ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

21 Σεπτεμβρίου 2009

1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A, B υποσύνολα του X.
(α) Δείξτε ότι $(A\setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$ και $\overline{A}\setminus\overline{B}\subseteq\overline{(A\setminus B)}$.
(β) Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Αν $A\cap B=\emptyset$ τότε $A\cap\overline{B}=\emptyset$.

(ii) Αν $A\cap B=\emptyset$ τότε $A^\circ\cap\overline{B}=\emptyset$.

2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω F μη κενό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g:(X,d)\to\mathbb{R}$ ώστε $F=\{x\in X: g(x)=0\}$.
(β) Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Ο $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ είναι ομοιομορφικός με τον $(\mathbb{N},|\cdot|)$.

(ii) Κάθε συνάρτηση $f:(\mathbb{N},|\cdot|)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι συνεχής.

3. (α) Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστή μπάλα

$$\hat{B}(x,\varepsilon)=\{z\in X:\rho(z,x)\leq\varepsilon\},$$

όπου $x\in X$ και $\varepsilon>0$, είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.
(β) (i) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $x\in X$. Δείξτε ότι: αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του X τότε το $X\setminus\{x\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(ii) Έστω $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και έστω d μετρική στο X ώστε ο (X,d) να είναι πλήρης. Δείξτε ότι ο (X,d) έχει μεμονωμένο σημείο (δηλαδή, υπάρχει σημείο που δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X).

4. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X.

(α) Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{n=1}^\infty F_n\subseteq G$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0}\subseteq G$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την οικογένεια των ανοικτών συνόλων $\{G\}\cup\{X\setminus F_n : n\in\mathbb{N}\}$.]

(β) Αν η $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ είναι μονοσύνολο, αποδείξτε ότι $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α).]

5. (α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι ολικά φραγμένος και ότι κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.
(β) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $D=\{d_n : n\in\mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε $D_n=\{d_1,\ldots,d_n\}$ και ορίζουμε $f_n: X\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\mathrm{dist}(x,D_n)$. Δείξτε ότι:

(i) Για κάθε $x\in X$, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φθίνουσα και $f_n(x)\to 0$.

(ii) $f_n\to 0$ ομοιόμορφα στον X.

6. (α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f_n(x)=\sqrt{n}x(1-x^2)^n.$$

Δείξτε ότι $f_n\to 0$ κατά σημείο και ότι $\int_0^1 f_n(x)\,dx\to 0$. Εξετάστε αν $f_n\to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.
(β) Εξετάστε αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty n^2x^2e^{-n^2x}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

Καλή Επιτυχία!