Πραγματική Ανάλυση – 16/6/2010

1. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του X, δείξτε ότι:

(i) Για κάθε $x \in X$ ισχύει $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.

(ii) Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$d(x,y) \leq d(x,A) + \mathrm{diam}(A) + d(y,A).$$

[*Σημείωση:* Για κάθε μη κενό $C \subseteq X$ και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $d(x,C) = \inf\{d(x,a) : a \in C\}$ την απόσταση του x από το C.]

(β) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}^2$ με τις συνήθεις μετρικές τους. Δείξτε ότι: αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τότε

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

2. (α) Έστω $f : (X,d) \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ το σύνολο $\{x \in X : a < f(x) < b\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(β) Έστω $f : (X,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχής συνάρτηση και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς.

(i) Αν η $f|_D$ είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. (α) Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη μετρική $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική στο $\mathbb{R}$, αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, συνεχείς συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n = n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και διάστημα (a,b) ώστε $f_m(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

4. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ η κλειστή μπάλα $\widehat{B}\left(x, \frac{1}{4}\right) = \left\{y \in X : d(y,x) \leq \frac{1}{4}\right\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι ολικά φραγμένος.

(ii) Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι πλήρης.

(iii) Κάθε πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι συμπαγής.

5. (α) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

(β) Έστω $f, f_n : (X,d) \to [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.

6. (α) Δείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο. Βρείτε κάθε φορά την οριακή συνάρτηση και εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

$$\text{(i)}\ \ f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}},\ \ x \in (0,1), \qquad \text{(ii)}\ \ g_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right),\ \ x \in (0,1).$$

(β) Εξετάστε αν η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1 + k^4 x^3}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$.

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία δώδεκα μονάδων.

Καλή Επιτυχία!