Πραγματική Ανάλυση Ι (2009-10)

Ενδιάμεση Εξέταση – 8 Μαΐου 2010

1. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

1. Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι κλειστό, τότε έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο.
2. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A είναι κλειστό.
3. Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του B.
4. Κάθε ανοικτό μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει σημεία συσσώρευσης.

(3μ)

2. **(α)** Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{(f(A))}$.

(β) Αντίστροφα, αν μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ έχει την ιδιότητα «για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{(f(A))}$», δείξτε ότι η f είναι συνεχής. (*Σημείωση:* Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό το γεγονός ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(C)$ οποιουδήποτε κλειστού $C \subseteq Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του X).

(3μ)

3. **(α)** Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.
2. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.

(γ) Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ ομοιομορφισμός. Αν, επιπλέον, ο (X, d) είναι πλήρης και η $f^{-1} : Y \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, δείξτε ότι ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(3μ)

4. **(α)** Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X, G ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(β) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, με $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, τότε

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

(3μ)

Καλή επιτυχία!

Ενδεικτικές απαντήσεις

1. (α) *Ψευδής.* Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ διότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Όμως, το $\mathbb{Q}$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο: αν ο $q \in \mathbb{Q}$ ήταν εσωτερικό σημείο του $\mathbb{Q}$, τότε θα υπήρχε $\delta > 0$ ώστε $(q-\delta, q+\delta) \subseteq \mathbb{Q}$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, διότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους.

(β) *Αληθής.* Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{A'} \subseteq A'$. Έστω $x \in \overline{A'}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap A'$. Αφού η $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Αφού $y \in A'$, η $B(y,\delta)$ περιέχει άπειρα σημεία του A. Συνεπώς, υπάρχει $a \in A$, $a \neq x$ ώστε $a \in B(y,\delta)$. Αφού $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$, έχουμε $a \in B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$. Δείξαμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Άρα, $x \in A'$.

Συνεπώς, $\overline{A'} \subseteq A'$ και το A' είναι κλειστό.

(γ) *Ψευδής.* Θέτουμε $A = \{0\}$ και $B = \mathbb{R}$. Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του A αλλά δεν είναι μεμονωμένο σημείο του B.

(δ) *Αληθής.* Κάθε σημείο $x \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν $x \in A$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A$, διότι το A είναι ανοικτό. Θεωρούμε ακολουθία (t_n) με όλους τους όρους της διαφορετικούς από τον x και $t_n \to x$ (για παράδειγμα, $t_n = x + \frac{1}{n}$).

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε $|t_n - x| < \min\{\varepsilon, \delta\}$, άρα $t_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $t_n \in (x-\delta, x+\delta) \subseteq A$ και $t_n \neq x$. Συνεπώς, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

2. (α) Έστω $A \subseteq X$ και $y \in f(\overline{A})$. Τότε, υπάρχει $x \in \overline{A}$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα $f(x_n) \to f(x) = y$. Όμως, $f(x_n) \in f(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $y \in \overline{f(A)}$.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(C)$ οποιουδήποτε κλειστού $C \subseteq Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $A = f^{-1}(C)$ έχουμε

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C,$$

διότι $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το C είναι κλειστό). Αφού $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq C$, έπεται ότι

$$\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C).$$

Έπεται ότι το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό.

3. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X,d). Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,σ). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $d(x,y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Η (x_n) είναι d–βασική, συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $d(x_n, x_m) < \delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $m, n \geq n_0$ τότε $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

(β) 1. *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε αυτή είναι συνεχής, αν όμως θεωρήσουμε την βασική ακολουθία $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(0, +\infty)$ τότε αυτή δεν απεικονίζεται σε βασική ακολουθία, αφού $f(\frac{1}{n}) = n$.

2. *Σωστό.* Αν έχουμε μια βασική ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ τότε αυτή είναι και συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x_n \to x$ και, επειδή η f είναι συνεχής, $f(x_n) \to f(x)$, δηλαδή η $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα και άρα βασική.

(γ) Έστω (y_n) βασική ακολουθία στον (Y,σ). Αφού η f είναι 1-1 και επί, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $x_n \in X$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Αφού η f^{-1} είναι ομοιόμορφα συνεχής, το ερώτημα (α) δείχνει ότι η ακολουθία $(x_n) = (f^{-1}(y_n))$ είναι βασική στον (X,d). Αφού ο (X,d) είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Η f είναι συνεχής, άρα $y_n = f(x_n) \to f(x)$. Δηλαδή, η (y_n) συγκλίνει.

4. (α) Έστω $x \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το G είναι πυκνό, υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap G$. Το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon) \cap G$. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $z \in B(y,\delta) \cap D$. Τότε, $z \in B(x,\varepsilon) \cap (G \cap D)$. Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in G \cap D$ ώστε $z \in B(x,\varepsilon)$. Άρα, $x \in \overline{G \cap D}$. Αφού το $x \in X$ ήταν τυχόν, $X = \overline{G \cap D}$.

(β) Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq f(E_m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} f(E_m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: έστω $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in E_n$ ώστε $f(x_n) = y$. Αφού $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$ από το θεώρημα του Cantor. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n, x \in E_n$ άρα $\rho(x_n, x) \leq \mathrm{diam}(E_n) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y = y.$$

Δηλαδή, $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.