Πραγματική Ανάλυση – 2 Σεπτεμβρίου 2010

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.
(α) Χρησιμοποιώντας μόνο τους ορισμούς, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x,r)=\{y\in X:\rho(y,x)\le r\}$ είναι κλειστό σύνολο.

(β) Έστω A ανοικτό υποσύνολο του X και (x_n) ακολουθία στοιχείων του X ώστε $x_n\to x\in A$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\ge n_0$ η ανοικτή μπάλα $B(x_n,\frac{1}{n})=\{y\in X:\rho(y,x_n)<\frac{1}{n}\}$ να περιέχεται στο A.

(γ) Έστω $y_1,\dots,y_m$, $m\ge 2$, διαφορετικά ανά δύο σημεία του X. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα $G_1,\dots,G_m\subseteq X$ ώστε $y_i\in G_i$ για κάθε $i=1,\dots,m$.

(2 μονάδες)

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X. Για κάθε $x\in X$ ορίζουμε $d(x,F)=\inf\{\rho(x,y):y\in F\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) $d(x,F)=0$ αν και μόνο αν $x\in F$.

(β) Για κάθε $\varepsilon>0$, το σύνολο $U_\varepsilon=\{x\in X:d(x,F)<\varepsilon\}$ είναι ανοικτό.

(γ) Το F είναι σύνολο G_δ (δηλ. γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων).

(1.5 μονάδα)

3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $f:X\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(i) Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η $g\circ f:X\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η g είναι συνεχής, τότε η $g\circ f:X\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(iii) Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη και η g ομοιόμορφα συνεχής, τότε η $g\circ f:X\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. **(1.5 μονάδα)**

4. (α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $D\subseteq X$ πυκνό υποσύνολο. Αν για κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n\to x$, δείξτε ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(i) Αν ο (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε ο (X,ρ) είναι συμπαγής.

(ii) Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο (X,ρ) είναι πλήρης.

(iii) Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και ο (Y,σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε ο $(X\times Y,d)$ (όπου d η μετρική: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho(x_1,x_2),\sigma(y_1,y_2)\}$) είναι πλήρης μετρικός χώρος. **(2 μονάδες)**

5. (α) Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση μεταξύ μετρικών χώρων. Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του X, δείξτε ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

(β) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος ($X\neq\emptyset$) και $f:X\to X$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τα σύνολα $X_1=X, X_2=f(X_1),\dots,X_{n+1}=f(X_n),\dots$.

(i) Δείξτε επαγωγικά ότι $X_{n+1}\subseteq X_n$ για κάθε n.

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n$ είναι μη κενό.

(iii) Δείξτε ότι $f(Y)=Y$. **(2 μονάδες)**

6. (α) Αν $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ είναι συνεχείς και $f_n\to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι $\int_a^b f_n(t)dt\to\int_a^b f(t)dt$.

(β) Ορίζουμε $f_n:(0,1]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$, με $f_n(x)=\begin{cases} n^2, & 0<x\le\frac{1}{n}\\ \frac{1}{x^2}, & \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$ Εξετάστε την ακολουθία (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(γ) Έστω $\alpha>1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. **(3 μονάδες)**

Καλή Επιτυχία!