f είναι ισομετρία προκύπτει ότι

$$\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) = \rho(x_{m-1}, x_{n-1}) = \cdots = \rho(x_{m-n}, x).$$

Αλλά $x_{m-n} \in f(X)$, οπότε $\mathrm{dist}(x, f(X)) \leqslant \rho(x_m, x_n) < \delta$, άτοπο.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h \circ g : X \to X$ η οποία είναι ισομετρία ως σύνθεση ισομετριών. Επειδή ο X είναι συμπαγής, από το (α) έπεται ότι είναι και επί. Τότε, η $h : Y \to X$ είναι επί: αν $x \in X$ επειδή η $h \circ g$ είναι επί υπάρχει $z \in X$ ώστε $(h \circ g)(z) = x$. Για $y = g(z) \in Y$ έχουμε $h(y) = x$. Άρα, η $h : Y \to X$ είναι ισομετρία επί. Εφόσον, οι χώροι X, Y είναι ισομετρικοί και ο X είναι συμπαγής, έπεται το ζητούμενο.

6.15. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $F_{n_0} \subseteq G$.*

(β) *Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{m_0} = \emptyset$.*

(γ) *Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.*

Υπόδειξη. (α) Παίρνοντας συμπληρώματα στη δοθείσα σχέση, έχουμε $G^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$. Τότε, τα $\{F_n^c\}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του G^c και αυτό είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς μετρικού χώρου. Άρα, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $G^c \subseteq \bigcup_{j=1}^k F_{n_j}^c$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ και παρατηρούμε ότι $\bigcup_{j=1}^k F_{n_j}^c = F_{n_0}^c$. Άρα, $G^c \subseteq F_{n_0}^c$, ή ισοδύναμα, $F_{n_0} \subseteq G$.

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α) αν θέσουμε $G = \emptyset$.

(γ) Έστω $x \in X$ με $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \{x\}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \subseteq B(x, \varepsilon/3)$. Από το (α) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0} \subseteq B(x, \varepsilon/3)$. Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\mathrm{diam}(F_n) \leqslant \mathrm{diam}(F_{n_0}) \leqslant \mathrm{diam}(B(x, \varepsilon/3)) < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

6.16. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι*

$$f\left(\bigcap_{n=1}^\infty K_n\right) = \bigcap_{n=1}^\infty f(K_n).$$

Υπόδειξη. Ο εγκλεισμός $f(\cap_{n=1}^\infty K_n) \subseteq \cap_{n=1}^\infty f(K_n)$ είναι προφανής. Έστω $y \in \cap_{n=1}^\infty f(K_n)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in K_n$ ώστε $y = f(x_n)$. Η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο συμπαγές K_1, άρα υπάρχουν $x \in K_1$ και (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$.

Ισχυρισμός. $x \in \cap_{n=1}^\infty K_n$.

Πράγματι, αν $m \in \mathbb{N}$, τότε $K_{k_m} \subseteq K_m$. Η υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \geqslant m}$ της (x_{k_n}) περιέχεται στο K_{k_m} και συγκλίνει στο x. Επειδή το K_{k_m} είναι κλειστό, έχουμε $x \in K_{k_m}$, δηλαδή $x \in K_m$. Αφού το $m \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $x \in \cap_{m=1}^\infty K_m$.

Έχουμε λοιπόν ότι $f(x) \in f(\cap_{n=1}^\infty K_n)$. Η f είναι συνεχής, οπότε $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(x_n) = y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $y = f(x)$ και έχουμε το συμπέρασμα.

6.17. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία:*

(α) *δεν είναι φραγμένη.*

(β) *είναι φραγμένη αλλά δεν παίρνει μέγιστη τιμή.*

Υπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το E δεν είναι κλειστό. Τότε υπάρχει $x \in E'$ με $x \notin E$. Για το (α) θεωρούμε τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{|t-x|}$, η οποία είναι συνεχής, αλλά όχι φραγμένη. Για το (β) θεωρούμε τη συνάρτηση $g : E \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{1}{1+|t-x|}$, η οποία είναι συνεχής, φραγμένη αλλά δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

- Το E δεν είναι φραγμένο. Για το (α) θεωρούμε τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t$ ενώ για το (β) θεωρούμε τη $g : E \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{|t|}{1+|t|}$. Αυτή είναι συνεχής, φραγμένη με $0 < g < 1$ και δεν παίρνει μέγιστη τιμή, διότι $\sup_{t\in E} g(t) = 1$. (Παρατηρήστε ότι, αφού το E δεν είναι φραγμένο, υπάρχει ακολουθία $(t_n) \subseteq E$ με $|t_n| \to \infty$, άρα $g(t_n) \to 1$.)

6.18. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to X$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο. Τότε $\rho(x, f(x)) > 0$ για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \rho(x, f(x))$. Ο X είναι συμπαγής, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $g(x) \geqslant g(x_0)$ για κάθε $x \in X$. Για το $f(x_0) \in X$ παρατηρούμε ότι $f(x_0) \neq x_0$ και

$$g(f(x_0)) = \rho(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho(x_0, f(x_0)) = g(x_0).$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα η f έχει σταθερό σημείο, το οποίο είναι μοναδικό αφού για $x \neq y$ ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$.

6.19. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι συμπαγής.*

(β) *Κάθε φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη κενή τομή, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Παίρνοντας συμπληρώματα έχουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$. Τα (F_n^c) είναι ανοικτά και καλύπτουν τον συμπαγή μετρικό χώρο X. Άρα, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_k$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{k} F_{n_j}^c$, ή ισοδύναμα, $\bigcap_{j=1}^{k} F_{n_j} = \emptyset$. Αν πάρουμε $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ τότε $F_N = \bigcap_{j=1}^{k} F_{n_j} = \emptyset$ κι έχουμε άτοπο.

(β) $\Rightarrow$ (α). Θα δείξουμε ότι ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Από την υπόθεση και το Θεώρημα του Cantor έχουμε ότι ο X είναι πλήρης. Αν ο X δεν είναι ολικά φραγμένος τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και ακολουθία (x_n) στον X με $\rho(x_n, x_m) \geqslant \delta$ για $n \neq m$ (εξηγήστε γιατί). Θέτουμε $F_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ και παρατηρούμε ότι η $\{F_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του X. Αλλά, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ κι έχουμε αντίφαση.

6.20. (α) *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι το A είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.*

(β) *Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η πλήρωσή του $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το A είναι συμπαγές. Τότε (πάντοτε) ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης και ολικά φραγμένος μετρικός υπόχωρος. Συνεπώς, το A είναι κλειστό και ολικά φραγμένο υποσύνολο του X.

Αντίστροφα· υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό και ολικά φραγμένο. Αφού ο X είναι πλήρης και το A κλειστό, έχουμε ότι ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Επιπλέον, είναι ολικά φραγμένος, άρα συμπαγής.

(β) Ο X είναι πυκνός στον $\tilde{X}$. Αφού ο X είναι ολικά φραγμένος, έπεται ότι ο $\tilde{X}$ είναι ολικά φραγμένος (δείτε την Άσκηση 22(β)). Όμως, ο $\tilde{X}$ είναι και πλήρης, άρα είναι συμπαγής.

6.21. *Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X, d) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος, όπου $\rho = \frac{d}{1+d}$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, d) \to (X, \rho)$. Σύμφωνα με την Άσκηση 23(α) αρκεί να δείξουμε ότι οι I, I^{-1} είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Αυτό όμως είναι άμεσο (εξηγήστε γιατί): αρκεί να παρατηρήσουμε ότι (για μια ακολουθία (a_n) θετικών πραγματικών αριθμών) ισχύει $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$.

6.22. (α) *Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια ολικά φραγμένων μετρικών χώρων. Δείξτε ότι ο χώρος (X, ρ_1), όπου $X = \prod_{i=1}^k X_i$ και $\rho_1 = \sum_{i=1}^k d_i$ είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.*

(β) *Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^k$ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνον αν είναι φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στον X, δηλαδή $x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(k))$ για $n = 1, 2, \ldots$. Επειδή, ο X_1 είναι ολικά φραγμένος, η $(x_n(1))$ έχει βασική υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(x_n(1))_{n \in M_1}$ να είναι βασική. Η ακολουθία $(x_n(2))_{n \in M_1}$ βρίσκεται στον ολικά φραγμένο χώρο X_2. Άρα, υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο ώστε η $(x_n(2))_{M_2}$ να είναι βασική. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε μια φθίνουσα πεπερασμένη ακολουθία $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_k$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$, η $(x_n(i))_{n \in M_i}$ είναι βασική. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in M_k}$. Τότε η $(x_n)_{n \in M_k}$ είναι ρ_1-βασική: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(x_n(1))_{n \in M_k}$ είναι υπακολουθία της $(x_n(1))_{n \in M_1}$ είναι βασική, άρα υπάρχει $n_1 \in M_k$ ώστε $d_1(x_n(1), x_m(1)) < \varepsilon/k$ για κάθε $m, n \in M_k$ με $m, n \geqslant n_1$. Επειδή, η $(x_n(2))_{n \in M_k}$ είναι υπακολουθία της $(x_n(2))_{n \in M_2}$, είναι βασική. Άρα, υπάρχει $n_2 \in M_k$ ώστε $d_2(x_n(2), x_m(2)) < \varepsilon/k$ για κάθε $m, n \in M_k$ με $m, n \geqslant n_2$. Συνεχίζοντας με το ίδιο τρόπο βρίσκουμε $n_1, \ldots, n_k \in M_k$ ώστε $d_i(x_n(i), x_m(i)) < \varepsilon/k$ για κάθε $m, n \in M_k$ με $m, n \geqslant n_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ και έχουμε: αν $m, n \in M_k$ και $m, n \geqslant n_0$ τότε

$$\rho_1(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^k d_i(x_n(i), x_m(i)) < \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Επομένως, ο (X,ρ_1) είναι ολικά φραγμένος.

(β) Αρκεί να εξετάσουμε την κατεύθυνση όπου το A είναι φραγμένο (η άλλη ισχύει πάντοτε). Επίσης, παρατηρήστε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\mathbb{R}^k$ εφοδιασμένο με τη μετρική ρ_1, αφού $\rho_2(x,y) \leqslant \rho_1(x,y)$, για κάθε $x,y \in \mathbb{R}^k$. Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\|_1 \leqslant M$ για κάθε $x \in A$. Έπεται ότι $A \subseteq [-M,M]^k$. Όμως, αν πάρουμε $(X_i,d_i) \equiv ([-M,M],|\cdot|)$ στο (α), βλέπουμε ότι ο $([-M,M]^k,\rho_1)$ είναι ολικά φραγμένος, επομένως, ο $(A,\rho_1|_A)$ είναι ολικά φραγμένος. Δηλαδή το A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}^k,\rho_1)$.

6.23. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.*

(β) *Ο X είναι πλήρης και κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Δείχνουμε ότι ο X είναι πλήρης: αν (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X, τότε γνωρίζουμε ότι το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Από την υπόθεση, το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Άρα, η ακολουθία (x_n) η οποία περιέχεται στο $\overline{A}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Συνεπώς, η (x_n) συγκλίνει.

Δείχνουμε ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι, αν $B \subseteq X$ φραγμένο, τότε από την υπόθεση έχουμε ότι το $\overline{B}$ είναι συμπαγές. Ειδικότερα, είναι ολικά φραγμένο. Τότε, το B είναι ολικά φραγμένο ως υποσύνολό του.

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X. Από την υπόθεση έχουμε ότι το K είναι κλειστό και ολικά φραγμένο. Άρα, ο υπόχωρος $(K,\rho|_K)$ είναι πλήρης (ως κλειστό υποσύνολο πλήρους μετρικού χώρου) και ολικά φραγμένος. Οπότε, ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής.

6.24. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Είναι κατ' ανάγκην φραγμένο;*

(β) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και όχι κλειστό. Δείξτε ότι υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz και φραγμένη, η οποία δεν παίρνει μέγιστη τιμή.*

(γ) *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο. Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(δ) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι επίσης φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $a \in A'$ ώστε $a \notin A$. Έτσι, υπάρχει $(a_n) \subseteq A$ ώστε $a_n \neq a$ για κάθε n και $|a_n - a| \to 0$. Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = \frac{1}{|x-a|}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Η f όμως *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε

$$(*) \qquad 0 < |a_{k_n} - a| < \frac{1}{2}|a_n - a|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(a_{k_n}) - f(a_n)| &= \frac{|a_n - a| - |a_{k_n} - a|}{|a_{k_n} - a| \cdot |a_n - a|} \\ &\overset{(*)}{>} \frac{|a_n - a|}{2|a_n - a| \cdot |a_{k_n} - a|} \\ &= \frac{1}{2|a_{k_n} - a|} \to +\infty, \end{aligned}$$

ενώ $|a_n - a_{k_n}| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Το A μπορεί να μην είναι φραγμένο: για παράδειγμα κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{Z}, |\cdot|) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και όχι κλειστό. Τότε, όπως πριν, υπάρχει $x \in A'$ ώστε $x \notin A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{1}{1+|t-x|}$. Προφανώς, η g είναι καλά ορισμένη, συνεχής και φραγμένη με $0 < g < 1$.

- Η g δεν παίρνει μέγιστη τιμή: Είναι $\sup_{t\in A} g(t) = 1$. Πράγματι, υπάρχει $(t_n) \subseteq A$ ώστε $t_n \to x$. Άρα, $g(t_n) \to 1$ και $g(t) < 1$ για κάθε $t \in A$ αφού $x \notin A$.

- Η g είναι 1–Lipschitz: Για κάθε $t, s \in A$ ισχύει

$$|g(t) - g(s)| = \frac{\big||t - x| - |s - x|\big|}{(1 + |t - x|)(1 + |s - x|)} \leqslant |t - s|.$$

Παρατηρήστε ότι δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά η υπόθεση του φραγμένου.

(γ) Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής, η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και ακολουθίες $(x_n), (y_n) \in K$ με $|x_n - y_n| \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αφού το K είνα φραγμένο, από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $|x_{k_n} - x| \to 0$. Επειδή το K είναι κλειστό, έπεται ότι $x \in K$. Τότε, είναι και $|y_{k_n} - x| \to 0$. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(x)$. Συνεπώς, $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geqslant \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$.

(δ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Αν το $f(A)$ δεν είναι φραγμένο, υπάρχει (a_n) ακολουθία στο A ώστε $|f(a_n)| \geqslant n$ για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί). Αφού το A είναι φραγμένο, έπεται ότι και η (a_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass, η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}). Ειδικότερα, αυτή είναι βασική. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η $f((a_{k_n}))$ είναι επίσης βασική και ειδικότερα φραγμένη. Όμως, $|f(a_{k_n})| \geqslant k_n \geqslant n$ για $n = 1, 2, \ldots$ και έχουμε αντίφαση.

Ομάδα Β′ – Συμπληρωματικές ασκήσεις

6.25. *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν $K \subseteq Y$ είναι συμπαγές τότε το $f^{-1}(K) \subseteq X$ είναι συμπαγές.*

Υπόδειξη. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του Y. Τότε, το K είναι κλειστό, και αφού η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, έπεται ότι το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

6.26. *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Ορίζουμε μια ακολουθία υποσυνόλων του X ώς εξής: $K_1 = X$ και $K_{n+1} = f(K_n)$ για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι η $\{K_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αν $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, αποδείξτε ότι $K \neq \emptyset$ και $f(K) = K$.*

Υπόδειξη. Έχουμε $K_2 = f(X) \subseteq X = K_1$ και, επαγωγικά, αν $K_n \subseteq K_{n-1}$ τότε $f(K_n) \subseteq f(K_{n-1})$, δηλαδή $K_{n+1} \subseteq K_n$.

Ορίζουμε $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Το K είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του X (από την ιδιότητα πεπερασμένων τομών). Είναι άμεσο ότι $f(K) \subseteq K_n$ για κάθε n, άρα $f(K) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε τυχόν $x \in K$. Τότε, $x \in f(K_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K_n$ ώστε $x = f(z_n)$. Η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $z \in K_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Πράγματι, αν $m \in \mathbb{N}$ τότε η $(z_{k_n})_{n \geqslant m}$ βρίσκεται μέσα στο $K_{k_m} \subseteq K_m$. Αφού το K_m κλειστό και η $(z_{k_n})_{n \geqslant m}$ συγκλίνει στο z, το ζητούμενο έπεται.

6.27. *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $d(x_n, f(x_n)) \to 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.*

Υπόδειξη. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x \in X$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, παίρνουμε $f(x_{k_n}) \to f(x)$. Επομένως,

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_{k_n}, f(x_{k_n})) = d(x, f(x)),$$

κι έχουμε το ζητούμενο.

6.28. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία στοιχείων του D έχει υπακολουθία που συγκλίνει (στον X) δείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αφού το D είναι πυκνό, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_n \in D$ ώστε $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$. Από την υπόθεση, η (z_n) έχει υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$. Τότε,

$$d(x_{k_n}, z) \leqslant d(x_{k_n}, z_{k_n}) + d(z_{k_n}, z) < \frac{1}{k_n} + d(z_{k_n}, z) \to 0,$$

διότι $k_n \to \infty$. Άρα, $x_{k_n} \to x$. Έπεται ότι ο (X, d) είναι (ακολουθιακά) συμπαγής.

6.29. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.*

Υπόδειξη. Έστω $A \subseteq X$. Αφού η f είναι συνεχής, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Από την άλλη πλευρά, αφού ο X είναι συμπαγής και το $\overline{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές σύνολο, και αφού η f είναι συνεχής, το $f(\overline{A})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Ειδικότερα, το $f(\overline{A})$ είναι κλειστό, και αφού $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$) έπεται ότι $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Έπεται ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

6.30. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):*

(i) *Αν $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός και ο X είναι ολικά φραγμένος, τότε και ο Y θα είναι ολικά φραγμένος.*

(ii) *Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X, ρ), τότε το σύνολο $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. (i) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε τους $X = (-/pi/2, \pi/2)$ και $Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε η $f : X \to Y$ με $f(x) = \tan x$ είναι ομοιομορφισμός. Όμως, ο X είναι ολικά φραγμένος ενώ ο Y όχι.

(ii) *Σωστό.* Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ) και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geqslant n_0$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ειδικότερα, $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Έπεται ότι

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_0}, \varepsilon).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το A είναι ολικά φραγμένο.

6.31. *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ να είναι μονοσύνολο. Δείξτε ότι $\operatorname{diam}(K_n) \to 0$.*

Υπόδειξη. Έστω x_0 το μοναδικό σημείο του $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ και έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι: αν $G_n = X \setminus K_n$ τότε κάθε G_n είναι ανοικτό και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus \{x_0\}.$$

Συνεπώς,

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Αυτό σημαίνει ότι η οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B(x_0, \varepsilon/2)\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε

$$X = G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_k} \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Όμως, $K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}$, άρα $G_{n_1} \subseteq \cdots \subseteq G_{n_k}$. Συνεπώς,

$$X = G_{n_k} \cup B(x_0, \varepsilon/2) = (X \setminus K_{n_k}) \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Έπεται ότι $K_{n_k} \subseteq B(x_0, \varepsilon/2)$. Άρα, για κάθε $n \geqslant n_k$ έχουμε $K_n \subseteq B(x_0, \varepsilon/2)$, και

$$\mathrm{diam}(K_n) \leqslant \mathrm{diam}(B(x_0, \varepsilon/2)) \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.

6.32. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ του X. Υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Αφού το U_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{i_0}$.

Θεωρούμε το $X \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$. Από την υπόθεση είναι συμπαγές σύνολο και περιέχεται στην $\bigcup_{i\in I} U_i$. Συνεπώς, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε

$$X \setminus B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

Έπεται ότι

$$X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

Με βάση τον ορισμό, ο (X, d) είναι συμπαγής.

6.33. *Αν A, B είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το σύνολο*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

είναι συμπαγές.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A + B$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Αφού το B είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία $(b_{k_{\lambda_n}})$ της (b_{k_n}) ώστε $b_{k_{\lambda_n}} \to b \in B$. Αφού η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_{k_n}) και $a_{k_n} \to a$, έχουμε $a_{k_{\lambda_n}} \to a$. Τότε,

$$x_{k_{\lambda_n}} = a_{k_{\lambda_n}} + b_{k_{\lambda_n}} \to a + b.$$

Δηλαδή, η (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του $A+B$. Έπεται ότι το $A+B$ είναι συμπαγές.

Ομάδα Γ΄

6.34. (α) *Έστω $\{(X_n, \rho_n)\}$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x,y) \leqslant 1$ για κάθε $x, y \in X_n$ και $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $(\prod_{n=1}^{\infty} X, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n)$ είναι συμπαγής.*

(β) *Δείξτε ότι κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^{\infty}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής. Έστω (x_n) ακολουθία στον X, δηλαδή $x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(i), \ldots)$. Η $(x_n(1))$ περιέχεται στο συμπαγή μετρικό χώρο X_1, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή, υπάρχουν $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $x(1) \in X_1$ ώστε η $(x_n(1))_{n\in M_1}$ να συγκλίνει στο $x(1)$. Η $(x_n(2))_{n\in M_1}$ περιέχεται στο συμπαγές X_2, άρα υπάρχουν $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο και $x(2) \in X_2$ ώστε η $(x_n(2))_{n\in M_2}$ να συγκλίνει στο $x(2)$. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε $x(i) \in X_i$ και φθίνουσα ακολουθία $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η $(x_n(i))_{n\in M_i}$ να συγκλίνει στο $x(i)$. Αφού κάθε M_i είναι άπειρο, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_i) με $k_i \in M_i$. Τότε, η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n) και συγκλίνει στο $x = (x(i)) \in X$. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη (αφού η σύγκλιση ως προς τη ρ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένες). Έστω $i \in \mathbb{N}$. Τότε, η $(x_{k_n}(i))_{n\geqslant i}$ είναι υπακολουθία της $(x_n(i))_{n\in M_i}$ (αφού $k_n \in M_n \subseteq M_i$ για $n \geqslant i$), άρα συγκλίνει κι αυτή στο $x(i)$.

(β) Έπεται άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα για $(X_n, \rho_n) \equiv ([-1,1], |\cdot|)$. (Το γεγονός ότι $|x-y| \leqslant 2$ αντί του 1 όπως στην υπόθεση του (α) δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο.)

6.35. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(G_i)_{i=1}^{n}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θέτουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \max\{\mathrm{dist}(x, X \setminus G_i) : i = 1, \ldots, n\}$ για $x \in X$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Για κάθε $x \in X$ ισχύει $f(x) > 0$.*

(β) *Η f είναι συνεχής.*

(γ) *Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) αποδείξτε το λήμμα του Lebesgue.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $1 \leqslant i \leqslant n$ ώστε $\mathrm{dist}(x, G_i^c) > 0$, οπότε

$$f(x) = \max\{\mathrm{dist}(x, G_i^c) : i = 1, \dots, n\} > 0.$$

Αυτό όμως έπεται άμεσα από το γεγονός ότι το $\{G_i : i = 1, \dots, n\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X. Πράγματι, αν $x \in X$ τότε υπάρχει $1 \leqslant i \leqslant n$ ώστε $x \in G_i$. Τότε, $x \notin G_i^c$ και το G_i^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα $\mathrm{dist}(x, G_i^c) > 0$.

(β) Παρατηρούμε ότι η f ορίζεται ως κατά σημείο maximum συνεχών συναρτήσεων. Αν δείξουμε ότι το κατά σημείο maximum δυο συνεχών πραγματικών συναρτήσεων είναι συνεχής, τότε επαγωγικά έχουμε το συμπέρασμα.

Ισχυρισμός. Έστω $f, g : (Y, \sigma) \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε, η συνάρτηση $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ είναι συνεχής.

Έστω $y_0 \in Y$ και $y_n \to y_0$. Υποθέτουμε ότι $f(y_0) > g(y_0)$ (εύκολα αντιμετωπίζεται η περίπτωση $f(y_0) = g(y_0)$). Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(f(y_0) - g(y_0))$. Αφού οι $(f(y_n))$, $(g(y_n))$ συγκλίνουν στα $f(y_0)$, $g(y_0)$ αντίστοιχα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$f(y_0) - \varepsilon < f(y_n) < f(y_0) + \varepsilon \quad , \quad g(y_0) - \varepsilon < g(y_n) < g(y_0) + \varepsilon.$$

Όμως, $g(y_0) + \varepsilon < f(y) - \varepsilon$, άρα για κάθε $n \geqslant n_0$ είναι $\max\{f(y_n), g(y_n)\} = f(y_n)$. Οπότε,

$$(f \vee g)(y_n) = \max\{f(y_n), g(y_n)\} \to f(y_0) = \max\{f(y_0), g(y_0)\} = (f \vee g)(y_0).$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) θα αποδείξουμε ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου έχει αριθμό Lebesgue.

Θεωρούμε ένα ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i \in I}$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (Y, ρ). Τότε, υπάρχουν $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ ώστε $Y = \bigcup_{j=1}^k V_{i_j}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \max\{\mathrm{dist}(y, V_{i_j}^c) : j = 1, \dots, k\}$. Από τα (α) και (β) έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γνήσια θετική. Καθώς ο Y είναι συμπαγής, συμπεραίνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη θετική τιμή. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(y) \geqslant \delta$ για κάθε $y \in Y$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το δ είναι ο ζητούμενος αριθμός Lebesgue του καλύμματος.

Ισχυρισμός. Για κάθε $A \subseteq Y$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$, υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant k$ ώστε $A \subseteq V_{i_j}$.

Αν το A είναι κενό δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το $A \neq \emptyset$ και έστω $a \in A$. Τότε, $f(a) \geqslant \delta$, δηλαδή υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant k$ ώστε $\mathrm{dist}(a, V_{i_j}^c) \geqslant \delta$. Δείχνουμε ότι $A \subseteq V_{i_j}$. Πράγματι, αν δεν συμβαίνει αυτό, υπάρχει $y \in A \setminus V_{i_j}$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(a, V_{i_j}^c) \leqslant \rho(a, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) < \delta$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

6.36. (α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $R : [0, 2\pi) \to S^1$, *με* $R(t) = (\cos t, \sin t)$, *όπου* $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ *ο μοναδιαίος κύκλος είναι συνεχής, 1-1 και επί. Είναι οι χώροι* $[0, 2\pi)$ *και* S^1 *ομοιομορφικοί;*

(β) *Εξετάστε αν οι χώροι* $([0, 2\pi], |\cdot|)$ *και* $(S^1, \|\cdot\|_2)$ *είναι ομοιομορφικοί.*

Υπόδειξη. (α) Η R είναι προφανώς συνεχής αφού κάθε συντεταγμένη της είναι συνεχής συνάρτηση.

Για το $1-1$: Έστω $(\cos t_1, \sin t_1) = (\cos t_2, \sin t_2)$ με $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$. Τότε,

$$\begin{cases} \sin t_1 = \sin t_2 & (1) \\ \cos t_1 = \cos t_2 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) παίρνουμε $t_1 - t_2 = 2k\pi$ ή $t_1 + t_2 = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή, $|t_1 - t_2| < 2\pi$ στην πρώτη περίπτωση έχουμε $k = 0$ ενώ στη δεύτερη $k = 0$ ή $k = 1$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι είτε $t_1 = t_2$ ή $t_1 + t_2 = \pi$ ή $t_1 + t_2 = 3\pi$. Από την (2) παίρνουμε $t_1 - t_2 = 2\lambda\pi$ ή $t_1 + t_2 = 2\lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Επειδή είναι $|t_1 - t_2| < 2\pi$, η πρώτη περίπτωση δίνει $\lambda = 0$ δηλαδή $t_1 = t_2$ ενώ η δεύτερη περίπτωση δίνει $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, δηλαδή $t_1 = t_2 = 0$ ή $t_1 + t_2 = 2\pi$. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση είναι $t_1 = t_2$ ή $t_1 + t_2 = 2\pi$. Βλέπουμε ότι η μόνη περίπτωση ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2) είναι $t_1 = t_2$, δηλαδή η R είναι 1-1.

Για το επί: Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Τότε $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $0 \leqslant y \leqslant 1$. Αφού $\sin([0, \pi/2]) = [0, 1]$, υπάρχει $t \in [0, \pi/2]$ ώστε $\sin t = y$. Τότε, $\cos t = |x|$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x \geqslant 0$ τότε $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. Αν $x \leqslant 0$ τότε $(x, y) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$ και $\pi - t \in [0, 2\pi)$.

- $-1 \leqslant y < 0$. Αφού $\sin((\pi, 3\pi/2]) = [-1, 0)$, υπάρχει $t \in (\pi, 3\pi/2]$ ώστε $\sin t = y$. Τότε $\cos t = -|x|$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x \geqslant 0$ τότε $(x, y) = (\cos(3\pi - t), \sin(3\pi - t))$ με $3\pi - t \in [0, 2\pi)$, ενώ αν $x \leqslant 0$ τότε $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση η R είναι επί.

Οι χώροι $[0, 2\pi), S^1$ δεν είναι ομοιομορφικοί αφού ο S^1 είναι συμπαγής ενώ ο $[0, 2\pi)$ όχι.

(β) Οι χώροι $[0, 2\pi], S^1$ δεν είναι ομοιομορφικοί.

1η Απόδειξη. Έστω $f : [0, 2\pi] \to S^1$ ομοιομορφισμός. Τότε, η $f|_{[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]} : [0, 2\pi] \setminus \{\pi\} \to S^1 \setminus \{f(\pi)\}$ είναι ομοιομορφισμός. Όμως, το $S^1 \setminus \{f(\pi)\}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$

(εξηγήστε γιατί) ενώ το $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$ δεν είναι (αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής) κι έχουμε αντίφαση.

2η Απόδειξη. Έστω $f : [0, 2\pi] \to S^1$ ομοιομορφισμός. Τότε, είτε $f(0) = R(\theta)$ για κάποιο $\theta \in (0, 2\pi)$ ή $f(2\pi) = R(\theta)$ για κάποιο $\theta \in (0, 2\pi)$, όπου R η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Υποθέτουμε ότι $f(0) = R(\theta)$ για κάποιο $\theta \in (0, 2\pi)$ (εντέλως ανάλογη είναι η άλλη περίπτωση). Έτσι, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(\theta - \delta, \theta + \delta) \subseteq (0, 2\pi)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : (\theta - \delta, \theta + \delta) \to [0, 2\pi]$ με $g(t) = f^{-1}(R(t))$, η οποία είναι συνεχής και 1-1 (ως σύνθεση τέτοιων). Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να είναι γνησίως μονότονη. Όμως, η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο. Αυτό είναι άτοπο.

6.37. (α) *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$\rho(f(x), f(y)) \geqslant \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι ισομετρία και επί.

(β) *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ 1-1, επί ώστε*

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι ισομετρία.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in X$. Θέτουμε $x_0 = x, y_0 = y$ και θεωρούμε τις ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά από τις $x_n = f(x_{n-1})$, $y_n = f(y_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι ισομετρία αρκεί να δείξουμε ότι $\rho(x_0, y_0) = \rho(x_1, y_1)$.

Αφού η (x_n) βρίσκεται στο συμπαγή μετρικό χώρο (X, ρ), έπεται ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(x_n)_{n \in M_1}$ να είναι συγκλίνουσα. Ομοίως, η ακολουθία $(y_n)_{n \in M_1}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο ώστε η $(y_n)_{n \in M_2}$ να είναι συγκλίνουσα. Έπεται ότι οι ακολουθίες $(x_n)_{n \in M_2}$ και $(y_n)_{n \in M_2}$ είναι βασικές.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι $(x_n)_{n \in M_2}$, $(y_n)_{n \in M_2}$ είναι βασικές, υπάρχουν $i \in M_2$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $i + k \in M_2$ με

$$\rho(x_i, x_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(y_i, y_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Από την ανισοτική σχέση που ικανοποιεί η f έχουμε ότι

$$\rho(x_0, x_k) \leqslant \rho(x_i, x_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(y_0, y_k) \leqslant \rho(y_i, y_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες ανισότητες, την ανισότητα για την f και την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_1, y_1) \leqslant \rho(x_k, y_k) < \varepsilon + \rho(x_0, y_0)$$

και επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε ότι $\rho(x_1, y_1) = \rho(x_0, y_0)$. Το επί έπεται από την Άσκηση 10(α).

(β) Αφού η f είναι $1-1$ και επί, ορίζεται η $f^{-1} : X \to X$ και ικανοποιεί την

$$\rho(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \geqslant \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Από το (α) έχουμε ότι η f^{-1} είναι ισομετρία, άρα η f είναι ισομετρία.

6.38. (α) *Έστω (E_n) ακολουθία ξένων ανά δυο διαστημάτων του $[0,1]$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

(β) *Έστω $\delta > 0$. Βρείτε ακολουθία (F_n) ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$ ώστε $\mathrm{diam}(F_n) \geqslant 1 - \delta$ για $n = 1, 2, \ldots$. Εξηγήστε που οφείλεται η διαφορά των αποτελεσμάτων (α) και (β).*

(γ) *Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων (F_n) του μοναδιαίου δίσκου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ώστε $\mathrm{diam}(F_n) \geqslant 2 - \varepsilon$ για $n = 1, 2, \ldots$.*

(δ) *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο και (B_n) ακολουθία από ξένες ανά δύο κλειστές μπάλες στο K. Δείξτε ότι $\mathrm{diam(B_n)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

(ε) *Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και B_n ακολουθία από ξένες ανά δύο μπάλες στον X. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\mathrm{diam}(B_n)\big) = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Αρχικά παρατηρούμε ότι αν I, J είναι ξένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathrm{diam}(I) + \mathrm{diam}(J) \leqslant \mathrm{diam}(I \cup J)$ και επαγωγικά δείχνουμε ότι αν $I_1, \ldots, I_k$ ξένα ανά δυο διαστήματα, τότε $\sum_{i=1}^k \mathrm{diam}(I_i) \leqslant \mathrm{diam}(\bigcup_{i=1}^k I_i)$. Οπότε για τα $\{E_n\}$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{diam}(E_i) \leqslant \mathrm{diam}(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leqslant \mathrm{diam}([0,1]) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απ' αυτό προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{diam}(E_n)$ συγκλίνει, άρα $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$.

(β) Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε $0 < a < b < 1$ ώστε $b - a > 1 - \delta$. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες στα $(0, a), (b, 1)$ αντίστοιχα, με διαφορετικούς ανά δύο όρους. Θέτουμε $F_n = \{a_n, b_n\}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, τα $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι τα ζητούμενα σύνολα.

Η διαφορά οφείλεται στο ότι τα σύνολα $\{F_n\}$ αποτελούνται από μεμονωμένα σημεία, ενώ τα διαστήματα είναι «συνεχή» σύνολα και για να έχουμε «πολλά» μέσα στο $[0,1]$ πρέπει να μικραίνουν τα μήκη τους.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \sqrt{\varepsilon/2}$. Ορίζουμε $F_n = \{(x, y) : x = \frac{1}{n+k}\} \cap D$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, τα $\{F_n\}$ είναι ξένα ανά δυο και ικανοποιούν την

$$\mathrm{diam}(F_n) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{(n+k)^2}} \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{(n+k)^2}\right) > 2 - \varepsilon.$$

(δ) Αν B_1, B_2 είναι ξένες μπάλες στον $\mathbb{R}^d$ τότε $V(B_1) + V(B_2) = V(B_1 \cup B_2)$, όπου $V(\cdot)$ ο d–διάστατος όγκος. Επαγωγικά λοιπόν έχουμε $\sum_{i=1}^n V(B_i) = V(\bigcup_{i=1}^n B_i)$. Αφού το K είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ ώστε $K \subseteq [-M, M]^d$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} V(B_i) \leqslant (2M)^d.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $V(B_n) \to 0$, άρα $\mathrm{diam}(B_n) \to 0$ (παρατηρήστε ότι αφού ο όγκος τείνει στο μηδέν η ακολουθία των ακτίνων τείνει στο μηδέν).

(ε) Έστω $B_n = B(x_n, r_n)$. Θα δείξουμε ότι $r_n \to 0$, οπότε το συμπέρασμα έπεται αν παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{diam}(B_n) \leqslant 2r_n$. Αν $r_n \not\to 0$, υπάρχουν $\delta > 0$ και υπακολουθία (r_{k_n}) της (r_n) ώστε $r_{k_n} \geqslant \delta$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, ισχύει $\rho(x_{k_n}, x_{k_m}) \geqslant \delta$ για $n \neq m$ (αν ήταν $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) < \delta$ τότε $x_{k_m} \in B(x_{k_n}, \delta)$, άρα $B_{k_n} \cap B_{k_m} \neq \emptyset$). Συμπεραίνουμε ότι η (x_{k_n}) δεν έχει καμιά βασική υπακολουθία κι αυτό αντίκειται στην υπόθεση ότι ο X είναι ολικά φραγμένος.

6.39. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται δ-διαχωρισμένο αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ ισχύει $\rho(x, y) \geqslant \delta$.*

(α) *Δείξτε ότι αν κάθε δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο και αν το $A \subseteq X$ είναι δ-διαχωρισμένο, τότε υπάρχει $B \subseteq X$ μεγιστικό δ-διαχωρισμένο ώστε $A \subseteq B$.*

(β) *Δείξτε ότι αν κάθε δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο, τότε ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. (α) Έστω A ένα δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Αυτό θα είναι πεπερασμένο. Θεωρούμε το σύνολο $A_1 = \{x \in X : \forall\ a \in A,\ \rho(x, a) \geqslant \delta\}$. Αν αυτό είναι κενό τότε θέτουμε $B = A$ κι έχουμε ότι $A \subseteq B$ και ότι το B είναι μεγιστικό δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Πράγματι: αν το B είναι γνήσιο υποσύνολο του S και S είναι δ–διαχωρισμένο, τότε υπάρχει $s \in S \setminus B$ ώστε $\rho(s, b) \geqslant \delta$ για κάθε $b \in B$, άτοπο αφού $A_1 = \emptyset$. Αν $A_1 \neq \emptyset$ τότε επιλέγουμε $a_1 \in A_1$ και θέτουμε $B_1 = A \cup \{a_1\}$. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο $A_2 = \{x \in X : \rho(x, b) \geqslant \delta\ \forall\ b \in B_1\}$. Αν $A_2 = \emptyset$ τότε το B_1 είναι το ζητούμενο σύνολο. Αν όχι, επιλέγουμε $a_2 \in A_2$ και θεωρούμε το σύνολο $B_2 = B_1 \cup \{a_2\}$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα παίρνουμε ένα σύνολο B_n ώστε το $A_{n+1} = \{x \in X : \rho(x, b) \geqslant \delta\ \forall\ b \in B_n\}$ να είναι κενό (διαφορετικά θα κατασκευάζαμε μια άπειρη ακολουθία (a_n) στοιχείων του X με $\rho(a_n, a_m) \geqslant \delta$ για $n \neq m$ κι αυτό είναι άτοπο εφόσον τα δ–διαχωρισμένα υποσύνολα του X έχουν πεπερασμένο πληθάριθμο). Τότε, το B_n είναι το ζητούμενο σύνολο: είναι μεγιστικό και περιέχει το A.

(β) Έστω ότι $X \neq \emptyset$. Έστω S_1 ένα μεγιστικό 1–διαχωρισμένο υποσύνολο του X (αυτό μας το εξασφαλίζει το προηγούμενο ερώτημα για A κάποιο μονοσύνολο). Αφού το S_1 είναι μεγιστικό, ισχύει $X = \bigcup_{x\in S_1} B(x,1)$. Έστω S_2 ένα μεγιστικό $1/2$–διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Τότε, $X = \bigcup_{x\in S_2} B(x,1/2)$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ακολουθία (S_n) διαχωρισμένων συνόλων ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει:

- Το S_n είναι πεπερασμένο.
- Το S_n είναι μεγιστικό $1/n$–διαχωρισμένο υποσύνολο του X, άρα $X = \bigcup_{x\in S_n} B(x,1/n)$.

Αν θέσουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων και πυκνό. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ και $x_0 \in X$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \varepsilon$ και $X = \bigcup_{x\in S_n} B(x,1/n)$. Άρα, υπάρχει $x \in S_n$ ώστε $x_0 \in B(x,1/n)$. Τότε, $x \in B(x_0,\varepsilon)$ απ' όπου έπεται ότι $S_n \cap B(x_0,\varepsilon) \neq \emptyset$. Άρα, $D \cap B(x_0,\varepsilon) \neq \emptyset$.

6.40. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι ολικά φραγμένος.*

(β) *Κάθε δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Αν υπάρχει άπειρο δ–διαχωρισμένο $A \subseteq X$ τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\rho(a_n,a_m) \geqslant \delta$ για κάθε $n \neq m$. Τότε, η (a_n) δεν έχει καμιά βασική υπακολουθία, άρα ο X δεν είναι ολικά φραγμένος.

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω $\varepsilon > 0$. Από την προηγούμενη άσκηση υπάρχει πεπερασμένο μεγιστικό ε–διαχωρισμένο υποσύνολο S. Τότε, $X = \bigcup_{x\in S} B(x,\varepsilon)$, άρα ο X είναι ολικά φραγμένος.

6.41. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X αν το $\overline{A}$ είναι είναι συμπαγές υποσύνολο του X.*

(α) *Αποδείξτε ότι το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (όχι κατ' ανάγκην μέσα στο A).*

(β) *Έστω (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι η f απεικονίζει σχετικά συμπαγή υποσύνολα του X σε σχετικά συμπαγή υποσύνολα του Y.*

(γ) *Αποδείξτε ότι κάθε σχετικά συμπαγές υποσύνολο είναι ολικά φραγμένο. Ισχύει το αντίστροφο;*

Υπόδειξη. (α) Έστω (a_n) ακολουθία στοιχείων του A. Τότε, η (a_n) περιέχεται στο συμπαγές $\overline{A}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (στο $\overline{A}$).

Αντίστροφα: έστω (x_n) ακολουθία στο $\overline{A}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n \in A$ ώστε $\rho(x_n,a_n) < 1/n$. Η (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A, άρα από την υπόθεση έπεται ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Υπάρχουν λοιπόν $x \in \overline{A}$ (εξηγήστε γιατί) και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to x$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\rho(x_{k_n},x) \leqslant \rho(x_{k_n},a_{k_n}) + \rho(a_{k_n},x) < \frac{1}{k_n} + \rho(a_{k_n},x).$$

Συμπεραίνουμε ότι $x_{k_n} \to x$ με $x \in \overline{A}$. Συνεπώς, το $\overline{A}$ είναι ακολουθιακά συμπαγές, άρα συμπαγές.

(β) Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(A)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $y_n = f(x_n)$. Η (x_n) περιέχεται στο σχετικά συμπαγές A. Άρα, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Τότε, η (y_{k_n}) είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της (y_n). (Θυμηθείτε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις απεικονίζουν συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες ακολουθίες). Άρα, το $f(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.

(γ) Έστω A σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο, οπότε το A είναι ολικά φραγμένο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα: αν θεωρήσουμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ και $A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant q \leqslant 1\}$ τότε το A είναι ολικά φραγμένο, αλλά δεν είναι σχετικά συμπαγές, αφού $A = \overline{A}$ και το A δεν είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το ακόλουθο: Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $((0,1), |\cdot|)$ και το $A = (0, 1/2]$. Το A είναι ολικά φραγμένο (στον $(0,1)$) αλλά δεν είναι σχετικά συμπαγές αφού $A = \overline{A}$ και το A δεν είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Παρατηρήστε ότι και στις δυο περιπτώσεις ο μετρικός χώρος που θεωρούμε δεν είναι πλήρης (σε έναν πλήρη μετρικό χώρο δε μπορεί να συμβαίνει αυτό σύμφωνα με την Άσκηση 21(α)).

6.42. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.*

Υπόδειξη. Αν ο (X, d) είναι συμπαγής τότε γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Για το αντίστροφο, αν υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ να μην έχει σημεία συσσώρευσης. Άρα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε οι κλειστές μπάλες $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)}$ να είναι ξένες (βρίσκουμε πρώτα $\delta_n > 0$ ώστε $B(x_n, \delta_n) \cap (A \setminus \{x_n\}) = \emptyset$ και κατόπιν θέτουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{3} \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ - εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{d(x, x_n)}{\varepsilon_n}\right) \chi_{B(x_n, \varepsilon_n)}(x).$$

Τότε, η f είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και $f(x_n) = n \to \infty$, άρα η f δεν είναι φραγμένη.

Κεφάλαιο 7

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

Ομάδα Α΄

7.1. *Έστω* $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $t \in [0,1]$. *Δείξτε ότι η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση* f *στο* $[0,1]$. *Ποιά είναι η* f*;*

Υπόδειξη. Αν $t = 0$ τότε $f_n(0) = 1 \to 1$ όταν $n \to \infty$. Για κάθε $t \in (0,1]$ έχουμε

$$f_n(t) = \frac{1}{1+nt} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\frac{1}{n}+t} \to 0.$$

Συνεπώς, η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \in (0,1] \end{cases}$$

Η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 0$ ενώ όλες οι f_n είναι συνεχείς. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άλλος τρόπος για να αιτιολογήσουμε τον τελευταίο ισχυρισμό: παρατηρούμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \geqslant |f_n(1/n) - f(1/n)| = f_n(1/n) = 1/2$. Άρα, $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

7.2. *Έστω* $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση* f *στο* $\mathbb{R}$. *Ποιά είναι η* f*;*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι:

(i) Αν $|t| < 1$ τότε $t^{2n} \to 0$, άρα $f_n(t) \to \frac{0}{1+0} = 0$.

(ii) Αν $|t| = 1$ τότε $t^{2n} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f_n(t) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

(iii) Αν $|t| > 1$ τότε $t^{-2n} \to 0$, άρα $f_n(t) = \frac{1}{t^{-2n}+1} \to \frac{1}{0+1} = 1$.

Συνεπώς, η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1 \\ 1, & |t| > 1 \end{cases}$$

Η f είναι ασυνεχής στα σημεία $t_1 = 1$ και $t_2 = -1$, ενώ όλες οι f_n είναι συνεχείς. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

7.3. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < t \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $t \leqslant 0$ τότε $f_n(t) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

(ii) Αν $t > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < t$. Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $t \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, απ¨ όπου έπεται ότι η $(f_n(t))$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 0. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leqslant 1$ διότι $\sin^2(\pi/t) \leqslant 1$ και ισχύει ισότητα διότι, αν θέσουμε $t_n = \frac{2}{2n+1}$ τότε $t_n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ και $\|f_n\|_\infty \geqslant |f_n(t_n)| = \sin^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Αφού $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

7.4. *Έστω $f_n(t) = n^p t(1-t^2)^n$, $t \in [0,1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0,1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $t = 0$ ή $t = 1$ τότε $f_n(t) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

(ii) Αν $0 < t < 1$ τότε $0 < 1 - t^2 < 1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} n^p t(1-t^2)^n = 0$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geqslant 0$. Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= n^p(1-t^2)^n - n^p tn(1-t^2)^{n-1}(2t) \\ &= n^p(1-t^2)^{n-1}[1 - t^2 - 2nt^2] = n^p(1-t^2)^{n-1}[1-(2n+1)t^2]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Παρατηρούμε ότι $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \to \frac{1}{\sqrt{e}}$. Συνεπώς,

(i) Αν $0 < p < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to 0$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to 0$.

(ii) Αν $p > \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to +\infty$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to +\infty$.

(iii) Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to \frac{1}{\sqrt{2e}} > 0$.

Έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα (δηλαδή, $\|f_n - 0\|_\infty \to 0$) αν και μόνο αν $0 < p < \frac{1}{2}$.

Για το τελευταίο ερώτημα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f_n (για κάθε τιμή της παραμέτρου p): θέτοντας $y = 1 - t^2$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 n^p t(1-t^2)^n dt = \int_0^1 \frac{n^p}{2} y^n dy = \frac{n^p}{2}\int_0^1 y^n dy = \frac{n^p}{2(n+1)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{n^p}{2(n+1)} \to 0$ αν και μόνο αν $0 < p < 1$. Άρα, $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$ αν $0 < p < 1$.

7.5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων*

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \delta$, άρα

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

7.6. *Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει απολύτως. Δείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^\infty a_k \sin(kt)$ και $\sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kt)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass: αν $f_k(t) = a_k \sin(kt)$ τότε

$$|f_k(t)| = |a_k \sin(kt)| \leqslant |a_k|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Για την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ δουλεύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

7.7. *Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$. Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, \infty)$ ή $(-\infty, -A]$, όπου $A > 0$.*

Υπόδειξη. Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$. Αν $x \neq 0$ τότε

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

Έστω $A > 0$. Αν $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2x^2}$ τότε, για κάθε $x \in [A, \infty)$,

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2k^2} \leqslant \frac{1}{A^2k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{A^2k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A, \infty)$. Όμοια για το διάστημα $(-\infty, -A]$.

7.8. *Έστω $\alpha > 1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$f_k'(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}.$$

Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0, \infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Αφού η f_k είναι περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι

$$\|f_k\|_{\infty} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Από την υπόθεση για το α έχουμε $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, άρα η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

7.9. (α) *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.*

(β) *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{1}{n}$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι *ασυνεχής σε κάθε* $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, άρα $f_n \to f \equiv 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (και η $f \equiv 0$ είναι συνεχής συνάρτηση).

(β) Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ του $[a,b] \cap \mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \ldots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1, \ldots, q_n$, άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Επίσης, $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, όπου $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς (παρατηρήστε ότι: αν $x = q_m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geqslant m$, άρα $f_n(x) \to 1 = f(x)$). Τέλος, η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη (κάθε άνω άθροισμα της f είναι ίσο με $b-a$ και κάθε κάτω άθροισμα της f είναι ίσο με 0).

7.10. (α) *Έστω X σύνολο, $f_n : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο X.*

(β) *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ για $n = 1, 2, \ldots$ Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\big|\, |f_n(x)| - |f(x)| \,\big| \leqslant |f_n(x) - f(x)|$$

για κάθε $x \in X$, άρα

$$\|\, |f_n| - |f| \,\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Άρα, $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο X.

(β) Παρατηρούμε ότι $f_{2n}(x) = 1 + \frac{x}{n} \to 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f_{2n-1}(x) = -\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to -1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς, η $(f_n(x))$ αποκλίνει για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως,

$$|f_n(x)| = 1 + \frac{x}{n} \to f(x) = 1$$

στο $[0,1]$ και

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Δηλαδή, $|f_n| \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7.11. *Έστω X σύνολο, $f_n, g_n, f, g : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.*

Υπόδειξη. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f\|_\infty \leqslant M$ και $\|g\|_\infty \leqslant M$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < 1$, και άρα, $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + M$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &\leqslant \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|g(f_n - f)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \\ &\leqslant (1 + M)\|g_n - g\|_\infty + M\|f_n - f\|_\infty \to 0,\end{aligned}$$

δηλαδή $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.

7.12. *Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και ορίζουμε $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $f_n \to f$ ομοιόμορφα (έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Επίσης, ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{1}{n}$. Τότε, $g_n \to 0$ ομοιόμορφα, διότι $\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$.

Όμως, για την ακολουθία των συναρτήσεων $(f_n g_n)(x) = \frac{x}{n}$ έχουμε $f_n g_n \to 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα, αφού $\|f_n g_n - 0\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty$.

7.13. *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f : X \to Y$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup\{\rho(f_{n_0}(x), f(x)) : x \in X\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$,

$$\rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$, γράφουμε

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leqslant \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7.14. *Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X και κάθε f_n είναι φραγμένη στο X, τότε η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο X.*

Υπόδειξη. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geqslant n_0$, $\|f_m - f_n\|_\infty < 1$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty < 1 + \|f_{n_0}\|_\infty.$$

Κάθε f_n είναι φραγμένη, αν λοιπόν ορίσουμε

$$M = \max\{\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty, \dots, \|f_{n_0-1}\|_\infty, 1 + \|f_{n_0}\|_\infty\} < +\infty,$$

τότε $\|f_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλάδή, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

7.15. *Έστω $f, f_n : (X, \rho) \to [a, b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.*

Υπόδειξη. Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $t, s \in [a, b]$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|g(t) - g(s)| < \varepsilon$.

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \delta$. Τότε, θέτοντας $t = f_n(x)$ και $s = f(x)$ στην προηγούμενη σχέση, συμπεραίνουμε ότι: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$.

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| < \varepsilon$. Άρα, $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.

7.16. *Έστω $\delta > 0$ και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \geqslant \delta$ για κάθε $x \in X$ και $n = 1, 2, \dots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, δείξτε ότι:*

(α) *$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$.*

(β) *$\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάθε $x \in X$ έχουμε $f_n(x) \to f(x)$. Από την $|f_n(x)| \geqslant \delta$, $n \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \geqslant \delta.$$

Ειδικότερα, $f(x) \neq 0$.

(β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in X$,

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)|\,|f(x)|} \leqslant \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\delta^2}.$$

Άρα,

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{\delta^2}\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Δηλαδή, $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X.

Ομάδα Β΄

7.17. *Έστω $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει f ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n'(t) \to f'(t)$ αν $t \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\to f'(0)$. Για ποιά διαστήματα $[a,b]$ ισχύει ότι $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$;*

Υπόδειξη. (α) Αν $t = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $t \neq 0$ τότε $1 + nt^2 \to +\infty$, άρα $f_n(t) \to 0$. Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο.

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση εξετάζουμε αν

$$\|f_n\|_\infty = \sup\left\{\frac{|t|}{1+nt^2} : t \in \mathbb{R}\right\} = \sup\left\{\frac{t}{1+nt^2} : t \geqslant 0\right\} \to 0.$$

Μελετάμε την $|f_n| = f_n$ στο $[0,\infty)$. Έχουμε

$$f_n'(t) = \frac{1+nt^2-2nt^2}{(1+nt^2)^2} = \frac{1-nt^2}{(1+nt^2)^2},$$

δηλαδή η $|f_n|$ παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $1/\sqrt{n}$:

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ ομοιόμορφα.

(β) Εξετάζουμε τώρα τη σύγκλιση της (f_n'): αν $t = 0$ τότε $f_n'(0) = 1 \to 1$. Αν $t \neq 0$ τότε

$$f_n'(t) = \frac{1-nt^2}{1+2nt^2+n^2t^4} \to 0,$$

διότι ο βαθμός του παρονομαστή (ως προς n) είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή. Αφού $f' \equiv 0$, η f_n' δεν συγκλίνει στην f' στο σημείο 0. Ειδικότερα, η (f_n') δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f' \equiv 0$ σε κανένα διάστημα $[a,b]$ το οποίο περιέχει το 0.

Έστω τώρα διάστημα $[a,b]$ το οποίο δεν περιέχει το 0. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $0<a<b$: έχουμε

$$|f_n'(t)| = \frac{|1-nt^2|}{(1+nt^2)^2} \leqslant \frac{1+nt^2}{(1+nt^2)^2} = \frac{1}{1+nt^2} \leqslant \frac{1}{1+na^2},$$

άρα

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n'(t)| \leqslant \frac{1}{1+na^2} \to 0.$$

Άρα, $f_n' \to f' \equiv 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Το ίδιο ισχύει αν $a<b<0$ (εξηγήστε γιατί).

7.18. *Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}$, $t\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n\to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $f_n'\to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f_n' δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο δεν περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ έχουμε $e^{n^2t^2}\geqslant 1$, άρα $0\leqslant f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}\leqslant \frac{1}{n}$, με ισότητα αν $t=0$. Συνεπώς, $f_n(t)\to 0$ κατά σημείο, και μάλιστα,

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0,$$

άρα $f_n\to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $t\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$|f_n'(t)| = 2|t|ne^{-n^2t^2} \to 0$$

διότι $e^{n^2t^2}\geqslant 1+n^2t^2$ άρα $|f_n'(t)| < \frac{2|t|n}{1+n^2t^2}\to 0$. Δηλαδή, $f_n'\to f'\equiv 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

(α) Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που δεν περιέχει το 0. Εξετάζουμε την περίπτωση $0<a<b$: παρατηρούμε ότι, για κάθε $t\in[a,b]$,

$$|f_n'(t)| = 2tne^{-n^2t^2} \leqslant 2bne^{-n^2a^2}.$$

Συνεπώς,

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t)| \leqslant 2bne^{-n^2a^2} < \frac{2bn}{n^2a^2} = \frac{2b}{a^2n} \to 0.$$

Έπεται ότι $f_n'\to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ (η περίπτωση $a<b<0$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο).

(β) Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχει το 0. Για μεγάλα n, τουλάχιστον ένας από τους $\pm\frac{1}{n}$ θα ανήκει στο $[a,b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n'(t)| \geqslant |f_n'(\pm 1/n)| = 2\frac{1}{n}ne^{-n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{e}.$$

Αυτό δείχνει ότι $f_n' \not\to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

7.19. *Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων* $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *με*

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

συγκλίνει κατά σημείο, και βρείτε την οριακή συνάρτηση.

Υπόδειξη. Αν $x = 0$ τότε $f_1(0) = 0$ και αν $f_k(0) = 0$ τότε $f_{k+1}(0) = \sqrt{0 + f_k(0)} = 0$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f_n(0) \to 0$.

Έστω $x > 0$. Ελέγχουμε πρώτα με επαγωγή ότι $f_n(x) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $f_1(x) = \sqrt{x} < \sqrt{x + \sqrt{x}} = f_2(x)$ και αν $f_k(x) < f_{k+1}(x)$ τότε $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + f_k(x)} < \sqrt{x + f_{k+1}(x)} = f_{k+2}(x)$. Έπεται ότι η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι γνησίως αύξουσα.

Δείχνουμε ότι η $(f_n(x))$ είναι άνω φραγμένη διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $0 < x < 2$ τότε $f_n(x) < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διότι $f_1(x) = \sqrt{x} < \sqrt{2} < 2$ και αν $f_k(x) < 2$ τότε $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + f_k(x)} < \sqrt{2+2} = 2$.

(ii) Αν $x \geqslant 2$ τότε $f_n(x) < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διότι $f_1(x) = \sqrt{x} < x$ και αν $f_k(x) < x$ τότε $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + f_k(x)} < \sqrt{x + x} = \sqrt{2x} \leqslant \sqrt{x^2} = x$.

Σε κάθε περίπτωση, η $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιο $y = y_x \in \mathbb{R}$. Επιστρέφοντας στην αναδρομική σχέση $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$ και αφήνοντας το $n \to \infty$, παίρνουμε $y = \sqrt{y + x}$ δηλαδή $y^2 - y - x = 0$. Αφού το y είναι θετικό, έχουμε $y = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Δηλαδή, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

7.20. *Έστω* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση* f*. Δείξτε ότι η* f *είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση: έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ διότι η f_n είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y).$$

Από την υπόθεση, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| < \delta$ τότε

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{m} < \delta$ και χωρίζουμε το $[a,b]$ σε m ίσα διαδοχικά διαστήματα, με τα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_m = b$$

όπου $x_k = a + \frac{k(b-a)}{m}$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Αφού $f_n \to f$ κατά σημείο, έχουμε $f_n(x_k) \to f(x_k)$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$,

$$|f(x_k) - f_n(x_k)| < \varepsilon.$$

Έστω $x \in [a,b]$ και $n \geqslant n_0$. Υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ώστε $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία των f, f_n παρατηρούμε ότι

$$f(x) - f_n(x) \leqslant f(x_{k+1}) - f_n(x_k) = [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + [f(x_k) - f_n(x_k)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

και

$$f(x) - f_n(x) \geqslant f(x_k) - f_n(x_{k+1}) = [f(x_k) - f(x_{k+1})] + [f(x_{k+1}) - f_n(x_{k+1})] > -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon.$$

Άρα,

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

7.21. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι*

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\, dt \to \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

Υπόδειξη. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ειδικότερα, $\|f\|_\infty < +\infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(t)-f_n(t))\,dt\right| \\
&\leqslant \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f(t)|\,dt + \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(t)-f_n(t)|\,dt \\
&\leqslant \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \|f\|_\infty dt + \int_0^{1-\frac{1}{n}} \|f-f_n\|_\infty dt \\
&\leqslant \frac{1}{n}\|f\|_\infty + \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f-f_n\|_\infty \\
&\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n} + \|f-f_n\|_\infty \to 0,
\end{aligned}$$

διότι $\|f-f_n\|_\infty \to 0$ αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο, το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα αν

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x-\frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο, όμως,

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

7.22. *Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^{nx}.$$

Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

Υπόδειξη. Αν $x=0$ τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leqslant 1$ τότε $0 \leqslant (1-x)^x < 1$, άρα

$$n^2x(1-x)^{nx} = xn^2[(1-x)^x]^n \to 0.$$

Συνεπώς, $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $[0,1]$.

Για το ολοκλήρωμα της f_n παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto (1-x)^x$ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$, άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 n^2x(1-x)^{nx}dx \geqslant \int_{\frac{1}{2\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2x(1-x)^{nx}dx \\ &\geqslant \int_{\frac{1}{2\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\frac{1}{\sqrt{n}}}dx = \frac{n^2}{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{4e} \to +\infty.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση της (f_n) στην $f \equiv 0$ δεν είναι ομοιόμορφη: θα είχαμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

ενώ τα ολοκληρώματα αριστερά τείνουν στο $+\infty$. Ένας άλλος τρόπος για να το δούμε, είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$\|f_n\|_\infty \geqslant f_n(1/n) = n^2\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\frac{1}{n}} = n-1 \to +\infty.$$

7.23. *Ορίζουμε* $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ *θέτοντας* $f_1(x) = \sin x$ *και*

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)). \quad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε την (f_n) *ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.*

Υπόδειξη. Επαγωγικά δείχνουμε ότι κάθε f_n είναι αύξουσα και παίρνει τιμές στο $[0,1]$. Επίσης, για κάθε $x \in [0,\pi/2]$ ισχύει

$$(*) \qquad 0 \leqslant f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \leqslant f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

διότι $\sin t \leqslant t$ αν $t \in [0,\pi/2]$.

Η $(*)$ δείχνει ότι, για κάθε $x \in [0,\pi/2]$, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, άρα συγκλίνει σε κάποιον $\ell_x \geqslant 0$. Επιπλέον,

$$\ell_x = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}\sin(f_n(x)) = \sin\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \sin\ell_x,$$

άρα $\ell_x = 0$ (η εξίσωση $\sin t = t$ έχει μοναδική ρίζα την $t = 0$). Δηλαδή, $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Για να εξετάσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση, παρατηρούμε ότι κάθε f_n είναι μη αρνητική και αύξουσα, άρα

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,\pi/2]} f_n(x) = f_n(\pi/2) \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi/2]$.

7.24. *Δείξτε ότι η* $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ *συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο* $[0,1]$. *Αντιθέτως, δείξτε ότι η* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ *συγκλινει ομοιόμορφα στο* $[0,1]$.

Υπόδειξη. (α) Για την $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$: υπολογίζουμε τα μερικά αθροίσματα: αν $x=1$ τότε $s_n(1)=0$, ενώ αν $0\leqslant x<1$ έχουμε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1} \to 1.$$

Άρα, $s_n(x)\to s(x)$, όπου $s(x)=0$ αν $x=1$ και $s(x)=1$ αν $0\leqslant x<1$. Η s είναι ασυνεχής στο σημείο $x=1$, άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(β) Για την $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$: όπως πριν,

$$s_n(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = (1-x)\frac{1-(-1)^{k+1}x^{n+1}}{1+x}.$$

Αν $0\leqslant x<1$ τότε $x^{n+1}\to 0$, άρα $s_n(x)\to \frac{1-x}{1+x}$. Αν $x=1$ τότε $s_n(1)=0\to 0=\frac{1-1}{1+1}$. Συνεπώς, $s_n\to s$ κατά σημείο, όπου $s:[0,1]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)(-1)^k x^k = \frac{1-x}{1+x}.$$

Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left|s_n(x)-\frac{1-x}{1+x}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}(-1)^n x^{n+1}\right| = \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1+x} \leqslant x^{n+1}-x^{n+2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x\mapsto x^{n+1}-x^{n+2}$ (στο $[0,1]$) παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n+1}{n+2}$, η οποία είναι ίση με

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left[1-\frac{n+1}{n+2}\right] < \frac{1}{n+2}.$$

Συνεπώς,

$$\|s_n-s\|_\infty \leqslant \max_{x\in[0,1]}(x^{n+1}-x^{n+2}) < \frac{1}{n+2} \to 0.$$

Έπεται ότι η σειρά $\frac{1-x}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7.25. *Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A,A]$, $A>0$.

Υπόδειξη. Έστω $A>0$. Γράφουμε $\sin\left(1+\frac{x}{k}\right) = \sin 1\cdot\cos(x/k)+\cos 1\cdot\sin(x/k)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

(α) Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$|f_k(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leqslant \frac{|x|}{k^{3/2}} \leqslant \frac{A}{k^{3/2}}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{k^{3/2}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

(β) Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k}}\left|1-\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{k}}\sin^2\left(\frac{x}{2k}\right) \leqslant \frac{x^2}{2k^{5/2}} \leqslant \frac{A^2}{2k^{5/2}}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^2}{2k^{5/2}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass, η $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$. Από την άλλη πλευρά, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει (από το κριτήριο του Leibniz) άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σαν σειρά (σταθερών!) συναρτήσεων στο $[-A,A]$. Προσθέτοντας, συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(1+\frac{x}{k}\right) = \sin 1\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{k}\right) + \cos 1\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

7.26. *Δείξτε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής* $[-A,A]$, $A>0$, *αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του* x.

Υπόδειξη. Έστω $A > 0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$ αν την δούμε σαν σειρά (σταθερών) συναρτήσεων.

Αν ορίσουμε $f_k(x) = (-1)^k\frac{x^2}{k^2}$, τότε

$$|f_k(x)| = \frac{x^2}{k^2} \leqslant \frac{A^2}{k^2}$$

στο $[-A, A]$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^2}{k^2}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$. Προσθέτοντας βλέπουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{k^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$.

Για την απόλυτη σύγκλιση παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2+k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$ δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

7.27. *Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη. Έστω $0 < x < 1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, ελέγχουμε εύκολα ότι οι σειρές $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ και $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2k+2}$ συγκλίνουν. Το ίδιο ισχύει, προφανώς, αν $x = 0$. Άρα, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει για κάθε $0 \leqslant x < 1$. Στην περίπτωση $x = 1$ έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 < +\infty.$$

Δηλαδή, η $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$$

είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Γνωρίζουμε ότι: αν $|x| < 1$ τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in [0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{2k+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{2(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x).
\end{aligned}$$

Αφού $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$ στο $[0,1)$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$, θα πρέπει να ισχύει

$$f(1) = \frac{\ln 2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Είναι όμως γνωστό ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,$$

απ¨ όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

7.28. *Ορίζουμε $I(x) = 0$ αν $x \leqslant 0$ και $I(x) = 1$ αν $x > 0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a,b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Δείξτε ότι η*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a,b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a,b) \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Υπόδειξη. Αν θέσουμε $f_k(x) = c_k I(x - x_k)$ τότε $\|f_k\|_\infty = |c_k|$. Από την υπόθεση έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty$ και, από το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a,b).

Θέτουμε $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Αν $x_0 \notin A$ δείχνουμε ότι κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0: διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x_0 < x_k$ και $x_0 > x_k$. Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_0 + \delta < x_k$, και άρα, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f_k(x) = c_k I(x - x_k) = 0$. Αφού η f_k είναι σταθερή σε μια περιοχή του x_0, είναι συνεχής στο x_0. Όμοια, στη δεύτερη περίπτωση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_k < x_0 - \delta$, και άρα, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f_k(x) = c_k I(x - x_k) = c_k$. Αφού η f_k είναι σταθερή σε μια περιοχή του x_0, είναι συνεχής στο x_0. Τώρα, η $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού $s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ομοιόμορφα στο (a, b), η $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$ είναι συνεχής στο x_0.

7.29. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$, $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Έστω t_0 σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:*

α. *Η (x_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και*

β. $\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{n\to\infty} x_n$. *Δηλαδή,*

$$\lim_{t\to t_0} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to t_0} f_n(t).$$

Υπόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$, οπότε συγκλίνει. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η (f_n) ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geqslant n_0$ και για κάθε $t \in A$,

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έστω $n, m \geqslant n_0$. Αφού $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = x_n$, υπάρχει $\delta_n > 0$ ώστε: αν $t \in A$ και $0 < \rho(t, t_0) < \delta_n$ τότε $|f_n(t) - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Όμοια, αφού $\lim_{t\to t_0} f_m(t) = x_m$, υπάρχει $\delta_m > 0$ ώστε: αν $t \in A$ και $0 < \rho(t, t_0) < \delta_m$ τότε $|f_m(t) - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. Το t_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, άρα υπάρχει $t \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \rho(t, t_0) < \min\{\delta_n, \delta_m\}$. Τότε,

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - f_n(t)| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - x_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

(β) Από το (α) υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_1$, $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_2$ και για κάθε $t \in A$, $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Θεωρούμε τυχόν $n > \max\{n_1, n_2\}$. Αφού $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = x_n$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $t \in A$ και $0 < \rho(t,t_0) < \delta$, τότε $|f_n(t) - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς, για κάθε $t \in A$ με $0 < \rho(t,t_0) < \delta$ έχουμε

$$|f(t) - x| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - x_n| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t\to t_0} f(t) = x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

7.30. *Έστω $f_n(t) = t^n$ στο $[0,1]$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η (gf_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι συνεχής στο σημείο $t_0 = 1$, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $t \in [1-\delta, 1]$ τότε $|g(t)| = |g(t) - g(1)| < \varepsilon$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $|g(t)| \leqslant M$. Επίσης, $(1-\delta)^n \to 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$M(1-\delta)^n < \varepsilon.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $\|gf_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι $gf_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Έστω $n \geqslant n_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $0 \leqslant t \leqslant 1-\delta$ τότε $|g(t)f_n(t)| \leqslant Mt^n \leqslant M(1-\delta)^n < \varepsilon$.

(ii) Αν $1-\delta \leqslant t \leqslant 1$ τότε $|g(t)f_n(t)| = |g(t)|\, t^n \leqslant |g(t)| < \varepsilon$.

Έπεται ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\|gf_n\|_\infty = \sup\{|g(t)f_n(t)| : t \in [0,1]\} \leqslant \varepsilon.$$

7.31. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ με*

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}),\ x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(α) *Η (f_n) είναι φθίνουσα και $f_n \to 0$ κατά σημείο.*

(β) *$f_n \to 0$ ομοιόμορφα στον X αν και μόνον αν ο X είναι ολικά φραγμένος.*

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $D_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Έστω $x \in X$. Αφού $D_n \subseteq D_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, D_n) \geqslant \mathrm{dist}(x, D_{n+1}) = f_{n+1}(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(f_n(x))$ είναι φθίνουσα. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ ώστε $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n_0}(x) = \mathrm{dist}(x, D_{n_0}) \leqslant \rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n - 0\|_\infty < \varepsilon.$$

Τότε,

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon).$$

Πράγματι, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, D_n) < \varepsilon$$

άρα, υπάρχει $j \leqslant n$ ώστε $\rho(x, x_j) < \varepsilon$, δηλαδή $x \in B(x_j, \varepsilon)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $y_1, \ldots, y_k \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(y_j, \varepsilon/2).$$

Για κάθε $j \leqslant k$ βρίσκουμε $i_j \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{i_j}, y_j) < \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα, βλέπουμε εύκολα ότι

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, \varepsilon).$$

Θέτουμε $n(\varepsilon) = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n(\varepsilon)$ έχουμε

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon),$$

δηλαδή

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, D_n) < \varepsilon$$

για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στον X.

7.32. (α) *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι με τον X συμπαγή. Αν $f_n : X \to Y$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to Y$ συνεχής ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.*

(β) *Αποδείξτε ότι η συμπάγεια είναι απαραίτητη, θεωρώντας την ακολουθία* $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ *με*

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

και την $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Διαπιστώστε ότι ικανοποιείται η υπόθεση, αλλά* $f_n \not\to f$ *ομοιόμορφα.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$. Περνώντας σε υπακολουθία της (f_n) μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \geqslant 2\varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $\rho(f_n(x_n), f(x_n)) \geqslant \varepsilon$. Ο (X,d) είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x_0 \in X$. Από την υπόθεση, $f_{k_n}(x_{k_n}) \to f(x_0)$ και από τη συνέχεια της f στο x_0, $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Όμως τότε,

$$\rho(f_{k_n}(x_{k_n}), f(x_{k_n})) \to \rho(f(x_0), f(x_0)) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\rho(f_{k_n}(x_{k_n}), f(x_{k_n})) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω (x_n) ακολουθία στο $(0,1]$ με $x_n \to x \in (0,1]$. Αφού $x > 0$, παίρνοντας $\varepsilon = x/2 > 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \frac{x}{2}$ και $x_n > \frac{x}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_0$ (εξηγήστε γιατί μπορούμε να πετύχουμε και τα δύο ταυτόχρονα). Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $f_n(x_n) = \frac{1}{x_n}$, άρα $f_n(x) \to \frac{1}{x} = f(x)$.

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη: παρατηρήστε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} \left| n - \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7.33. *Αν* $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις και* $f_n \to f$, $g_n \to g$ *ομοιόμορφα στο* $[0,1]$, *δείξτε ότι η ακολουθία* (h_n) *όπου* $h_n = f_n \circ g_n$ *(δηλ.* $h_n(t) = f_n(g_n(t))$*) συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $h = f \circ g$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού οι f_n, g_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, οι f, g είναι συνεχείς. Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |h(t) - h_n(t)| &= |f(g(t)) - f_n(g_n(t))| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |f(g_n(t)) - f_n(g_n(t))| \\ &= |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |(f - f_n)(g_n(t))| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $u, v \in [0,1]$ και $|u - v| < \delta$, τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon/2$ (αυτό γίνεται, γιατί η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Στη συνέχεια βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $\|g - g_n\|_\infty < \delta$ και $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$ (αυτό γίνεται, γιατί $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$). Τότε, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|g(t) - g_n(t)| < \delta$, άρα

$$|h(t) - h_n(t)| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\|h - h_n\|_\infty \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $h_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7.34. *Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ με $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

(i) *Για κάθε $a \in [0,1)$ η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,a]$.*

(ii) *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1)$.*

Υπόδειξη. (i) *Σωστό.* Στο συμπαγές $[0,a]$ η (f_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Dini: οι f_n είναι συνεχείς, $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Άρα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(ii) *Λάθος.* Η ακολουθία $f_n(x) = x^n$ ικανοποιεί τις υποθέσεις στο $[0,1)$: έχουμε ότι οι f_n είναι συνεχεία, $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{x^n : 0 \leq x < 1\} = 1 \not\to 0.$$

7.35. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, δείξτε ότι η f έχει ρίζα.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0,1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x \in [0,1]$. Τότε,

$$\begin{aligned} (*) \qquad |f(x)| &= |f(x) - f_{k_n}(x_{k_n})| \leq |f(x) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \\ &\leq |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

διότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ από την αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x, και $\|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0$ λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n (άρα και των f_{k_n}) στην f.

Από την $(*)$ έπεται άμεσα ότι $f(x) = 0$, δηλαδή η f έχει ρίζα.

7.36. (α) *Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, όπου*

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1-x).$$

(β) *Εξετάστε για ποιά* $x \geq 0$ *συγκλίνουν οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του $a > 0$ *είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα* $[0, a]$*;*

Υπόδειξη. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$, όποτ $f(x) = 0$ αν $0 \leq x < 1$ και $f(1) = 1$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Για την g_n παρατηρούμε ότι $g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$, άρα η g_n παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n}{n+1}$. Έπεται ότι

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Αφού $\|g_n\|_\infty \to 0$, έχουμε $g_n \to 0$ ομοιόμορφα.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει αν $0 \leq x < 1$ και αποκλίνει αν $x \geq 1$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει αν $0 \leq x \leq 1$ και αποκλίνει αν $x > 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $0 < a < 1$. Πράγματι, αν $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ τότε $\|f_n\|_\infty = \frac{a^n}{n}$ στο $[0, a]$, και αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a \geq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x = 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $0 < a \leq 1$. Πράγματι, αν $g_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ τότε $\|g_n\|_\infty = \frac{a^n}{n^2}$ στο $[0, a]$, και αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x \in (1, a]$.

7.37. *Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων* $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *με*

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ *κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο* $[0, \infty)$*. Εξετάστε αν* $f_n \to 0$ *ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα* $[a, \infty)$*,* $a > 0$*.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{n}x} > \frac{(\sqrt{n}x)^4}{24} = \frac{x^4n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$). Άρα,

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leq \frac{24nx}{x^4n^2} = \frac{24}{x^3n} \to 0$$

για κάθε $x > 0$. Επίσης, $f_n(0) = 0 \to 0$. Έτσι, έχουμε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1} \to +\infty$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Έστω $a > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [a, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{nx}} \leq \frac{24}{x^3 n} \leq \frac{24}{a^3 n},$$

άρα $\|f_n\|_\infty \leq \frac{24}{a^3 n} \to 0$ (στο $[a, \infty)$) και έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$.

7.38. *Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Δείξτε ότι:*

(i) *Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;*

(ii) *Για κάθε $a > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$.*

Υπόδειξη. (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$. Για $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \to 1.$$

Άρα, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f(x) = 1$ αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x = 0$.

(ii) Έστω $a > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, a]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$. Στο $[a, \infty)$ έχουμε $f_n \to f \equiv 1$ κατά σημείο, και

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{na+1}$$

για κάθε $x \geq a$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| : x \geq a \right\} = \frac{1}{na+1} \to 0,$$

άρα $f_n \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα.

7.39. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και έστω (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \to 0$. Θέτουμε $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.

Αφού $\delta_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x))\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} \varepsilon\, dt \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Έπεται ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

7.40. (α) *Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα* $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

(β) *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ *είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\alpha > 0$. Αν ορίσουμε $f_n(x) = \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$$

για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, άρα $\|f_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ στο $[-\alpha, \alpha]$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|}{n^2} < \infty$, το κριτήριο του Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$. Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο x.

Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7.41. *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος και έστω* (K_n) *φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του* X. *Ορίζουμε* $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n)$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $f : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα. Ποιά είναι η* f;

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι μη κενό συμπαγές σύνολο. Η ακολουθία (K_n) είναι φθίνουσα, άρα η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n)$ είναι αύξουσα.

Επίσης, αφού $K \subseteq K_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n) \leq \mathrm{dist}(x, K)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ υπάρχει το $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ και $f(x) \leq \mathrm{dist}(x, K)$.

Έστω $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K_n$ ώστε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n) = d(x, z_n)$. Η ακολουθία (z_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο K_1, άρα έχει υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η (K_n) είναι φθίνουσα ελέγχουμε ότι $z \in K$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Τότε,

$$\mathrm{dist}(x, K) \leq d(x, z) = \lim_{n\to\infty} d(x, z_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Για το σκοπό αυτό αποδεικνύουμε το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$(*) \qquad K_n \subseteq K_\varepsilon = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, K) < \varepsilon\}.$$

Αν αποδείξουμε αυτό, τότε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ βρίσκουμε $z_n(x) \in K_n$ με $f_n(x) = d(x, z_n(x))$ και $y_n(x) \in K$ με $d(z_n(x), y_n(x)) < \varepsilon$, και γράφουμε

$$f_n(x) \leq f(x) \leq d(x, y_n(x)) \leq d(x, z_n(x)) + d(z_n(x), y_n(x)) < f_n(x) + \varepsilon,$$

απ¨ όπου έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Για την απόδειξη της $(*)$ μιμούμαστε την απάντηση της Άσκησης 4.8: αν $G_n = X \setminus K_n$ τότε κάθε G_n είναι ανοικτό και

$$\bigcup_{n=1}^\infty G_n = \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty K_n = X \setminus K.$$

Συνεπώς,

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^\infty G_n\right) \cup K_\varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι το K_ε είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί). Άρα, η οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{K_\varepsilon\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε

$$X = G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_k} \cup K_\varepsilon.$$

Όμως, $K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}$, άρα $G_{n_1} \subseteq \cdots \subseteq G_{n_k}$. Συνεπώς,

$$X = G_{n_k} \cup K_\varepsilon = (X \setminus K_{n_k}) \cup K_\varepsilon.$$

Έπεται ότι $K_{n_k} \subseteq K_\varepsilon$. Άρα, για κάθε $n \geq n_k$ έχουμε $K_n \subseteq K_\varepsilon$.

Κεφάλαιο 8

Χώροι συναρτήσεων

Ομάδα Α΄

8.1. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο [0,1]. Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $fp_n \to f^2$ ομοιόμορφα. Άρα,

$$\int_0^1 (f(t))^2\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t) f(t)\, dt.$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(t) f(t)\, dt$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 t^n f(t)\, dt$ τα οποία είναι ισα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(t) f(t)\, dt = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όποτε $\int_0^1 f^2 = 0$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι $f \equiv 0$ (εξηγήστε γιατί).

8.2. *Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 x^n g(x)\, dx$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ δείξτε ότι $f \equiv g$.*

Υπόδειξη. Αν θέσουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ τότε έπεται ότι

$$\int_0^1 x^n h(x)\, dx = \int_0^1 x^n f(x)\, dx - \int_0^1 x^n g(x)\, dx = 0.$$

Επιπλέον, η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα από την Άσκηση 1 έπεται ότι $h \equiv 0$ δηλαδή $f \equiv g$.

8.3. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.*

1η Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$. Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$. Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$. Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leqslant 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση. Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Έπεται ότι $fq_n \to f^2$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x)q_n(x)\,dx \to \int_0^1 (f(x))^2\,dx.$$

Από την υπόθεση έχουμε $\int_0^1 q_n(x)f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί), άρα έχουμε το συμπέρασμα.

2η Απόδειξη. Έστω F η *άρτια επέκταση* της f στο $[-1,1]$ δηλαδή, $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(-x), & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Τότε, η F είναι συνεχής. Επιπλέον είναι άρτια, οπότε ισχύει

$$\int_{-1}^1 x^{2n-1}F(x)\,dx = 0$$

για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί) και ακόμη

$$\int_{-1}^1 x^{2n}F(x)\,dx = 2\int_0^1 x^{2n}F(x)\,dx = 2\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ από την υπόθεση. Άρα, η F ικανοποιεί τις υποθέσεις της Άσκησης 2, οπότε είναι ταυτοτικά μηδέν. Ειδικότερα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

8.4. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας πολυωνύμων $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 p_n(x)\,dx \to 1$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p_n(x) = 2nx(1-x^2)^{n-1}$ με $x \in [0,1]$. Τότε εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $p_n(x) \to 0$, αλλά $\int_0^1 p_n(x)\,dx = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8.5. *Δώστε παράδειγμα συνεχούς και φραγμένης συνάρτησης $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε να μην υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $(0,1]$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(1/x)$. Δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων, η οποία να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $(0,1]$. Πράγματι· αν αυτό ήταν σωστό θα υπήρχε πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < 1/2$. Τότε θα είχαμε ότι $|\sin(1/x) - p(x)| < 1/2$ για κάθε $0 < x \leqslant 1$. Ειδικότερα, θα είχαμε ότι: για $x_n = (2\pi n + \frac{\pi}{2})^{-1}$ ισχύει

$$|1 - p(0)| = \lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - p(x_n)\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

ενώ για τα $y_n = (2\pi n - \frac{\pi}{2})^{-1}$ ισχύει:

$$|1 + p(0)| = \lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) - p(y_n)\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε σε άτοπο: η πρώτη δίνει $p(0) \geqslant 1/2$ ενώ η δεύτερη $p(0) \leqslant -1/2$.

8.6. (α) *Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

(γ) *Αν $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geqslant m$ για κάθε $x \in [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Καθώς, η $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής, από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|p - \frac{f+g}{2}\|_\infty < \frac{m}{4}$. Τότε, για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει:

$$f(x) < \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{m}{4} < p(x) < \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{m}{4} < g(x).$$

(β) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0,1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Έστω $x \in (0,1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^x e^t\, dt < \int_0^x p(t)\, dt < 2\int_0^x e^{2t}\, dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_0^x p(t)\, dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Έπεται, ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x},$$

όπου $q(x) = \int_0^x p(t)\,dt + 1$. Παρατηρούμε ότι το q είναι πολυώνυμο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

(γ) Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n ώστε

$$h(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < h(x) - \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι η (p_n) είναι γνησίως αύξουσα εκ κατασκευής και ότι $|p_n(x) - h(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$. Έπεται ότι η $p_n \to h$ ομοιόμορφα.

8.7. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. 1η Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_\infty < \varepsilon$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t)\,dt + f(0)$. Τότε, ισχύει $p'(x) = q(x)$ και ακόμη αν $x \in [0,1]$ έχουμε

$$|p(x) - f(x)| = \left| \int_0^x q(t)\,dt - \int_0^x f'(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |f'(t) - q(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x \leqslant \varepsilon.$$

Άρα, $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

2η Απόδειξη. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι: αν f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε $[B_n(f)]' \to f'$ ομοιόμορφα και επειδή ισχύει $B_n(f) \to f$ ομοιόμορφα (από το θεώρημα του Bernstein) έχουμε το ζητούμενο. Γι' αυτό το σκοπό δείξτε διαδοχικά τα εξής:

- $p'_{n+1,k} = (n+1)(p_{n,k-1} - p_{n,k})$, όπου $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x^{n-k})$.
- $[B_{n+1}(f)]' = (n+1)\sum_{k=0}^n [f((k+1)/n) - f(k/n)]p_{n,k}$.
- Από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ υπάρχει t_k με $|t_k - \frac{k}{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+1}$ ώστε $[B_{n+1}(f)]' = \sum_{k=0}^n f'(t_k)p_{n,k}$.
- Χρησιμοποιώντας το παραπάνω εύκολα βλέπουμε ότι $\|[B_{n+1}(f)]' - B_n(f')\|_\infty \leqslant \omega_{f'}(\frac{1}{n+1})$.
- Αποδεικνύοντας ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\|B_n(g) - g\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega_g(\frac{1}{\sqrt{n}})$ και συνδυάζοντας με το προηγούμενο, συμπεραίνουμε ότι

$$\|[B_{n+1}(f)]' - f'\|_\infty \leqslant \frac{5}{2}\omega_{f'}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Άρα, $[B_n(f)]' \to f'$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αφού η f' ομοιόμορφα συνεχής (Θυμηθείτε ότι μια συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν $\omega_h(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0^+$).

Ομάδα Β΄

8.8. *Δείξτε ότι ο $\mathcal{C}([0,1])$ είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. 1η Απόδειξη. Με χρήση του θεωρήματος πρόσεγγισης του Weierstrass: Θα δείξουμε ότι ο σύνολο $\mathbb{Q}[x]$ των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$. Έστω $f \in \mathcal{C}([0,1])$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m,\ a_i \in \mathbb{R}$ ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon/2$. Από την πυκνότητα των ρητών, για κάθε $i = 0,1,\ldots,m$ υπάρχει $q_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}$. Τότε, το πολυώνυμο $q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_mx^m$ ανήκει στο $\mathbb{Q}[x]$ και έχει την ιδιότητα: αν $x \in [0,1]$ τότε

$$|p(x) - q(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{m} |a_i - q_i| x^i \leqslant \sum_{i=0}^{m} |a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, $\|p - q\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\|f - q\|_\infty < \varepsilon$. Έπεται ότι το $\mathbb{Q}[x]$ είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$.

Παρατηρούμε ότι το $\mathbb{Q}[x]$ γράφεται σαν ένωση της μορφής $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n[x]$, όπου $\mathbb{Q}_n[x]$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές και βαθμό το πολύ n. Έτσι, για να δείξουμε ότι το $\mathbb{Q}[x]$ είναι αριθμήσιμο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε n το $\mathbb{Q}_n[x]$ είναι αριθμήσιμο. Όμως, το $\mathbb{Q}_n[x]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{Q}^{n+1}$ μέσω της αντιστοιχίας $q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n \mapsto (q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Αφού το $\mathbb{Q}^{n+1}$ είναι καρτεσιανό γινόμενο αριθμήσιμων συνόλων, έπεται ότι είναι αριθμήσιμο.

2η Απόδειξη. Με χρήση των πολυγωνικών συναρτήσεων: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο L_n των συναρτήσεων στο $[0,1]$ όπου είναι συνεχείς και γραμμικές σε κάθε υποδιάστημα $J_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}],\ k = 1,2,\ldots,n$. (παρατηρήστε ότι μέσω αυτής της περιγραφής οι συναρτήσεις αυτές είναι πλήρως καθορισμένες). Τότε, το σύνολο L των πολυγωνικών συναρτήσεων (με «κόμβους» στα σημεία $\frac{k}{n},\ k = 0,1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}$) είναι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο Q_n των συνεχών πολυγωνικών συναρτήσεων που παίρνουν ρητές τιμές στα $\frac{k}{n}, k = 0,1,\ldots,n$. Δηλαδή,

$$Q_n = L_n \cap \{f(k/n) \in \mathbb{Q} : k = 0,1,\ldots,n\}.$$

Τότε, το σύνολο Q των πολυγωνικών συναρτήσεων με «ρητούς κόμβους» (στα σημεία $k/n,\ k = 0,1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}$) είναι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Παρατηρούμε (με ένα επιχείρημα όπως αυτό στην πρώτη απόδειξη) ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το Q_n είναι αριθμήσιμο σύνολο. Άρα, το Q είναι αριθμήσιμο. Θα αποδείξουμε ότι το Q είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το L είναι πυκνό στον $C([0,1])$ και ότι το Q είναι πυκνό στο L (όπως στην πρώτη απόδειξη).

Έστω $f \in \mathcal{C}([0,1])$ και $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f το $[0,1]$ έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε αν $x, y \in [0,1]$ και $|x-y| \leqslant \frac{1}{n}$ να ισχύει $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. Θεωρούμε την πολυγωνική συνάρτηση g που είναι γραμμική σε κάθε υποδιάστημα $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ και $g(k/n) = f(k/n)$. Τότε, $g \in L_n$ και η g έχει την ιδιότητα $\|g-f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Πράγματι, αν $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $\frac{j-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{j}{n}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &\leqslant |f(x)-f(k/n)| + |g(k/n)-g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |g((k-1)/n) - g(k/n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Αν τώρα πάρουμε $g \in L$ θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε όσο κοντά της θέλουμε στοιχείο h του Q. Πράγματι· υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε $g \in L_m$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$ επιλέγουμε $q_k \in \mathbb{Q}$ ώστε $g(k/n) < q_k < g(k/n) + \varepsilon$. Τότε, η πολυγωνική συνάρτηση h με $h(k/n) = q_k$ για $k = 0, 1, \ldots, n$ είναι στο Q_m και έχει την ιδιότητα: $g(x) < h(x) < g(x) + \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Σημείωση. Παρατηρήστε και με τις δύο αποδείξεις προκύπτει άμεσα ότι οι Lipschitz συναρτήσεις (στο $[0,1]$) είναι πυκνές στον $C([0,1])$. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε πολυώνυμο περιορισμένο σε φραγμένο διάστημα είναι Lipschitz και κάθε πολυγωνική συνάρτηση είναι Lipschitz.

8.9. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) *Δείξτε ότι $|B_n(f)| \leqslant B_n(|f|)$ και $B_n(f) \geqslant 0$ αν $f \geqslant 0$.*

(β) *Δείξτε ότι $\|B_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι η (B_n) είναι ακολουθία γραμμικών τελεστών $B_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$. Δηλαδή, αν $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $B_n(f + \lambda g) = B_n(f) + \lambda B_n(g)$. Επίσης, είναι άμεσο από τον ορισμό ότι κάθε τελεστής B_n είναι θετικός: αν $f \geqslant 0$ τότε $B_n(f) \geqslant 0$. Τέλος, αν $x \in [0,1]$ τότε

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(|f|)(x) \end{aligned}$$

Άρα, $|B_n(f)| \leqslant B_n(|f|)$.

(β) Αφού ο B_n είναι θετικός και γραμμικός, είναι μονότονος: αν $f \leqslant g$ τότε $B_n(f) \leqslant B_n(g)$. Αφού

$$-\|f\|_\infty \leqslant f(x) \leqslant \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in [0,1]$, έχουμε

$$-B_n(\|f\|_\infty) \leqslant B_n(f) \leqslant B_n(\|f\|_\infty).$$

Από την $B_n(\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty B_n(\mathbf{1}) = \|f\|_\infty$ έπεται ότι $|B_n(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [0,1]$. Παίρνοντας supremum ως προς x έχουμε το ζητούμενο.

8.10. *Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0,1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0,a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0,0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία πολυωνύμων

$$P_n(g)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rfloor x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Τα $P_n(g)$ έχουν ακέραιους συντελεστές και έχουν την ιδιότητα $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ (άρα $P_n(g) \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, το οποίο είναι το ζητούμενο). Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \to 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |B_n(g)(x) - P_n(g)(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} - \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rfloor \right) x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\binom{n}{k} \geqslant n$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και στην τελευταία ότι $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$. Άρα, $\|B_n(g) - P_n(g)\|_\infty \leqslant 1/n$ για κάθε $n \geqslant 2$. Έπεται ότι $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

8.11. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.*

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \ldots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$. Πράγματι· αν (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$, τότε υπάρχουν ακολουθίες

$(a_0^n), (a_1^n), \ldots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \ldots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \ldots$. Υποθέτουμε ότι η $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (a_i^n), $i = 0, 1, \ldots, k$ συγκλίνει σε κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$. Θεωρούμε $k+1$ σημεία $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ (τυχαία αλλά σταθερά) στο διάστημα $[0,1]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{cases} a_0^n + a_1^n t_0 + \ldots + a_k^n t_0^k = p_n(t_0) \\ a_0^n + a_1^n t_1 + \ldots + a_k^n t_1^k = p_n(t_1) \\ \quad \vdots \\ a_0^n + a_1^n t_k + \ldots + a_k^n t_k^k = p_n(t_k) \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1) \times (k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n, $j = 0, 1, \ldots, k$. Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & \ldots & t_0^k \\ 1 & t_1 & \ldots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & t_k & \ldots & t_k^k \end{vmatrix},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (t_j - t_i)$$

και δεν είναι μηδενική από την επιλογή των t_j. Οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n, a_1^n, \ldots, a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n = \frac{D_j}{D}$ για $j = 0, 1, \ldots, k$. Κάθε D_j είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των t_j^i και $p_n(t_j)$ για $i, j = 0, 1, \ldots, k$ (δηλαδή ακολουθία ως προς n). Επειδή δε, $p_n(t_j) \to f(t_j)$ για $j = 0, 1, \ldots, k$ έχουμε ότι κάθε $(a_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{D} \lim_{n\to\infty} D_j$. Παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε μόνο την κατά σημείο σύγκλιση της (p_n) στην f. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n}) \leqslant m$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, η ακολουθία (p_{k_n}) περιέχεται στο κλειστό $\mathbb{R}_m[x]$ και συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f. Άρα, η f είναι πολυώνυμο (βαθμού το πολύ m), άτοπο.

8.12. *Έστω* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση με* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(α) *Αν η* f *δεν είναι σταθερή, δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* (p_n) *ώστε* $p_n \to f$ *ομοιόμορφα στο* $[1, \infty)$.

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* (p_n) *ώστε* $p_n(\frac{1}{x}) \to f(x)$ *ομοιόμορφα ως προς* x *στο* $[1, \infty)$.

Υπόδειξη. (α) Αφού η f δεν είναι σταθερή, υπάρχουν σημεία $1 \leqslant x < y$ ώστε $\delta := |f(x) - f(y)| > 0$. Αν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[1, \infty)$, τότε υπάρχει πολυώνυμο p ώστε

$$(*) \qquad |p(t) - f(t)| < \delta/3, \quad t \geqslant 1.$$

Ειδικότερα, είναι $|p(x) - p(y)| > \delta/3$. Άρα, το πολυώνυμο p δεν είναι σταθερό, δηλαδή $|p(t)| \to +\infty$ καθώς $t \to \infty$. Επιπλέον, $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$, οπότε υπάρχει $z > 1$ ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: $|f(t) - L| < \delta/3$ και $|p(t)| > |L| + \delta$ για κάθε $t > z$. Τότε, χρησιμοποιώντας την $(*)$ καταλήγουμε σε άτοπο ως εξής: αν $t > z$ έχουμε

$$\delta < |p(t) - L| \leqslant |p(t) - f(t)| + |f(t) - L| < \delta/3 + \delta/ = 2\delta/3.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \begin{cases} f(1/t), & 0 < t \leqslant 1 \\ L, & t = 0 \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|p_n - F\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα,

$$|p_n(x) - F(x)| = |p_n(x) - f(1/x)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $0 < x \leqslant 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα,

$$|p_n(1/x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $x \geqslant 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Η τελευταία δίνει ότι $p_n(1/x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο $[1, \infty)$.

8.13. *Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων (των περιορισμών τους στο $[0, 1]$) είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\mathcal{C}([0, 1])$.*

Υπόδειξη. Γράφουμε $\mathbb{R}_n[x]$ για το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ n. Τότε, το σύνολο όλων των πολυωνύμων γράφεται ως $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}_n[x]$. Παρατηρήσαμε στην Άσκηση 5 ότι ο $\mathbb{R}_n[x]$ είναι κλειστός στον $\mathcal{C}([0, 1])$. Αν δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{R}_n[x]$ έχει κενό εσωτερικό στον $\mathcal{C}([0, 1])$, τότε θα έχουμε γράψει το σύνολο των πολυωνύμων ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του $\mathcal{C}([0, 1])$. Για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να βρούμε οσοδήποτε κοντά σε κάθε πολυώνυμο συνεχή συνάρτηση η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Έστω p πολυώνυμο και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) + p(0), & 0 < x \leqslant 1 \\ p(0), & x = 0 \end{cases}$$

Υπάρχει $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$ ώστε $|p(x) - p(y)| < \varepsilon/2$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$ με $|x - y| \leqslant \delta$. Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\delta}{2} \\ \frac{2}{\delta}[p(\delta) - h(\delta/2)](x - \delta/2) + h(\delta/2), & \frac{\delta}{2} < x < \delta \\ p(x), & \delta \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεισ:

- αν $x \in [0, \delta/2]$ τότε

$$|p(x) - f(x)| \leqslant |p(x) - p(0)| + |x \sin(1/x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} < 2\varepsilon.$$

- αν $x \in (\delta/2, \delta)$ τότε

$$\begin{aligned} |p(x) - f(x)| &\leqslant |p(x) - h(\delta/2)| + \frac{2}{\delta}|p(\delta) - h(\delta/2)|(x - \delta/2) \\ &\leqslant |p(x) - p(0)| + \frac{\delta}{2}|\sin(2/\delta)| + |p(\delta) - p(0)| + \frac{\delta}{2}|\sin(2/\delta)| \\ &< \varepsilon + \delta < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

- αν $x \in [\delta, 1]$ τότε

$$|p(x) - f(x)| = 0 < 2\varepsilon.$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $|p(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Τέλος, παρατηρήστε ότι η f δεν είναι πολυώνυμο αφού στο διάστημα $[0, \delta/2]$ παίρνει άπειρες φορές την τιμή $p(0)$ (και δεν είναι σταθερή εκεί).